VOLÚMEN 14
N°1
ABRIL 2022

RECHIEM

REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

sochiem

ÍNDICE

sochiem

Sociedad Chilena de Educación Matemática
Revista Chilena de Educación Matemática
ISSN 2452-5448 Versión en línea
Chile

EDITORIAL

La *Revista Chilena de Educación Matemática –RECHIEM–*, como portavoz de la Sociedad Chilena de Educación Matemática, cuya finalidad es impulsar el desarrollo de la Educación Matemática en Chile y estimular el intercambio, el análisis crítico y el desarrollo en el campo de la Educación Matemática, no podía quedarse al margen del debate sobre la Nueva Reforma Educativa que empezó desde hace varios años y se encuentra en marcha hasta la actualidad. Esta nueva propuesta para el país, busca garantizar que la educación de calidad se convierta en un derecho para todos los chilenos.

En esta línea, dedicamos el primer número del volumen 14 a este tema de amplio interés, desde la perspectiva de los especialistas de nuestra área. De este modo, el presente número reúne tres artículos, dos de los cuales invitan a un debate y a reflexión sobre la Nueva Reforma desde la educación matemática; y el tercero, presenta una propuesta didáctica que permite atender ciertas discordancias del currículo chileno en relación a las habilidades que los estudiantes deben desarrollar durante su escolaridad.

El *Dr. Arturo Mena Lorca* plasma sus ideas en los artículos titulados *"Sobre la nueva reforma de la educación matemática: invitación a un debate, 1 y 2"*, con promesa de ahondar en la explicación de una perspectiva adecuada para esta en un tercer ensayo. En los primeros dos ensayos de esta serie, el autor plantea la necesidad de un debate, presentando los aspectos a considerar y reflexionando sobre temas como la tarea de enseñar, el derecho a aprender matemáticas, las ideas unificadoras de matemáticas, la reforma de la matemática escolar en el siglo XX y XXI, concluyendo con consideraciones acerca de nuestra tarea como responsables de los aprendizajes de matemáticas del país. Durante la lectura de los ensayos, el lector se encontrará con un panorama histórico de las reformas en Chile y podrá apreciar una reflexión profunda, pero a la vez amplia, sobre las diversas problemáticas y cuestionamientos que deben debatirse y atenderse para una reforma adecuada en la educación matemática.

Las autoras *Juana Gómez Calalán y Melissa Andrade-Molina*, a partir de análisis de textos escolares y lineamientos curriculares, observan una visión acotada sobre la geometría escolar. Sostienen que esta visión conlleva al surgimiento de ciertas discordancias en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría escolar. Particularmente, se centran en la homotecia como eje vertebral de geometría para ejemplificar las discordancias que emergen al contrastar el tipo de habilidades que los estudiantes deben desarrollar (según las guías curriculares) y los ejercicios propuestos para la enseñanza de la homotecia en los textos escolares. Las autoras proponen una situación didáctica, enmarcada en el Estudio de Clases y en la Teoría de Situaciones Didácticas, con el fin de examinar posibles caminos para que los estudiantes identifiquen elementos constitutivos de homotecia y desarrollen las habilidades declaradas en las Bases Curriculares. El lector podrá apreciar cómo la implementación de la propuesta ayuda a atender las discordancias identificadas.

Desde RECHIEM les invitamos a conocer y compartir este nuevo número de la revista, y de esta forma participar y contribuir al debate sobre la nueva reforma en educación matemática, tarea que nos incumbe a todos.

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i1.107

SOBRE LA NUEVA REFORMA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA: INVITACIÓN A UN DEBATE, 1

ON THE NEW REFORM OF MATHEMATICS EDUCATION: INVITATION TO DEBATE, 1

Arturo Mena Lorca
arturo.mena@pucv.cl
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso,
Valparaíso, Chile

RESUMEN

Hacia 1960, comenzó un proceso de reforma de las matemáticas escolares en gran parte del globo. Chile, como otros países, no estaba preparado para ella. Hoy, las primeras olas de una nueva, inexorable, más amplia y profunda reforma ya están llegando. No es obvio que ahora estemos mejor apercibidos: se ha avanzado en todas las áreas concernidas, pero algunas ideas substantivas, incuestionables, de la reforma anterior, no fueron incorporadas según se pretendía. Mientras en otros lugares, que están determinando el rumbo de los acontecimientos futuros, ya están mirando en una dirección diferente, nuestra nación no ha terminado de ponerse de acuerdo en temas fundamentales. Se necesita aquilatar la situación, para apercibirse, precaverse y enfrentar la nueva situación. En este escrito, intentaremos: reunir algunos aspectos del currículo escolar; situar en perspectiva nuestra tarea como responsables, cada uno en lo suyo, de los aprendizajes de matemáticas del país, y aquilatar los resultados que se están obteniendo; describir el escenario de la reforma educacional anterior, sus causas, su realidad en Chile; reseñar inferencias que se deben hacer y precauciones que hay que tomar; examinar nuestro presente en esta materia; explicitar la nueva reforma, y reunir todo ello en una mirada de largo aliento.

PALABRAS CLAVE:
Reforma de la matemática escolar, Ideas unificadoras en matemática, Mediciones educacionales internacionales, Educación matemática chilena.

ABSTRACT

Around 1960, a profound reform process of school mathematics began covering a great part of the globe. Our country, like many others, was not prepared for it. Today, it can be perceived that the first waves of a new great reform are already arriving. An inexorable reform, broader and deeper than the previous one, and it is not an obvious assumption that we are better prepared this time: the country has advanced in all areas of concern, but some substantive, unquestionable ideas of the previous reform were not incorporated as intended. While other places, which are determining the course of future events, are already looking in a different direction, Chile has not finished agreeing on fundamental issues. It is necessary, then, to assess the situation, to be aware, and take precautions. In this writing, we will try, successively to: bring together some aspects of the school curriculum; put into perspective our task as responsible agents, each one in their own role, for mathematics learning in the country, and appraise the results that are being obtained; describe the scenario of the previous educational reform, its causes and philosophy, its reality in Chile; outline inferences to be made and precautions to be taken; explain the new reform; and bring it all together in one long-winded look.

KEYWORDS:
Reform of school mathematics, Unifying ideas in mathematics, International educational measurements, Chilean mathematics education.

Recibido: 28 de febrero de 2022 , Aceptado: 10 de marzo de 2022

1. Introducción

1.1 Las lecciones de la historia

“Que los hombres no aprenden mucho de las lecciones de la historia es la más importante de todas las lecciones que enseña la historia”, dijo Aldous Huxley en 1956 (p. 47)[1]. Probablemente nos llame primero la atención la estructura de esa frase; aquí nos proponemos sugerir, de más de una manera, la relevancia práctica de esa suerte de *dictum* para nuestro caso, el de la educación matemática en nuestro país.

1.1.1 Incompetencia del autor

Ahora bien, aquel propósito nos pone en la inconfortable posición de salirnos de nuestro supuesto campo de especialidad y, con ello, de no poder dar evidencia clara de cada afirmación e, incluso, de develar cierta candidez. Nos parece, sin embargo, que nuestra incompetencia para profundizar en determinadas materias no impide que las señalemos como relevantes para una consideración comunitaria, sobre todo si uno de los fenómenos sobre los cuales queremos llamar la atención es, justamente, el que no haya suficiente discusión sobre ellas. En ausencia de un debate en el que participen los diversos actores, nos vemos obligados a referirnos a algunas categorías y enunciados a manera de análisis provisional y *a priori*, con la esperanza de que, en un escenario más saludable y conocedor, ellas se discutan, se amplíen y precisen a la vez, y se jerarquicen. Procederemos, entonces de una manera dispar: sugiriendo, a veces, indicios de una circunstancia actual difícil de expresar desde una perspectiva disciplinaria; aportando, en otros momentos, evidencias claras y eventualmente contundentes; y acercándonos, como nos sea posible, a aquel nuevo escenario. El resultado es, naturalmente, un ensayo desparejo y eventualmente rústico[2].

1.1.2 La necesidad de un debate

Nuestra disculpa es que queremos invitar a considerar algunos elementos de variada índole que –dependiendo de la especialización del lector– están a la vista, y otros que no lo están tanto, y que, en conjunto, no parecen haber sido tomados suficientemente en cuenta, al menos, no para conjugar las diversas dimensiones de la situación que enfrentamos. Ellos constituyen un fenómeno cultural de una magnitud descomunal, la cual, a su vez, comporta una revisión más bien profunda de varias categorías que ocupamos en nuestra tarea común –incluida, eventualmente, la de *cognición*–. Todo esto debería alentarnos a participar de un debate, amplio y de cierta profundidad y permanencia, a partir del cual ubicar, en un rango específico, un posible vector hacia el cual dirigir los esfuerzos de la comunidad en educación matemática. La idea de un tal debate puede parecer excesivamente ingenua, pero procuraremos mostrar su necesidad. En todo caso, y según la información disponible, parte de la cual expondremos, no parece viable persistir, con la velocidad acostumbrada, tratando de llenar hasta cierto punto la brecha que hoy existe entre nuestro desempeño y el de algunos países más avanzados en el tema, los cuales, además, aceleran sus procesos.

1.1.3 Historia y significado

Seguramente, la historia comprende el presente. A lo largo del texto, hemos optado por ofrecer ejemplos pretéritos para llamar la atención sobre eventuales sucesos presentes. Recordando a Peirce y su máxima acerca de lo que entraña concebir un objeto[3], estaremos alerta a las consecuencias, a menudo prácticas (y, ocasionalmente, dolorosas) de aquellas ilustraciones.

1.2 La tarea de enseñar matemáticas

1.2.1 El currículo

La evolución del currículo escolar comprende, como sabemos, aspectos históricos, educacionales en sentido amplio, políticos –*lato sensu*–, y, en nuestro caso, matemáticos.

En el mejor de los escenarios, los diferentes actores examinan el asunto permanentemente, se reúnen a menudo, debaten los diversos aspectos involucrados, consultan a un universo amplio de personas e instituciones concernidas, toman acuerdos generales, y establecen una norma, eventualmente legal (Bases Curriculares, *e. g.*) que progresivamente se va convirtiendo en entes técnicos: programas de estudio, textos escolares, acuerdos en un establecimiento educacional, actividades en el aula, etc.

[1] “That men do not learn very much from the lessons of history is the most important of all the lessons of history”.
[2] En particular, debemos agregar una disculpa por incluir en la discusión elementos muy conocidos por la SOCHIEM, y que se deben al carácter de la exposición. Añadimos una explicación por no usar lo que se suele llamar el lenguaje inclusivo, lo cual se debe a consideraciones gramaticales y no filosóficas.
[3] “Consider what effects, which might conceivably have practical bearings, we conceive the object of our conception to have. Then, our conception of these effects is the whole of our conception of the object” (Peirce, 1878, p. 293).

Tal racionalidad es algo muy deseable, e incluye estudio previo, un saludable respeto por opiniones ajenas informadas, y una, en términos generales, deseable "continuidad". Sin embargo, y a pesar de los esfuerzos de instituciones tales como la Unidad de Curriculum y Evaluación (UCE) del Ministerio de Educación (MINEDUC), ello no parece garantido; en su lugar, en el país, al menos en lo que respecta a la opinión pública, tenemos una curva que asemeja la conducción eléctrica de un corazón que presenta unos pocos latidos estacionales por año, con largos intervalos de relajación ventricular, y despertares un tanto abruptos que se desvanecen sin dejar rastros perdurables –la siguiente pulsación comenzará nuevamente *ab initio*–. Por otra parte, la historia se ha encargado de mostrar de manera contundente –y, a veces, estrepitosa– que, en esta materia, la sola razonabilidad no es suficiente para la toma de decisiones: es indispensable cierto criterio experimental –son necesarios la investigación y los proyectos de desarrollo–.

Afortunadamente para el país (y, a pesar de las consabidas discontinuidades cuadrienales), hay un camino de trabajo trazado, y personas concernidas competentes que resguardan un tanto de avatares inesperados.

1.2.2 La dificultad de entenderse

Ahora bien, seguramente el debate curricular tiene un carácter multidisciplinario; sin embargo, para que sea efectivo, debería, desde luego, haber puntos de vista, si no compartidos, al menos afines; algún respeto por una especialidad que no es la propia, voluntad de salir del propio condado. Se puede observar, sin embargo, que esto no está asegurado. Una razón para ello parece provenir de las epistemologías diversas de los actores involucrados[4]. En el caso que nos ocupa, está, por de pronto, la manera de entender el rigor que manifiestan educadores[5] y matemáticos, la cual se expresa, en particular, en un uso del lenguaje bastante dispar –ostensible, desde ya, en las longitudes diferentes de los diversos planteamientos– y que parece traducirse en que discursos que en alguna medida debieran converger, en la práctica se alejen de manera manifiesta. Por lo demás, es fácil percibir que el énfasis variable que se da a la evidencia empírica, y a la convicción que se tiene ya sea respecto de la opinión de pensadores de renombre o bien del conocimiento interno de la disciplina, puede llevar a impases insuperables.

1.2.3 Un posible dinoterio

Lo anterior es solo una polaridad entre otras que surgen debido a la multiplicidad de campos disciplinarios que pueden intervenir en el asunto. Viene al caso –justamente, por su carácter epistemológico– el viejo cuento, persa o indostano, de los ciegos y el elefante. A una pequeña aldea llega la noticia de que en un pueblo cercano hay un elefante. Los aldeanos no conocen ese animal, y envían una delegación al pueblo, casualmente compuesta solo de personas ciegas. Ya ante la bestia, los delegados se acercan como pueden y, de vuelta en la aldea, sus reportes difieren: quien tocó un colmillo dice que el elefante es una lanza; quien la oreja, que es un abanico; una pata se reporta como una columna, el cuerpo como una muralla, la cola como una soga. Cada cual está seguro de lo que dice, y de que los otros están equivocados. El cuento no dice cómo la aldea se puso de acuerdo –si lo hizo– pero sí podemos anticipar que, en general, en nuestro caso, se echa de menos una conexión de la mayor importancia entre las diversas dimensiones de la educación matemática (por lo demás, explícita en importantes estudios, que reseñaremos), y que ello impide resolver un error de proporciones que se traduce en pérdida de oportunidades para el desarrollo del país, y en obstáculos, a veces insuperables, para las personas, especialmente las más vulnerables.

1.2.4 Categorías en evolución

El caso de la educación, y el de la educación matemática en particular, es uno que enfrenta considerables dificultades, que se presta a confusiones, y que experimenta cambios a menudo.

Por de pronto, el interés en el tema comenzó con la preocupación por la enseñanza, luego se focalizó en los aprendizajes, más adelante, en la enseñanza-aprendizaje. En algún momento, el centro eran los contenidos, luego los objetivos, más adelante las competencias, ahora las habilidades... Como sabemos, tal variabilidad impacta en la evaluación de los aprendizajes, pero, más profundamente, en aquello que se supone que debe hacer, por ejemplo, un profesor en el aula. Todo esto muestra, seguramente, una evolución positiva del discurso; sin embargo, manifiesta también la irrupción no solo de filosofías diversas sobre el tema, sino también, ocasionalmente, de categorías de otras disciplinas o actividades que gravitan, para bien o para mal.

[4] (Siguiendo la atinada sugerencia de Jerome K. Jerome, 1997, *On being idle*, párr. 16). Digamos que son dos áreas de especialidad, A y B. Incide, también, lo que los especialistas de A consideran que los de B piensan sobre las convicciones de A, y viceversa.
[5] Entendidos aquí como quienes se dedican a la educación en general.

Por otra parte, no podemos decir que toda la comunidad transite a una única velocidad por esas concepciones, ni que entienda lo mismo por aquellos términos (competencias, e. g.), ni, aun, que vea ese tránsito de unas a otras como necesario. Incluso, en presencia de acuerdos explícitos en el delineado del escenario, su traducción a la evaluación de los aprendizajes puede variar considerablemente –¿importa más alcanzar un objetivo o que los estudiantes desarrollen su pensamiento?–.

De suyo, el tema es, en una perspectiva académica, delicado. Pero no podemos olvidar que pequeñas variaciones en las decisiones pueden afectar de manera diversa, por una parte, a las instituciones educacionales y, por otra, a los profesores y, en fin, a la población estudiantil. Ello puede llevar, según reseñaremos posteriormente, a apartarse tal vez en forma grave de los fines que se supone que se persiguen.

1.2.5 El aula

1.2.5.1 Repercusión en el aula

Como sabemos, lo anterior tiene una repercusión –dispar– en el aula: hay quienes priorizan el dominio de las destrezas operatorias, o de la retención de contenidos, o bien de la actividad matemática. Como también se sabe, usuarios y apoderados insistirán tal vez en que haya clases ostensiblemente ordenadas y entretenidas, cuadernos bien organizados, un cierto histrionismo del profesor, etcétera. La clara insistencia de la asignatura escolar de Matemática en las habilidades de Representar, Comunicar y argumentar, Resolver problemas y Modelar, por ejemplo, debería aclarar el panorama, pero no siempre parece evidente que se trata de habilidades que se desarrollan con contenidos matemáticos.

Tal situación es delicada para los estudiantes, dolorosa para los profesores[6], y se la debe enfrentar en medio de largas, demandantes y un tanto inciertas jornadas. Hoy, el deseo de hacer un trabajo apoyador, profesional, fructífero, de cierta compleción, se estrella con realidades antes inusuales (falta de equipamiento tecnológico y/o de conectividad de calidad, aislamiento de los niños, directrices que varían a menudo…). Los establecimientos, a su vez, han debido resolver, sobre la marcha, otros dilemas: atender a sus alumnos es su misión, pero también deben responder, por lo general, a determinados indicadores, y un largo etcétera –en medio del cual ha irrumpido con mayor fuerza la tecnología digital–. Obviamente, no estamos hablando de algo desconocido; solo traemos a colación elementos relevantes para la discusión.

1.2.5.2 El "modo aula"

Sería deseable que, ante esta situación, el país se moviera, si no como un todo, con alguna homogeneidad. Sin embargo, es fácil percibir que el conjunto de las acciones de los estudiantes, las prácticas de aula, y las medidas de los establecimientos, manifiestan también algunos escollos no superados.

El contraste perceptible que hay entre algunos usos habituales y lo que sustenta la investigación en la materia parece ahora más notorio. Expresiones mnemotécnicas[7] no solo son cuestionables, sino que obstaculizan mirar el tema del que tratan, desaprovechan oportunidades de aprendizaje, es decir, son perfectamente inútiles –salvo para resolver un ejercicio de prueba, pongamos por caso–.

Hay en esto algo que se podría llamar el "modo aula", o "modo sala de clase": una expresión, diríamos, del *contrato didáctico* de Guy Brousseau (Brousseau y Warfield, 2014). Supongamos que un profesor dice, en un curso de niños pequeños: "Un pastor cuida 14 ovejas y 11 cabras. ¿Qué edad tiene?"[8]. Un gran porcentaje de los estudiantes, según se puede comprobar, responderá que la edad del pastor es 25 años: 14-11 no puede ser, tampoco 14×11, y aún menos 14:11. En todo caso, se dicen aquellos, el profesor seguramente quiere que hagamos algo con esos números que nos dio. No sorprendentemente, niños de similar edad, casualmente reunidos en la calle, enfrentados a la misma pregunta, manifiestan que la pregunta es tonta, y tienden a reírse de quien la hace (D'Amore, 1993).

Lo anterior puede parecer simpático, pero es tal vez más triste de lo que se puede percibir en una primera mirada. Un ejemplo de ello es una experiencia que probablemente el lector haya experimentado fuera de horas de trabajo: viene una personita (hija, sobrino, etc.) y le pide ayuda sobre una tarea de matemáticas. La pregunta provoca en usted una agradable expectativa (¡qué buena oportunidad!) que decae exponencialmente (como se suele decir) ante

[6] (Según el testimonio espontáneo de más de medio centenar de ellos).
[7] *"El enemigo de…", "todas sin tacos…", "un día vi…"*etc., que ponen una venda en los ojos de un estudiante que pudo, en ese momento, haber aprendido algo (una aplicación del teorema fundamental del cálculo, e. g.).
[8] Al ejemplo original, de Baruk (1985), comprobado en muchas partes del mundo, se le suele llamar "la edad del capitán".

la primera reacción de la personita aquella ante el comienzo de la explicación de usted: "¡No! ¡El profesor me dijo a-sí!". Un tanto lejano –y, de hecho, contrario–, debemos reconocer, a los propósitos de desarrollo del pensamiento crítico, independiente, que enuncia el currículo; ¿podría afirmarse que se está favoreciendo el desenvolvimiento de la creatividad de aquella personita?

1.2.5.3 La pandemia

A todos nos consta que la pandemia, si bien ha mostrado, como veremos, elementos de innovación encomiables, ha agudizado notoriamente las discrepancias que hemos venido señalando y otras a ese tenor.

Por ejemplo, un estudio de Ávalos y Matus (2010) mostraba que una de las visiones principales de los profesores respecto de las matemáticas es que "suponen el recuerdo y la aplicación de definiciones, fórmulas, hechos y procedimientos matemáticos", y que "para resolver una tarea en Matemáticas hay que conocer el procedimiento correcto, de otra manera uno se pierde" (p. 113). Si es eso lo que se ha estado enseñando en pandemia, seguramente no se está, realmente, favoreciendo el desarrollo de habilidades, independientemente de la focalización que la emergencia de salud ha obligado a hacer en el currículo. Por cierto, la presencia cada vez mayor de tecnología digital aumenta la incongruencia de tal visión.

1.2.6 Pedagogía y matemáticas

1.2.6.1 El dolor de enseñar

Son muchos los profesores que se levantan cada mañana a acompañar a sus estudiantes en su desarrollo. Acerca de cuál es su tarea, sin embargo, parece haber opiniones antitéticas, que supuestamente debe armonizar. En su informe sobre nuestro sistema educacional de 2004, la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos (OECD) llamó expresamente la atención sobre la necesidad de que las instituciones formadoras provean de elementos para que sus estudiantes puedan hacer las síntesis correspondientes. Agregó que la formación inicial no hacía converger los elementos pedagógicos generales y los de enseñanza de las disciplinas, y graficó la situación citando a una alumna entrevistada, quien declaró: "Aquí he aprendido a enseñar, y he aprendido mucho sobre el Castellano; pero no he aprendido a enseñar Castellano" (2004, p. 142).

1.2.6.2 Conocer el contenido

Parece prudente agregar aquí otra consideración. Supongamos que un papá o una mamá trata de ayudar a la tarea de matemáticas de un hijo. Mejor motivación para que un niño aprenda es difícil encontrar. Sin embargo, si él/ella no "sabe" matemáticas, no lo logrará. Afirmaciones tales como "ve a tu cuaderno, busca los conocimientos que necesitas, y aplícalos a este caso" no serán de mucha ayuda, y, a quien no puede resolver la tarea, estímulos al estilo de "tú puedes" tal vez solo logren que se sienta un poco peor. La "motivación" de que "algún día te servirá para algo", además de aludir a un futuro demasiado remoto, es una promesa engañosa: cuando llegue aquel día, la materia archivada habrá desaparecido de la memoria, o estará borrosa, o ya no se sabrá para qué servía –en caso de que alguna vez se supiera–.

1.2.6.3 La dificultad de enseñar

Todo esto nos pone de cara al problema central, y no puramente teórico, de qué es enseñar. "Transmitir conocimiento", "enseñanza-aprendizaje" y otras expresiones de uso común parecen insuficientes si se acepta la evidencia ostensible de que el conocimiento de una generación no alcanza para la siguiente. "Facilitar el conocimiento" llama de inmediato la atención acerca de cuál es ese conocimiento; además, podría esconder la imprudente sugerencia de evadir cuestiones dificultosas pero indispensables.

Ciertamente, esto pone en duda, para el profesor, tanto el profesionalismo de su desempeño como las iniciativas que lleva a cabo para aclarar la cuestión; peor aún, podría ocurrir que sus empeños avanzaran en una dirección inversa a la que se necesita (según acabamos de sugerir). Como si ello no bastara, las demandas sobre el profesor –profesionales y sociales– van siempre en aumento y provienen de diversas direcciones (es difícil encontrar otra profesión sobre la cual, al parecer, todos los usuarios manifiesten tal cantidad de consejos y exigencias tan determinadas como inflexibles). No contribuyen, realmente, a su solaz la sensación de aislamiento, de parvedad de sus empeños, ni la inestabilidad laboral de fin de año[9].

1.2.7 En resguardo de la matemática y la empleabilidad

Es incuestionable que la educación debe ocuparse de que la personas participen mejor de los bienes

[9] Según nuestra experiencia, tampoco ayudan declaraciones estrepitosas al estilo de "el currículo embrutece".

y de la marcha de la nación; ello es, de suyo, bueno para el país y su desarrollo. Aun si el propósito de la educación fuera solamente que las personas se cultiven, como individuos y como ciudadanos –informados, responsables, propositivos–, sería impensable que ello fuera ajeno a obtener un mínimo de cultura matemática.

Por supuesto, la educación debe ocuparse, simultáneamente, de que las personas puedan desarrollar actividades económicas, en particular, obtener un empleo, y es inquietante comprobar que no todos los actores concernidos advierten esta necesidad. Como es obvio, la matemática tiene también una alta relevancia en este punto.

Debemos, entonces, preguntarnos por qué parece que, cuando se discuten temas educacionales, la matemática no esté representada, o, peor aún, por qué una y otra vez se pretende decidir sobre su currículo sin recurrir a las personas que se especializan en ella[10]. Además, es necesario estar atentos ante perspectivas que no tomen suficientemente en cuenta que un gran porcentaje de los estudiantes, inmediatamente tras egresar de la enseñanza media, asumirán responsabilidades laborales.

2. El derecho a aprender matemática

2.1 Un derecho inalienable

Aprender Matemáticas es un derecho, y se lo puede considerar parte de lo consignado en la Declaración Universal de Derechos Humanos: "Toda persona tiene derecho a la educación" (Organización de las Naciones Unidas [ONU], 1948, Art. 26.1).

Ese derecho está reconocido en nuestro país, e incorporado reiteradamente a la normativa legal –la más reciente, en su Ley General de Educación, N°. 20370 de 2009–. Adicionalmente, en 1999, tras la Conferencia Mundial "Ciencia para el siglo XXI", la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO), en declaración conjunta con el International Science Council (ICSU), que agrupa a las sociedades científicas del mundo, declaran:

> El acceso al saber científico con fines pacíficos desde una edad muy temprana forma parte del derecho a la educación que tienen todos los hombres y mujeres... la enseñanza de la ciencia es fundamental para la plena realización del ser humano, para crear una capacidad científica endógena y para contar con ciudadanos activos e informados. (p. 10)

Y agregan que aprender ciencias es importante para reducir las disparidades y para la paz, y que "es un requisito previo fundamental de la democracia y el desarrollo sostenible" (p. 34).

No parece fácil diferir de esas declaraciones acerca del derecho a recibir una educación adecuada, en particular, en matemáticas.

2.2 Defender ese derecho

En lo que sigue, asumiremos que hay un derecho a aprender ciencia, en particular, matemáticas. Parece inevitable, entonces, concluir que no ofrecer una buena enseñanza en ciencia es, entonces, privar de un derecho, carencia que afectaría al país en su conjunto y a sus personas individualmente, y que debemos esforzarnos con tesón en resguardar ese derecho. A nuestro entender, ello comporta no contemporizar cuando de algún modo se obstruya su satisfacción, en resguardo de niños y adultos que, consecuentemente, perderían oportunidades[11]. Prevalencia inapropiada de intereses sectoriales, declaraciones presuntamente iluminadas y eventualmente irresponsables, importación irreflexiva de lo que se hace en otras latitudes –sobre todo si las coordenadas, espaciales o temporales, no están bien elegidas– pueden perjudicar seriamente a la satisfacción del derecho a educarse.

2.3 Un derecho que evoluciona

Por cierto, el derecho a recibir una buena educación en matemática no existe solo a partir de las declaraciones a las que hemos aludido; sin embargo, su forma ha ido cambiando.

Hace un siglo, se consideraba que la necesidad de formación para desempeñarse como ciudadano se cubría básicamente con aprender lectura, escritura, y las cuatro operaciones. El logro de tales habilidades para la gran mayoría de las personas no es en absoluto desdeñable. Por ejemplo, en 1100 d. C., en Europa (cuando estaban llegando, esta vez para quedarse, los números indo-arábigos), sabía leer y escribir solo uno de cada 50 hombres, y casi ninguna mujer (Roser y Ortiz-Ospina, 2016); entonces esas habilidades probablemente se consideraban muy difíciles de

[11] En nuestro caso, comporta también sentirnos ocasionalmente obligados a hablar sin circunloquios.
[10] Por cierto, no nos estamos refiriendo a las autoridades educacionales del país.

adquirir, y reservadas solo para algunos, pero hoy todos las desarrollamos. El dato es interesante, porque tal vez estemos enfrentados a una situación análoga.

Comenzando el siglo XXI, la cobertura en educación se ha vuelto imposible. Saber, se nos dice, ya no es recordar y repetir información, sino ser capaz de encontrarla y utilizarla con provecho. Podemos agregar que una educación concebida como recuerdo y repetición es un error ya antiguo, de graves consecuencias para el desarrollo y la libertad de los individuos. Además, y como bien sabemos, en matemáticas, aun encontrada la información, su lectura puede presentar dificultades considerables –no es homologable a leer un periódico, pongamos por caso–.

Como sea, la educación debe proponerse formar aprendices autosuficientes y para toda la vida. Quienes estudian el tema, quienes toman decisiones sobre él en el país, y muchas otras personas concernidas, debemos, además, recordar que no avanzar en esto, o hacerlo en forma muy lenta, comporta retroceder comparativamente.

Lo anterior no debe ser solo tema de reflexión. En octubre de 2020, el World Economic Forum señaló que, según sus estimaciones, y como consecuencia del avance tecnológico, al cabo de un lustro, 85 millones de trabajos se automatizarán, y que, simultáneamente, se creará un centenar de millones de nuevos trabajos. ¿Podemos proponernos educar a personas ignorando de hecho que pueden volverse laboralmente irrelevantes?

2.4 Sobre la satisfacción de aquel derecho

2.4.1 La prueba PISA

La prueba PISA (Programme for International Student Assessment), que administra la OECD, mide la "competencia matemática" (*mathematical literacy*), entendida como:

> La capacidad de un individuo para razonar matemáticamente y formular, emplear e interpretar la matemática para resolver problemas en una variedad de contextos del mundo real. Incluye conceptos, procedimientos, hechos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a las personas a conocer el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo y a tomar las decisiones y juicios bien fundamentados que necesitan los ciudadanos del siglo XXI. (OECD, 2019a, p. 75)

Los resultados, por tanto, no se circunscriben a que los alumnos sepan o no sacar algunas cuentas, ni aun a capacidades de mayor relevancia matemática, sino que nos hablan también de la presencia o ausencia de varios elementos centrales del currículo en su integridad y, en particular, de las habilidades que deberían desarrollarse en los cursos de la asignatura.

La prueba ubica a los estudiantes en seis niveles, que se pueden ver en su página web (OECD, 2019a). En el Nivel 6 están los estudiantes de alto rendimiento: pueden formular y comunicar con precisión, conceptualizar, generalizar investigar, modelar, resolver problemas complejos, relacionar fuentes de información, aplicar su saber en situaciones novedosas; tienen pensamiento y razonamiento matemático avanzados. En el Nivel 1 se ubican los estudiantes con un mínimo de competencia matemática: pueden responder a preguntas explícitas, en contextos familiares, con toda la información a la vista, desarrollar rutinas ante instrucciones directas, realizar acciones obvias y seguirlas inmediatamente tras un estímulo. Bajo el Nivel 1 quedan los estudiantes que no son capaces de realizar las tareas de matemáticas más elementales que pide PISA.

Es inevitable pensar que, si a un estudiante "le va mal" en la prueba de Matemática en PISA, no solo le faltan competencias en matemáticas, sino que experimenta dificultades en otras asignaturas y, en general, en su estudio.

2.4.2 Resultados de la prueba

Desde 2003, año en que participó en PISA por primera vez, Chile ha tenido un desempeño estable, con un leve crecimiento inicial, pero insatisfactorio.

En la prueba, poco más de la mitad (51,9%) de los estudiantes chilenos está por debajo del Nivel 2 (OECD, 2019b). La razón aproximada de niños chilenos que alcanzan los dos niveles más altos (reunidos) en la prueba es similar a la proporción de niños bajo la escala en los países con mejores resultados (del orden de 15:1000). Si buscamos la razón aproximada de estudiantes por debajo del Nivel 2 en la prueba en diferentes grupos de países que participan en la muestra, encontramos que: en América Latina, es 2:3; en los países de la OECD, es 1:4; en países con un PIB similar al de Chile, 1:3. Existe una brecha de dos años en la escolaridad matemática de Chile con el promedio de la OECD, y de tres años con los países de más alto desempeño (OECD, 2017).

A lo anterior hay que sumar, en Chile, los resultados significativamente inferiores de los estudiantes con menos recursos económicos (OECD, 2017), de las mujeres en comparación con los hombres (MINEDUC, 2019) y de los estudiantes de educación técnico-profesional en comparación con los de educación científico-humanista (Agencia de Calidad de la Educación, 2019), y también que el país es uno de los menos inclusivos de la OECD (OECD, 2017).

2.5 Una tarea gigantesca

La prueba no está libre de eventuales críticas, y, ciertamente, no es un oráculo. Sin embargo, dispone de equipos de especialistas connotados, de procedencia diversa, e instrumentos estadísticos confiables. Por lo demás, sus resultados, en el caso chileno, son consistentes con los obtenidos en el Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación de la UNESCO (LLECE), y también con Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) (OECD, 2017).

Por otra parte, es obvio que la política educacional del país no debe ordenarse a mejorar los logros en una determinada prueba –incluso, externa–. Sin embargo, la idea de que no se pueda tapar el sol con un dedo es un error de geometría. Decir que la prueba PISA no puede medir todo, o que puede tener algún sesgo[12], son, principalmente, tautologías. Por lo demás, en ningún caso se puede aceptar este tipo de críticas como excusa para no enmendar lo que haya que remediar.

Esa prueba muestra que aquel derecho a aprender matemáticas no está siendo satisfecho en nuestro país, y que se tiene ante sí una tarea gigantesca –*nuestra tarea*–, la cual seguramente requiere de un esfuerzo concertado, que se obstaculiza si acaso se niega lo que salta a la cara. Por lo demás, sería un afrentoso desatino pensar que esta es una tarea que no está relacionada con el crecimiento integral de los habitantes del país.

3. Ideas unificadoras en matemáticas

3.1 Matemática hacia 1870

3.1.1 Organización de la Matemática

Hace un siglo y medio, la Matemática estaba constituida por 12 grandes áreas, entre las cuales se contaban Aritmética (Teoría de números, Análisis combinatorio, Cálculo de probabilidades, Interpolación, etc.), Álgebra (Cálculo algebraico, Matrices y determinantes, Teoría de las ecuaciones, Álgebra de los polinomios, Álgebra superior, etc.), Geometría (Geometría euclidiana, Geometría analítica, Geometría descriptiva, Geometría proyectiva, Geometría no-euclidiana, Análisis vectorial, Geometría diferencial, etc.), Análisis (Cálculo, Análisis numérico, Teoría de funciones, Ecuaciones diferenciales, Cálculo de variaciones, Análisis harmónico, Análisis tensorial, etc.). En total, había 38 subcategorías, que parcelaban la disciplina (Davis y Hersh, 1998).

Libros como los de Henry Sinclair Hall y Samuel Ratcliffe Knight ("Hall and Knight"), el primero de los cuales, *Algebra*, apareció en 1881, seguían la estructura que hemos reseñado, y serían el modelo de otros textos en matemáticas de uso en el s. XX, tanto para enseñanza media como superior.

3.1.2 Las grandes ideas unificadoras

Sin embargo, entre 1872 y 1873 aparecen dos grandes ideas unificadoras de la Matemática: en la Universidad de Halle, Georg Cantor (1873) comienza sus escritos sobre la estructura elemental subyacente a todos los estudios de la disciplina y, por su parte, Felix Klein (1872) presenta, en la Universidad de Erlangen, su justamente famoso "Programa", que reúne en una visión común las geometrías absoluta (al estilo de Euclides) y cartesiana, divorciadas desde la aparición de esta última en 1637 (Dorier, 2000), y de paso incorpora las geometrías no-euclidianas. Los trabajos de ambos tendrían una trascendencia permanente en la manera de pensar la matemática. Adicionalmente, compartieron la necesidad de formar un organismo internacional para difundir la matemática y desarrollar cooperación internacional tanto en la disciplina como en su enseñanza –lo que posteriormente se convertiría en el International Congress of Mathematicians (ICM).

En 1890, los ya mencionados, con David Hilbert, quien ya comenzaba su programa de formalización (Hilbert, 1899, 1900, 1905), y otros matemáticos notables, fundaron la Sociedad Matemática de Alemania. Más adelante, Klein trajo a Göttingen a Hilbert (Rowe, 1989). Cantor, Klein y Hilbert están seguramente entre los impulsores más distinguidos de una tendencia a la unificación de la disciplina en ese momento, y sus trabajos cambiaron en forma substantiva la arquitectura y las concepciones sobre las cuales se venía trabajando en matemáticas.

En 1893, en Chicago, en el International Mathematical Congress, Klein dio la conferencia inaugural, "The

[12] Hay permanentes, serios, explícitos y bien mensurados esfuerzos para evitarlo.

Present State of Mathematics" y otras varias, durante seis días (International Mathematical Union [IMU], 1896). En aquella expresa que la especialización en la Matemática ha producido muchos avances, pero que con ello la disciplina se ha ido apartando de su forma y ámbito originales, lo cual "amenaza con sacrificar su unidad anterior y escindirla en diversas ramas". Añade: que plantear la educación de la matemática de la manera tradicional, sin usar las perspectivas recientes, sería de lamentar; que, con concepciones generales tales como las de grupo y función, se puede reunir resultados diversos; y que, incluso, la geometría y la teoría de números son aspectos diferentes de una misma teoría. Tal tendencia, anuncia, se extenderá inevitablemente a las aplicaciones de la matemática, las cuales, a su vez, la reforzarán.

Klein jugó un papel decisivo en la formulación de los planes de estudios escolares en Alemania, en 1905; allí recomendó la introducción de rudimentos del cálculo diferencial e integral (que Chile acaba de incluir en el plan diferenciado de 3° y 4° medio), y hacer del concepto de función una noción central al estudio. Además, publicó un par de libros para la formación de profesores, en 1904 (Klein, 2006). En ellos adelanta propuestas que hoy parecen muy recientes, y que siguen siendo iluminadoras: que no es necesario que un profesor de colegio sepa matemáticas avanzadas, sino lo que denomina, ya desde el título de su libro, "matemática elemental desde un punto de vista superior" –una noción todavía en uso, y con provecho–; que la idea de función es capital; que "siempre debería presentarse la Matemática enlazada con todo aquello que al hombre pueda interesar y con lo que ha de ejercitar en su vida" (p. 5); que no debía egresar nadie de las instituciones de formación inicial docente que no hubiera usado una calculadora.

3.2 El caso de Chile

En 1865 se realizó el primer censo de la nación (Gobierno de Chile, 1866). Se registró una población total de casi un décimo de la actual. El 83,3% de ella estaba constituida por analfabetos (hombres, 79,2%; mujeres, 86,2%). Dos años más tarde, se promulgó la ley que hace obligatoria la educación científica en la escuela primaria.

3.2.1 La influencia alemana

Desde tiempos de la colonia, en Chile se consideraba la matemática solo como una colección de hechos y reglas de utilidad para el comercio, la industria, etc. En 1842, cuando se fundó la Universidad de Chile, se pensó en modificar esa situación, pero, según cuenta el educador e historiador Diego Barros Arana en 1893, se estimó que no había profesores con preparación adecuada –en ese tiempo, eran, en total, tres profesores, y una docena de estudiantes de tercero en adelante (Barros Arana, 1993)–.

Andando el tiempo, el presidente chileno José Manuel Balmaceda (1900), convencido como estaba del importante rol de la educación en el desarrollo cultural y material del país ya desde su época de parlamentario[13], impulsó una reforma educacional. Fundó el Instituto Pedagógico en 1889[14], y trató de conseguir el apoyo de profesores de trayectoria en el exterior. Ese año llegaron los doctores Reinhold von Lilienthal, discípulo de Karl Weierstrass, y Ricardo Poenisch, profesor de Matemáticas, Física y Cosmografía, quien siguió cursos que dictaba Felix Klein. Von Lilienthal volvería pronto a su país y sería reemplazado por Augusto Tafelmacher, doctorado en Göttingen (Gutiérrez y Gutiérrez, 2014).

La reforma de Balmaceda procuraba que los estudiantes siguieran estudios superiores y pudieran contribuir de mejor manera al país, para lo cual los expertos propusieron una enseñanza de la matemática como disciplina autónoma y cultural, un sistema de conocimientos ligados entre sí, válidos y útiles en todas las condiciones de la vida. El programa de secundaria había sido aprobado en enero de 1889: aritmética, álgebra (incluidos logaritmos, progresiones y anualidades), geometría plana y del espacio, trigonometría plana, cosmografía y contabilidad.

La revolución de 1891 aplazó la reforma hasta el año siguiente. Poenisch reformuló los planes; él y Tafelmacher querían promover una rigurosa disciplina intelectual y conocimientos elementales, pero útiles para la vida, y consideraban además que, como preparación para los estudios superiores, se requería de una cultura amplia; los planes definitivos apuntaron a la formación integral del alumno, desarrollando en él sus facultades intelectuales, artísticas, físicas, etc. (Gutiérrez y Gutiérrez, 2014).

[13] Probablemente es el único miembro de los poderes del Estado que dedicó una intervención suya en el foro a una demostración de carácter matemático (Barros Arana, 1993, pp. 263-264: el sistema no garantiza el triunfo de las mayorías).
[14] Véase Letelier (1940).

En 1892, Poenisch, desde el Instituto Nacional, puso en marcha la reforma. Por su parte, Tafelmacher (1893a, siguiendo a Reidt, 1895), en el Instituto Pedagógico, comenzó a enseñar los métodos "docente y heurístico" (p. 36), "sintético y analítico" (p. 40), y "euclidiano (dogmático) y jenético [sic]" (p. 46); con ello, procuraba articular las exposiciones más tradicionales con la activa participación de los estudiantes, de manera que pudieran acercarse en forma natural a los temas, cooperar en las demostraciones y aprendieran a hacerlas; incluso, que, una vez terminada una discusión, pudieran concluir cuál era el teorema que habían demostrado. En conjunto, Poenisch y Tafelmacher escribieron la serie de 6 volúmenes *Los Elementos de Matemáticas*, que aparecieron entre 1896 y 1904, se reeditaron varias veces –uno de ellos hasta 1931–, y fueron usados en el país hasta la década de los 40 (el de geometría, hasta los años 60).

3.2.2 Errores garrafales

3.2.2.1 Investigación

Por supuesto, a aquellos académicos les interesaba la investigación. Tafelmacher, por ejemplo, publicó tres monografías con aproximaciones suyas a la conjetura de Fermat en los casos n primo, distinto de 2 (1892a, 1892b), n=4 (1893b) y n=6 (1897). Gutiérrez y Gutiérrez (2014) recogen de Meruane (1989), la información de que celos profesionales de los colegas lograron que los contratos de trabajo de los profesores alemanes –de 2 a 5 años de duración, prorrogables– tuvieran una cláusula de "prescindencia taxativa de la investigación y de la creación de escuelas científicas" (p. 187).

Esta muy lamentable situación mejoró con la llegada, en 1929, de Carlos Grandjot, formado también en Göttingen, discípulo, colaborador y coautor de Edmund Landau, políglota, hombre de múltiples talentos, decidido impulsor de la investigación, fundador de la primera Sociedad Matemática de Chile, en 1953, y pionero de la informática en el país (Gutiérrez y Gutiérrez, 2014). Publicó una monografía de álgebra abstracta (conjuntos, anillos, cuerpos) hacia 1940 (el tema no aparecería en las universidades chilenas sino hasta bien entrada la década de los 60)[15].

3.2.2.2 El currículo

Otra situación, igualmente afrentosa, fue protagonizada por el abogado, agricultor e historiador Francisco Encina, quien se empeñó en reducir los estudios de matemáticas, dejando algunas materias para quienes quisieran proseguir ingenierías, y él y algunos asociados lo consiguieron en 1912. Se encargó a Poenisch redactar los nuevos planes, y, además, nuevos textos, ahora en colaboración con Francisco Pröschle –de tercera generación en el país (Pilleux, 2018)– entre 1915 y 1917. Estos textos, según Rojas y Oteiza (2014) definieron operacionalmente el currículo de entonces (el *Álgebra* de Pröschle aún está a la venta).

3.2.2.3 Comentario

Se debe consignar que los libros que hemos mencionado no reflejan las preocupaciones matemáticas que ya empezaban a surgir en Alemania a fines del siglo XIX, y siguieron el esquema tradicional de materias; por ejemplo, en álgebra no se considera debidamente las funciones. Adicionalmente, como ha mostrado Soto-Andrade (2015), tampoco resonaron con otras aproximaciones didácticas en la Alemania de ese tiempo.

De cualquier manera, es difícil no deplorar que una persona, desde fuera y desde lejos, se haya inmiscuido hasta tal punto en el currículo de Matemáticas; tampoco es fácil no fantasear con lo que podría haberse avanzado de no mediar tal circunstancia. Sin embargo, traemos a colación el hecho pensando, como siempre, en el derecho a la educación y la responsabilidad que ello conlleva, y también en la eventualidad de que algo similar vuelva a ocurrir (lo cual ilustraremos más adelante).

3.3 La primera mitad del s. XX

3.3.1 El Congreso internacional de matemáticos

En el primer International Congress of Mathematicians (ICM), en Zurich, en 1897, una de las cuatro sesiones plenarias fue hecha por Klein, con el título "Sobre la cuestión de la instrucción matemática superior" (IMU, 1898).
En 1900, el ICM se reunió en París. Hubo un par de secciones dedicadas a bibliografía, historia, y enseñanza y metodología (IMU, 1902).

El tema de la enseñanza de la matemática se desarrolló en mayor medida en 1908, en el ICM en Roma, en el cual hubo una sección dedicada a temas filosóficos, históricos y educacionales (IMU, 1909). En ella se habló sobre los esfuerzos de reforma en el campo

[15] La Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile se fundó en 1965. En ese año, el Consejo Superior de otra universidad chilena había opinado que el país no necesitaba científicos, y que una tal facultad sería, además de onerosa, "una tabla de salvación para alumnos mediocres" (Sáez, 1994, p. 1213, citado por Gutiérrez y Gutiérrez, 2004, p. 24).

de las matemáticas, y se revisó la enseñanza de la disciplina en escuelas inglesas austríacas, italianas, suizas, españolas, húngaras, norteamericanas; hubo dos trabajos sobre reforma de la enseñanza. En esa sección, Klein expuso "Sobre una modernización de la educación matemática en las escuelas superiores". A él y a otros dos matemáticos se encomendó establecer una comisión internacional para estudiar el asunto y reportar en el congreso próximo; se constituyó así la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), presidida por Klein desde ese año.

3.3.2 Álgebra en Göttingen a comienzos del s. XX

En 1915, Hilbert y Klein invitaron a Emmy Noether a Göttingen, para una estadía que resultó muy fructífera, tanto en álgebra como en física[16]. Emil Artin estuvo también en Göttingen, en 1921; Noether y él contribuyeron a modificar el significado del término "álgebra", que venía cambiando desde los trabajos de Évariste Galois en la primera mitad del s. XIX, y los de Richard Dedekind en la segunda. El trabajo de Emmy Noether comportaba una gran generalización a partir de objetos conocidos, y el establecimiento de relaciones conceptuales entre ellos (topología y álgebra, *e. g*.; Van der Waerden, 1980). Bartel Leendert Van der Waerden siguió en Göttingen seminarios con Noether y Artin, y luego escribió sus muy influyentes volúmenes de *Moderne Algebra* (1930-1931); en ellos aparece el álgebra con la estructura en que hoy en día se la conoce –grupos, anillos, módulos…–. Así se la seguiría enseñando en adelante (Schlotte, 2005).

3.3.3 Bourbaki

Gran parte de los matemáticos franceses de una generación falleció en la Primera Guerra Mundial. En la generación siguiente, sobre todo de la École Normal Supérieure, algunos matemáticos no estaban conformes con los textos que usaban, y se quejaban de que sus profesores no estuvieran realmente al día en las materias, ni pudieran continuar las investigaciones comenzadas por los desaparecidos (Aczel, 2009). En 1934, André Weil y Henri Cartan acordaron desarrollar de manera rigurosa el curso de cálculo infinitesimal que dictaban en sus respectivas universidades, de modo que fuera lo que consideraron adecuado a los tiempos, y que sirviera para los próximos 25 años (Corry, 2004). Ello los llevó, junto con un grupo de matemáticos reunidos bajo el pseudónimo de Nicolas Bourbaki, a un plan de mucho más largo aliento, que se materializó en una obra monumental, los *Éléments de Mathématique*, cuyo primer libro apareció en 1939, y el undécimo en 2016 –al grupo se fueron sumando matemáticos de sucesivas generaciones–. Bourbaki avanzó en el rediseño de la matemática, estructurada ahora según las estructuras topológicas, algebraicas y de orden (Corry, 2004). Artin (1953) consideró que [la parte que conoció de] esa obra expone el estado de la matemática de ese tiempo, exhibe la conexión entre sus ramas en un esquema perdurable, y permite incorporar con facilidad ideas nuevas. Los *Élements* es un hito en la manera estructurada de concebir la matemática[17].

3.3.4 Oportunidad y relevancia

La obra de unificación de la matemática que reseñamos fue también oportuna: hacia 1960 la matemática contaba ya con unos 60 capítulos mayores y más de 400 áreas secundarias (Davis y Hersh, 1998). Tal obra, hecha con propósitos científicos, redundó, en parte, hacia el currículo escolar de Matemáticas, con suerte variable[18].

4. Comentario

Según datos actuales del Banco Mundial (2022), Chile gasta en educación un 5,4% de su PIB. Ese porcentaje es mayor que, por ejemplo, el de América del Norte (5,3), el de la Unión Europea (4,6), el promedio de los países de la OCDE (4,9), el de Asia Central y el Pacífico (3,4). Los resultados, sin embargo, son magros, y sugieren que no se está satisfaciendo el derecho a una educación de calidad en matemáticas.

Por su parte, la reseña histórica que hicimos sugiere algunas formas en que se pueden perder oportunidades para el país y para las personas que en él habitan.

En la segunda parte de este ensayo (Mena Lorca, 2022), examinaremos la reforma de la educación matemática que las ideas unificadoras que venimos describiendo causaron en la matemática escolar, su implementación, en particular, en Chile, y algunos obstáculos que se deberían sortear para enfrentar la nueva reforma, ya comenzada, incluyendo algunos que se originan en la falta de un debate amplio y apropiado sobre el tema.

[16] Klein y Hilbert comparten, además, su amplitud de miras con respecto a mujeres en matemáticas. Al no conseguir un contrato para Noether, Hilbert logró que ella hiciera clases a nombre de él. Por su parte, Klein guio a la primera doctora en Matemáticas de Göttingen, Grace Chisholm Young, quien le agradeció expresamente su apertura (Wußing y Arnold, 1989).
[17] Como suele ocurrir, se ha vuelto sobre este tema, más recientemente (Cf. Mathias, 1992).
[18] Pretender que la reforma escolar tuvo únicamente motivaciones geopolíticas relacionadas con la Guerra Fría es, entonces, claramente un desatino.

Referencias

Aczel, A. D. (2009). *Nicolas Bourbaki: Histoire d'un génie des mathématiques qui n'a jamais existé.* JC Lattès.

Agencia de Calidad de la Educación. (2019). *SIMCE 2018. Todos los grados.* https://informacionestadistica.agenciaeducacion.cl//bases

Artin, M. (1953). Review of Bourbaki's Algebra. *Bull. Amer. Math. Soc., 59,* 474-479. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1953-09725-7

Ávalos, B., y Matus, C. (2010). *La formación inicial docente en Chile desde una óptica internacional. Informe nacional del estudio internacional IEA TEDS-M.* Ministerio de Educación de Chile.

Balmaceda, J. M. (1900). *Discursos & escritos políticos, 1864-1891, Tomos I, II.* Imprenta Moderna.

Banco Mundial. (2022). *Gasto público en educación, total (% del PIB).* Instituto de Estadística de la UNESCO. https://datos.bancomundial.org/indicator/SE.XPD.TOTL.GD.ZS

Barros Arana, D. (1993). Discurso en el Quincuagésimo aniversario de la Universidad de Chile. (1893). En Universidad de Chile (Ed)., *La Universidad de Chile 1842-1992: Cuatro textos de su historia* (pp. 31-47). Editorial Universitaria.

Baruk, S. (1985). *L'âge du capitain*. Seuil.

Bourbaki, N. (1939-2016). *Éléments de Mathématique* (11 vol.). Hermann.

Brousseau, G., y Warfield, V. (2014). *Didactical Contract and the Teaching and Learning of Science.* En R. Gunstone (Ed.), Encyclopedia of Science Education. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6165-0_93-2

Cantor, G. (1873). Uber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen. *J. Reine Angew. Math. 77,* 258-263. https://doi.org/10.1515/9783112368824-009

Corry, L. (2004). *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures.* Birkhäuser Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7917-0

Davis, J. D., y Hersh, R. (1998). *The Mathematical Experience.* Birkhäuser.

Dorier, J.- L. (2000). Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre Linéaire – Perspectives théoriques sus leurs interactions. *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz, 12.*

D'Amore, B. (1993). Il problema del pastore. *La Vita Scolastica, 2,* 14-16.

Gobierno de Chile. (1866). *Censo jeneral de la República de Chile: levantado el 19 de abril de 1865.* Imprenta Nacional.

Gutiérrez, C., y Gutiérrez, F. (2014). Ricardo Poenisch: La profesionalización de la enseñanza de las matemáticas en Chile (1889-1930). *Atenea 509*(I semestre), 187-209. https://doi.org/10.4067/S0718-04622014000100011

Hilbert, D. (1899). Grundlagen der Geometrie. En *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen* (pp. 1-92). Teubner.

Hilbert, D. (1900). Mathematische Probleme. En *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse,* 253-297.

Hilbert, D. (1905). Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik. En *Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8*, bis 13, 174-85. Teubner.

Huxley, A. (1956). A Case of Voluntary Ignorance. *Esquire*, October, 47.

International Mathematical Union. (1896). *Mathematical papers read at the International Mathematical Congress.* University Press. https://www.mathunion.org/icm/proceedings

International Mathematical Union. (1898). *Des Ersten Internationalen Mathematiker-Kongresses.* Druk und Verlag Von B. G. Teubner. https://www.mathunion.org/icm/proceedings (Volume 1897).

International Mathematical Union. (1902). *Deuxième Congrès International des Mathématiciens.* Gauthier-Villars. https://www.mathunion.org/icm/proceedings (Volume 1900).

International Mathematical Union. (1909). *Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici.* Tipografia della R. Accademia Dei Lincei. https://www.mathunion.org/icm/proceedings. (Volume 1908).

Jerome, J. K. (1997). *Idle thoughts from an idle fellow.* Project Gutenberg ebook. https://www.gutenberg.org/files/849/849-h/849-h.htm#link2H_4_0002

Klein, F. (1872). Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. *Mathematische Annalen, 5,* 257-277. https://doi.org/10.1007/BF01444841

Klein, F. (2006). *Matemática elemental desde un punto de vista superior. Aritmética. Álgebra. Análisis.* Nivola.

Letelier, V. (1940). *El Instituto Pedagógico: Misceláneas de estudios pedagógicos.* Nascimento.

Mathias, A. R. (1992). The Ignorance of Bourbaki. *The Mathematical Intelligencer, 14*, 4-13. https://doi.org/10.1007/BF03025863

Meruane, T. (1989). *Centenario del Instituto Pedagógico de la Universidad de Chile.* Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación.

Mena Lorca, A. (2022). Sobre la nueva reforma de la educación matemática: invitación a un debate, 2. *Revista Chilena de Educación Matemática, 14*(1), 17-30. https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i1.108.

Ministerio de Educación. (2019). *Fundamentos Bases Curriculares 3° y 4° Medio.* Unidad de Curriculum y Evaluación.
https://www.curriculumnacional.cl
portal/Documentos-Curriculares/
Basescurriculares/91414:Bases-Curriculares-3-y-4-Medio

Organización de las Naciones Unidas. (1948). *La Declaración Universal de Derechos Humanos.* https://www.un.org/es/universal-declaration-human-rights/

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura, y International Science Council. (1999). *Declaración sobre la ciencia y el uso del saber científico.* UNESCO-ICSU. http://www.unesco.org/science/wcs/esp/declaracion_s.htm

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2004). *Revisión de Políticas Nacionales de Educación. Chile.* Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2017). *Education in Chile, Review of national policies for education.* PISA, OECD Publishing.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2019a). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework.* PISA, OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/b25efab8-en.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2019b), *PISA 2018 Results (Volume I): What students know and can do.* PISA, OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/5f07c754-en

Peirce, C. S. (1878). How to Make Our Ideas Clear. *Popular Science Monthly, 12*, 286-302.

Pilleux, C. (2018). *Recopilación de genealogías*. En *Genealog.cl* https://www.genealog.cl/Alemanes/P/Proschle/

Reidt, F. (1895). *Anleitung zum mathematischen Unterrich an höheren Schulen.* Grote.

Rojas, E., y Oteiza, F. (2014). Chile: The context and pedagogy of Mathematics teaching and learning. En H. Rosario, P. Scott, y B. R. Vogeli (Eds.), *Mathematics and its teaching in the Southern Americas.* World Scientific. https://doi.org/10.1142/9789814590570_0005

Roser, M., y Ortiz-Ospina, E. (2016). *Literacy*. Published online at OurWorldInData.org. https://ourworldindata.org/literacy.

Rowe, D. E. (1989). Klein, Hilbert, and the Gottingen Mathematical Tradition. *Osiris, 5*, 186-213. https://doi.org/10.1086/368687

Schlotte, K. H. (2005). B. L. van der Waerden, Moderne Algebra. En I. Grattan-Guinness, (Ed)., *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940* (pp. 901-916). Elsevier. https://doi.org/10.1016/B978-044450871-3/50151-0

Soto-Andrade, J. (2015). La Didáctica de la Matemática vista desde la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile. *Revista Anales, Séptima Serie* (8), 97-117. https://doi.org/10.5354/0717-8883.2015.37311

Tafelmacher, A. (1892a). Sobre el teorema de Fermat: de que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene solución en números enteros x, y, z i siendo $n>2$. *Anales de la Universidad de Chile,* 271-300.

Tafelmacher, A. (1892b). Sobre el teorema de Fermat: de que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene solución en números enteros x, y, z i siendo $n>2$. (Conclusión). *Anales de la Universidad de Chile,* 417-437.

Tafelmacher, A. (1893a). Sobre los métodos para la enseñanza de las matemáticas en los liceos (I). *Anales de la Universidad de Chile*, 35-59.

Tafelmacher, A. (1893b). Sobre la ecuación $x^4+y^4=z^4$. *Anales de la Universidad de Chile,* 307-320.

Tafelmacher, A. (1897). La ecuación $x^3+y^3=z^2$ y una demostración nueva del teorema de Fermat para el caso de las sestas potencias. *Anales de la Universidad de Chile*, 63-80.

Van der Waerden, B. L. (1930-1931). *Moderne Algebra* (2 vols). Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-662-42016-4

Van der Waerden, B. L. (1980). *A History of Algebra from al-Khwärizml to Emmy Noether.* Springer Verlag.

World Economic Forum. (2020). *The Future of Jobs Report 2020.* http://www3.weforum.org/docs/WEF_Future_of_Jobs_2020.pdf

Wußing, H., y Arnold, W. (Eds). (1989). *Biographien bedeutender Mathematiker: eine Sammlung von Biographien.* Volk und Wissen Volkseigener.

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i1.108

SOBRE LA NUEVA REFORMA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA: INVITACIÓN A UN DEBATE, 2

ON THE NEW REFORM OF MATHEMATICS EDUCATION: INVITATION TO DEBATE, 2

Arturo Mena Lorca
arturo.mena@pucv.cl
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

RESUMEN

La reforma de las matemáticas escolares que comenzó hacia 1960, sorprendió a Chile sin la preparación que se requería. Posteriormente, se avanzó, sin embargo, en los diversos ámbitos, y, ya desde fines del siglo pasado, se comenzó una nueva revisión, tanto de la institucionalidad como del currículo. Los comienzos de la pandemia encontraron a Chile con una serie de medidas de envergadura ya en fase de implementación, y con un currículo completamente revisado durante la última década. Se pudo haber pensado que correspondía ahora recomenzar el ciclo y, pacientemente, evaluar y enmendar lo que correspondiera, pero hay una circunstancia más apremiante: una nueva reforma educacional, diferente, amplia, profunda e inexorable, ya está llegando. En esta parte del escrito examinamos más de cerca la reforma de los años 60 y sus consecuencias inmediatas, procuramos sacar algunas lecciones, examinamos de manera crítica algunos criterios que se ponen en juego y una notoria falta de sintonía entre algunos actores, y, además, tratamos de situar ese análisis vis a vis con la responsabilidad que nos cabe como personas concernidas con la educación de la matemática.

PALABRAS CLAVE:
Reforma de la matemática escolar, Pedagogía, Didáctica-de-la-matemática.

ABSTRACT

The reform of school mathematics that began around 1960 found our country without the required preparation. However, progress was made in various areas, and, since the end of the last century, a new review began, both of the institutional framework and the curriculum. The beginning of the pandemic found Chile with a series of major measures already in the implementation phase, and with a curriculum completely revised during the last decade. It could have been thought that it was now time to restart the cycle, and patiently evaluate and amend what was appropriate, but there is a more pressing circumstance: a new educational reform, different, broad, deep and inexorable, is already coming. In this, the second part of our essay, we take a closer look at the reform of the 1960s and its immediate consequences, we try to draw some lessons, and we critically examine some criteria that are at stake and the notorious lack of harmony between some actors, and we try to situate that analysis vis a vis the responsibility that falls to us as people concerned with the education of mathematics.

KEYWORDS:
Reform of school mathematics, Pedagogy, Didactics-of-mathematics.

Recibido: 28 de febrero de 2022 , Aceptado: 16 de marzo de 2022

1. Introducción

En la primera parte de este escrito (Mena Lorca, 2022) hemos sugerido que se necesita un debate de diversos actores para enfrentar la fuerte presión que algunos acaecimientos ejercen sobre el currículo de matemática, y lo seguirán haciendo cada vez con más fuerza. Hemos señalado, además, que tal debate enfrenta desde ya cierta falta de convergencia entre los encargados de la formación inicial de profesores, los cuales tienden más bien a apartarse unos de otros, según su especialidad. Añadimos que esta divergencia tiene raíces en la epistemología de los campos de estudio correspondientes.

Como sea, la falta de convergencia está, según los estudios citados, entre las causas de que, pese a la inversión que el país realiza, los aprendizajes de los estudiantes no son suficientes. Esto significa, de acuerdo con las fuentes ya citadas que, a estos últimos, entonces, no se les está proveyendo de la educación en matemáticas a la cual tienen derecho.

Ahora bien, aquella matemática a la que se tiene derecho conocer, tanto para convertirse en un individuo y ciudadano integral (que conoce la cultura y que puede participar, de manera propositiva, en la marcha de la nación) como para favorecer el capacitarse y así disponer de los medios económicos para llevar adelante un proyecto individual y familiar, varía en el tiempo. De hecho, hemos reseñado cómo evolucionó ese derecho en Chile, desde fines del siglo XIX y hasta mediados del XX, y, además, revisado cómo se abrieron paso ideas unificadoras de la matemática al interior de la disciplina.

A continuación, examinaremos más de cerca cómo es que aquellas ideas llegaron al currículo escolar en el mundo, y presentaremos trazas de cuál fue el resultado en nuestro país. Procuraremos extraer algunas lecciones de lo ocurrido, y comentaremos sobre algunos nudos de la cuestión. En la tercera parte, reuniremos estos elementos en una perspectiva comprensiva y de cara a una variación mayor, y profunda, de ese derecho a educarse en matemáticas.

2. La primera reforma

Nos referimos aquí a un proceso de reforma de la enseñanza de la Matemática que tuvo lugar hace poco más de medio siglo, en varias partes del mundo, y que se dio en llamar "la revolución de las matemáticas escolares", o, más simplemente, "las matemáticas modernas" (Fehr et al., 1971). Nos acercaremos a ella desde sus razones disciplinarias, y veremos algunas trazas[1] de su implementación en Chile, de manera de sugerir algunos aspectos que nos ayudarían a apercibirnos para lo que viene, usando, tal vez, razonamiento abductivo (Peirce, 1998).

Que esa reforma haya sido o no exitosa depende un tanto de la perspectiva que se tome: cambió la manera de concebir la enseñanza de la matemática en gran parte del mundo, pero, en general, no produjo los aprendizajes esperados, y, en ese importante sentido, se puede decir que fue un fracaso a escala internacional. La escasa conexión de la preparación de los profesores para las nuevas perspectivas, así como cierta falta de criterio experimental de parte de los proponentes de la reforma, fueron algunas de las causas de ese fracaso. Nuestro país no fue una excepción, y un examen compendioso muestra con claridad que no estábamos preparados para la nueva mirada que la reforma suponía. Sin embargo, la dirección que promovió la reforma era, como veremos, necesaria.

3. Reforma de la matemática escolar en el s. XX

3.1 Estancamiento del currículo

No obstante, la obra unificadora y modernizadora que reseñamos en la primera parte de este ensayo, la matemática escolar, desde primaria hasta pregrado universitario, había permanecido indiferente a ella. En el International Congress of Mathematicians (ICM) de 1958, en Edimburgo, se reportó su falta de sensibilidad al avance de la matemática en el mundo, no en el sentido de la investigación de frontera –obviamente, ello habría sido inconveniente, además de imposible–, sino en lo referente a las ideas que permitían una visión homogénea o unificada.

Tal percepción se unió a otras, y terminó provocando una reacción en gran parte del globo. Se organizaron reuniones acerca de la manera de enseñar matemática en todos los continentes. Hubo congresos *ad hoc*, por ejemplo: en 1960, de la Organización de Cooperación Económica Europea de entonces; en 1961, de la Organización de los Estados Americanos (OEA); en 1962, de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO); en 1966, de los países nórdicos, de los países árabes, de Japón, de Australia. Se concluyó la obsolescencia

[1] No conocemos estudios explícitos con datos sobre la implementación en el sentido que necesitamos aquí. Hemos recurrido a la observación de campo y a testimonios presenciales.

de los programas de matemáticas en los países de reconocidas tradiciones (Fehr et al., 1971).

3.2 Las ideas centrales

Avanzada la década, se propusieron modificaciones bastante radicales en el currículo escolar; se comenzó a hablar de reforma de la enseñanza y, aun, de "revolución en las matemáticas escolares" (Fehr et al., 1971). Se pretendía organizar de mejor manera el currículo, e introducir las ideas unificadoras de la matemática que podían ser utilizadas en la enseñanza escolar. Ello comportó: eliminación o drástica disminución de contenidos (geometría euclidiana, partes del álgebra tradicional); incorporación de conjuntos, relaciones, funciones, sistemas numéricos; se consideró incluir probabilidades y estadística. Tales modificaciones cambiaron en forma definitiva la forma de enseñar la matemática en el mundo, pero debemos recordar que su implementación inmediata no fue, en absoluto, exitosa.

Un subproducto de la reforma fue que la enseñanza parecía sugerir que los estudiantes hablaran acerca de los problemas que se planteaban, pero no supieran resolverlos; en todo caso, ello sucedió (Kline, 1973).

3.3 Apreciación

Ante este estado de cosas, alrededor del mundo hubo diversas reacciones, algunas de las cuales son de más largo aliento, otras más bien circunstanciales y *ad hoc*. Señalamos algunas a continuación.

Ya en la II Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM), dependiente de la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), que tuvo lugar en Lima, en 1966 (CIAEM-IACME, 2022), se presentaron informes por países acerca de la reforma decidida. Hubo coincidencia en que la opinión pública no la estimó necesaria, y que, incluso, hizo resistencia a ella; en que los profesores no estaban preparados para implementarla; en que no había textos escolares apropiados disponibles.

Una consideración que debemos agregar, en retrospectiva, es la ausencia de suficiente criterio experimental para implementar aquella reforma.

3.3.1 Heterogeneidad entre matemáticos

Como cabría esperar, algunos matemáticos se pronunciaron sobre lo que estaba ocurriendo. Como es también natural, las opiniones no fueron uniformes, según indicamos a continuación.

3.3.2 "Mucha" matemática

Un ejemplo interesante de lo que podríamos llamar "exceso de entusiasmo" es el del importante y prolífico topólogo Peter Hilton, una autoridad en Matemáticas: experto en topología algebraica, homotopía, álgebra homológica, álgebra categórica; trabajó con Alan Turing en decodificación de mensajes en la Segunda Guerra Mundial. En 1971, en un trabajo que presentó en una conferencia sobre enseñanza secundaria, Hilton asume como algo natural que el currículo contenga alguna teoría de grupos, y que se enseñen los conceptos habituales de un curso de topología, y de categoría y de funtor, amén de una serie de materias para llegar a contrastar la clasificación topológica con la clasificación homotópica. Añade: "El teorema de aproximación simplicial mide entonces la 'fidelidad' de este funtor y es la clave para establecer la relación entre las teorías combinatoria y topológica" (1971, p. 44)[2].

Adicionalmente, Jean Dieudonné, prominente matemático, miembro de Bourbaki, uno de los propulsores de la drástica disminución de la geometría euclidiana en los colegios, se pronunció acerca de lo mal que se estaba dando el nuevo escenario en el prólogo a un libro suyo de álgebra lineal y geometría (1964):

> Espero que se me creerá si agrego que no tengo ningún interés personal en estas cuestiones de la enseñanza secundaria... He querido simplemente dejar como registro para el historiador futuro un ejemplo de lo que se podría hacer en la materia si se tratara de actuar (al respecto) de una manera racional. (xi)[3].

Los ejemplos anteriores son señales interesantes, que no debemos pasar por alto, tanto por su evidente y aun explícita carencia de criterio experimental, como por argumentaciones de ese tenor que suelen ocurrir aún. Seguramente una muestra, como otras,

[2] "The simplicial approximation theorem then measures the 'faithfulness' of this functor and is the key to establishing the relation between the combinatorial and topological theories".

[3] "J'espère qu'on me croira si j'ajoute, que je n'ai aucun intérêt personnel dans ces questions d'Enseignement secondaire... J'ai simplement voulu verser au dossier de l'historien futur un exemple de ce que l'on pourrait faire en la matière si l'on cherchait á agir de façon rationnelle".

que nos insta a considerar la necesidad de diálogos multidisciplinarios para decidir los currículos.

3.3.3 Matemática elemental

Por su parte, Hyman Bass, conocido por sus aportes sustantivos a la geometría algebraica, la función zeta de Riemann y otros temas, presidente de ICMI de 1999 a 2006, quien ha investigado también en educación matemática escolar, en una conferencia pública en Chile en 2012, expresó, en sintonía –nos parece– con lo expresado por Felix Klein en 1904 (Klein, 2006), que aspirar a que los profesores de Matemáticas sepan mucha matemática no solo es innecesario, sino que puede ser inconveniente (Cf. Ball et al., 2009).

Afortunadamente hoy, en nuestro país, cualquiera persona interesada en nuestro tema conoce a matemáticos que han, también, estudiado la cuestión, y hecho propuestas basadas en evidencias.

3.4 La Reforma en Chile

Respecto de la implementación de la reforma en Chile, es necesario consignar dos componentes bien distintas, que señalamos en lo que sigue.

3.4.1 El CPEIP

El Ministro Juan Gómez Millas fundó el Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP) en 1967 (Leyton, 2017); quería que fuera un centro de excelencia. Se invitó a profesores franceses que trabajaban en algunos IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), y a otros especialistas, tales como Zoltan Dienes. La OEA financió talleres para docentes los años 1972 y 1973; entre quienes presentaron la Reforma en esos talleres estuvieron Jaime Michelow, Alicia Cofré, Hernán Cortés P., y el coordinador Fidel Oteíza. Se diseñaron y desarrollaron situaciones didácticas; se trabajó en modelización, descubrimiento guiado, validación experimental. La llegada del gobierno militar cercenó esos esfuerzos, y el currículo caminó en otra dirección. Los trabajos realizados se perdieron y no parece posible recuperarlos[4].

3.4.2 El currículo escolar

La subsecuente falta de claridad se mantuvo por años. Una muestra lateral de lo ocurrido es que el libro de Aurelio Baldor (1997) siguió usándose para la enseñanza del álgebra sin ninguna adición ni enmienda[5].

Andando el tiempo, en Chile, la idea de función, central en la reforma, fue, por un lapso, prohibida en el currículo escolar. Esto, que ciertamente mueve a asombro, es también interesante, siquiera como muestra de un fenómeno que reaparece un tanto inopinadamente en la discusión de nuestro tema: el de "botar al bebé con el agua sucia de la bañera", como se suele decir. Ciertamente, el exceso de diagramas de Leibniz-Venn-Euler y de dibujos sagitales no fácilmente traducibles al caso continuo, no debería haber amagado la importancia de una noción tan primordial. Por lo demás, la ausencia de las necesarias condiciones de dominio de las funciones involucradas en una multiplicidad de fórmulas de uso común derivó en la costumbre, presente aún hoy en día, de hacer álgebra elemental sólo con herramientas y notaciones elaboradas hasta el siglo XVII (ver, por ejemplo, Cajori, 1928-1929, p. 308), pero sin la claridad conceptual que provee de manera explícita un lenguaje más contemporáneo.

3.4.3 Enseñanza inicial universitaria

Tampoco pudo llamarse directamente exitosa la transición de las "nuevas" ideas a las universidades chilenas, algunas de las cuales continuaron largamente con programas que podían ser capítulos de Hall y Knight. Otras recibieron una influencia norteamericana, que se difundió mediante textos en español y bilingües que en algún momento llevaron el apelativo de *matemática moderna*, no siempre claros en su conceptuación ni en su dirección (Cf. Godement, 1963, *e. g.*).

En apretado muestrario, algunos cambios fueron: eliminación de gran parte del álgebra tradicional; virtual desaparición de la geometría euclidiana del espacio; drástica disminución de la trigonometría y la geometría analítica; aparición de los sistemas numéricos. Ocasionalmente, en cursos de ingeniería,

[4] En 1981, Fidel Oteíza invitó a una reunión a decanos de facultades de Matemática, de Ciencias y de Educación, y otros interesados, se presentaron unas 70 personas; la invitación pedía a los asistentes que trajeran una página policopiada con trabajos de enseñanza de la matemática que hubieran hecho o estuvieran realizando. La SOCHIEM nacería en septiembre de 1982.

[5] De funciones tiene en total una media docena de páginas. (Menos del 1% de sus ejercicios se refiere a ellas; no tienen incidencia alguna en ecuaciones de segundo grado, logaritmos ni exponenciales. La definición que incluye es multivaluada, y no le sirve para corregir su argumentación de que, por ejemplo, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$)

pareció a veces natural estudiar grupos finitos, o geometrías de unos pocos puntos, para mostrar qué es el método axiomático.

Un caso particularmente interesante fue el del cálculo infinitesimal. Tradicionalmente, esa materia se enseñaba usando el texto de Granville y Smith, de 1904. Aparecieron otros, nuevos, más centrados en los fundamentos (*e. g*., los bien conocidos de Apostol, 1967; Dieudonné, 1968; Kitchen, 1968). Seguidamente vinieron una serie de textos provenientes de los Estados Unidos, cada vez más voluminosos[6]. Las cinco páginas sobre límites de Granville y Smith se convirtieron en 50 en Swokowski (1989) y, en Leithold (1992), en 80 páginas de profusa utilización de argumentos "épsilon-delta". Es interesante considerar esta dinámica vis a vis, con el que un curso semestral de elementos de cálculo diferencial solía terminar con el dibujo, entretenido y laborioso, de curvas de funciones algebraicas y trascendentes (amén de algunas aplicaciones concretas), es decir, aquello que hoy día un teléfono móvil puede graficar en un instante.

Nos parece interesante sacar a colación una anécdota, ocurrida en una universidad en aquella época: el representante de una escuela que recibía servicios de matemática de otra expresó "Queremos que nuestros alumnos sepan que para tal tipo de problema se necesita integrar, y para tal otro derivar, sin saber derivar ni integrar". Podemos imaginar que la reacción de los matemáticos presentes en esa ocasión fue considerablemente menos empática que lo que tal frase podría tal vez provocar en especialistas hoy en día.

3.5 Lecciones de la historia

Podemos reunir ahora algunas reflexiones que parecen inevitables. Hay muchas otras, pero señalamos, a continuación, solo las que parecen más relevantes y/o menos controvertibles, y que listamos sin pretensión de ordenarlas en cuanto a su relevancia.

3.5.1 En resguardo de la matemática

La matemática no necesita de nuestra defensa. Sin embargo, es muy alarmante –y motiva a cavilaciones variadas– que, cuando se decide sobre temas que afectan a la enseñanza de la matemática en el país, no siempre se convoque a matemáticos.

Una manera de verificar esa necesidad es examinar textos de estudio, materia que ha sido de larga preocupación, y sobre la cual se ha avanzado en los últimos años, con el involucramiento de matemáticos y especialistas en didáctica de la matemática. Al respecto, no nos referimos a que los matemáticos tengan allí un rol de vigilantes que impiden incorrecciones formales y conceptuales, sino a lo que el siguiente ejemplo muestra de manera gráfica.

Hubo un texto, de esos que se reparten al sistema escolar[7], en que se incluía la escalofriante afirmación "Los números reales son los racionales y otros que se construyen con dos cortaduras o una sucesión". Es ese un aserto que despierta asombro y sume en profundas reflexiones acerca de la especie humana, sus virtudes y sus posibilidades de extinción; sin embargo, una vez ya recuperados el habla, las capacidades motoras y otras cualidades habituales, queda la pregunta derivada: ¿Cuál pudo haber sido el propósito de enseñar esas materias en la escuela? Sorprendentemente, el caso no alcanzó a los titulares de los tabloides; solo encontramos, más adelante, un comentario sobrio y educado, de matemáticos chilenos bien conocidos, que participaron en la elaboración de un análisis de los textos escolares del país (Eyzaguirre y Fontaine, 1997).

De todas maneras, el objeto de estudio de un matemático no es la enseñanza de la disciplina, y hay que recordar tanto que algunos especialistas pueden ser muy entusiastas, como que el usuario común de la matemática no tiene el deber del especialista de dar cuenta de todos los soportes de sus afirmaciones.

3.5.2 El criterio experimental

La reforma de los años 60 no exhibió criterio experimental suficiente. En primer lugar, para saber si los profesores, a lo largo de la extensa región del globo en la cual ella se llevó a cabo, estaban preparados para las nuevas perspectivas matemáticas que se pusieron en juego. Por otra parte, tampoco se tenía una idea adecuadamente clara de cuál sería la demanda cognitiva que la reforma supondría para los estudiantes. Una causa de esto pudo ser la insuficiencia

[6] Respondiendo en privado a una pregunta explícita (no hay tiempo para leer tal cantidad de material en un semestre), uno de los autores aquí mencionados confesó que ello se debía a exigencias de las editoriales: si una añadía, por ejemplo, un capítulo sobre una materia extra, las otras también lo hacían, en defensa de su participación en el mercado.
[7] No incluiremos aquí la referencia directa. De hecho, una vez registrada a fuego, por sí sola, la expresión, decidimos no asentar autores ni editorial.

que presentaba la metodología de la investigación de entonces, cosa que fue explícitamente criticada por la escuela francesa de la didáctica de la matemática (Chevallard, 1982).

Una conclusión relevante al respecto, es que, en estas materias, "pensarlo bien" no basta, y que se debe tener criterio experimental. Es esta una lección monumental de la reforma de los años 60, y consterna que se la olvide con tanta frecuencia. Frente a un tema de tal importancia para el país y para sus gentes, que se siga pensando como antes de Francis Bacon en el siglo XVII y, aún, de Roger Bacon en el siglo XIII, es deplorable. Por lo demás, como criterio general, artesanos, agricultores, cocineros, etc., han hecho uso del criterio experimental por milenios.

No creemos que este énfasis en el aspecto experimental comporte ignorar el profundo tema filosófico subyacente, ni el epistemológico respecto de qué es, a fin de cuentas, una evidencia. Nos motiva a ese énfasis el tener que comprobar, como muchos otros, cuántas veces alguna idea que se supone luminosa termina traduciéndose en pérdida de oportunidades para el sistema y para los usuarios. Además, creemos un deber oponernos a quienquiera que haga una crítica metodológica a políticas o iniciativas que estén llevando a cabo y simultáneamente ofrezca alternativas para las cuales no presente otro tipo de soporte que su propia opinión –*de gustibus non disputandum*[8]–.

Afortunadamente, en la actualidad, la investigación en enseñanza de la matemática se inclina mayoritariamente por mostrar evidencia experimental de sus asertos. Se puede distinguir lo que, con cierto atrevimiento, podemos llamar la corriente anglosajona, inclinada a la medición "directa", y la de origen europeo-continental, cuyos supuestos epistemológicos (como en la escuela francesa de la didáctica de la matemática, o la Socioepistemología, de origen mexicano y desarrollada en América Latina) son explícitos. Un ejemplo chileno interesante, al respecto, es el Proyecto Enlaces, que mostró de manera explícita sus resultados y se preocupó, también en forma expresa, del tema de la conectividad digital de los establecimientos ya en 2004 (Oteiza, 2004).

No obstante lo anterior, no parece posible afirmar que la falta de criterio experimental haya dejado de ser objeto de preocupación hoy en día.

3.5.3 Una reforma local somera

Una conclusión adicional es que, puesta en la perspectiva de los propósitos por ella enunciados, la reforma en los años 60 fue, en Chile, de cara a las ideas unificadoras en la matemática que estaban a disposición, bastante superficial. Si bien se anexaron contenidos tales como conjuntos, no se los usó para aquello que venían al caso en la propuesta original matemática. La idea de función, una igualmente primordial, quedó como una materia tal vez interesante, bien poblada de diagramas sagitales, pero sin conexión efectiva con el álgebra. En general, no se supo usar la conceptuación ni el lenguaje, y, de hecho, hasta hoy se enseña a menudo álgebra como se venía haciendo antes de los 60, con desconexión entre una materia y otra (salvo la ocurrencia habitual de que los problemas, por ejemplo, geométricos, se conviertan en ejercicios de álgebra –esa materia poderosa y bienvenida– olvidándose del contenido del problema). La mayoría de los textos sigue usando fórmulas sin relacionarlas con funciones, por tanto, no considerando sus dominios y, entonces, cometiendo error tras error en los cálculos.

Más notable es la confusión, en los textos, entre elementos y clases de equivalencia, que lleva, por ejemplo, para el caso del cuerpo de fracciones de los enteros, a la "noción" de "fracciones equivalentes". Por una parte, es extremadamente dudoso que a un niño chileno le haya servido de algo la "construcción" de los racionales a partir de los enteros, o los dibujos que la suelen acompañar. Más perturbador aún es que los niños se dan cuenta de que fracciones tales como 2/3 y 4/6 son iguales (es la misma), pero entienden que deben corregirse, al tenor de "son iguales. Pero ¿cómo se llama esa palabra? ¿Hay una palabra para decir iguales, verdad?" (Núñez, 2021, p. 78).

Por cierto, los ejemplos que hemos mostrado aquí se refieren solamente al aprendizaje de la matemática *per se*, sin referencia a la presencia de la disciplina en otras áreas y en la vida. En esto último la situación era aún más deficitaria. Según aludimos, Kline (1973) se quejaba de que los estudiantes, en lugar de abordar problemas de planteo, hablaban de ellos en un lenguaje novedoso y no bien comprendido. El físico Richard Feynman (1965), por su parte, ilustra ese exceso de lenguaje imaginando a un empleado del zoológico que indica a un subordinado: "Saca de la jaula el conjunto de animales que es la intersección del conjunto de los lagartos con el conjunto de los animales enfermos" (p. 15). Parecía difícil sostener que la "nueva matemática" fuera útil al ciudadano común.

[8] En nuestra lectura: si el solo fundamento de algo es que a alguien le guste, no se lo puede considerar parte de un debate serio.

3.5.4 Un problema estructural

Parece necesario agregar que, si bien nuestra responsabilidad en el asunto comporta naturalmente el considerar estrategias exitosas que ofrece la literatura internacional, es nuestra obligación evitar el copiar sin más lo que se decide en otras regiones, como si nuestra estructura como país fuera aún la de una colonia de otra nación. Si, recalcitrantemente, se lo va a hacer de todas maneras, se debería, al menos, elegir coordenadas que muestren resultados interesantes, esperanzadores, y adecuados a nuestras necesidades y propósitos.

3.5.5 Ideas de la reforma en Chile

Las ideas matemáticas centrales de la reforma no eran una gran cantidad; primordialmente, (lógica y) conjuntos, sistemas numéricos (estructuras, sobre todo algebraicas), funciones. Ciertamente, con ellas se podía presentar una organización homogénea del currículo escolar de Matemática, manifiesta en un lenguaje articulado y clarificador.

Un examen que se puede hacer aún hoy en día, a través de los textos escolares, muestra, sin embargo, que el despliegue de materias que siguió no tuvo la dirección que se pretendía. Ello se aprecia, en particular en las nociones centrales de conjunto y de función, que surgen del proceso de unificación de la matemática que reseñamos en (Mena Lorca, 2022). Por supuesto, hay más situaciones de similar interés.

3.5.5.1 Los conjuntos

La noción de conjunto es muy general[9].
Aparte de la claridad que ofrece para análisis de diverso tipo, en variadas disciplinas y en la vida diaria, es, obviamente, de suma utilidad para el currículo. Supuesto que se hace la distinción, natural, entre objetos (tales como números, conjuntos, etc.) y afirmaciones "abiertas" sobre ellos (*funciones proposicionales*, aun cuando podemos dispensar el término), el axioma (o, mejor, esquema axiomático) de separación que incluyó Zermelo (1908) permite encontrar la solución de aquella afirmación abierta. A partir de lo anterior, unas cuantas reglas operatorias de carácter algebraico, desarrolladas por Boole y otros pioneros[10] en el s. XIX, orientan la resolución de, por ejemplo, ecuaciones e inecuaciones[11].

No decimos aquí que lo anterior sea sencillo para un niño de una determinada edad, ni pretendemos sugerir que, como se suele decir, "se ponga la carreta por delante de los bueyes". Más bien, reparamos en que un principio tan claro como el anterior no tuvo oportunidad real de probarse, pues el estudio curricular se dedicó largamente al cálculo de esa álgebra booleana, y, por otra, a una serie de diagramas de Leibniz-Euler-Venn, sin conexión alguna con la resolución de problemas habituales.

3.5.5.2 Las funciones

El caso de las funciones es igualmente preocupante.
Se sabe bien que el concepto de función es de difícil comprensión para los estudiantes. Por ejemplo, Michèle Artigue, en un estudio sobre el aprendizaje de ecuaciones diferenciales de alumnos universitarios franceses (Artigue, 1989), encontró que una dificultad de importancia era una noción de función no suficientemente clara.

Además, sabemos que el concepto de función demoró en expresarse con entera claridad.
Dado lo anterior, es lamentable que la noción de función que se usa en textos escolares de distintos niveles sea tan a menudo poco clara, e, incluso, incongruente. A nuestro entender, parte de la dificultad proviene del hecho de que se enseñe a pensar las funciones como conjuntos de pares ordenados. A nosotros nos parece difícil pensar que un matemático que trabaja en modelización, o en geometría algebraica, o en álgebra homológica, análisis funcional[12] (u otras muchas áreas de la matemática), piense las funciones como conjuntos de parejas (por ejemplo, para representaciones de diverso tipo, isomorfismos, complejos de cadena, acciones de grupo, atlas, transformaciones lineales, isometrías (…).

Que sepamos la cuestión proviene de una suerte de crisis que hubo en la matemática a partir de la paradoja de Russell, hace ya unos 120 años, que llevó a los matemáticos a trabajar con cierta desconfianza con las funciones proposicionales y se decidió entonces que las relaciones binarias fueran, por un decreto de identificación de fácil asimilación por ellos, una colección de pares ordenados, y, por tanto, las funciones también lo sean. Dado que es evidente que los niños y jóvenes, en general, no sabrían qué

[9] Al respecto, una visión basada en la cognición corporeizada puede verse en Lakoff y Núñez (2000).
[10] Nos referimos aquí, principalmente, a De Morgan et al. (Bocheński, 1961).
[11] Por esa vía, es inmediata la explicación de una tabla de resolución de inecuaciones algebraicas y otras (aunque ahora hay medios gráficos más accesibles para mejor inteligencia de la situación por parte del alumno).
[12] De hecho, lo hemos preguntado, pero no disponemos de un análisis de datos suficiente.

hacer ante los problemas profundos de la matemática como disciplina, es difícil entender por qué deben ellos cargar con el asunto, que los aparta de la noción más inmediata y accesible de relación –y de otras–.

Por otra parte, muchos textos definen las funciones como "leyes" o "reglas", y, a la vez, como colecciones de parejas, vulnerando así la separación natural entre objetos y afirmaciones[13].

3.5.5.3 Comentario

Uno puede imaginar que, si se toma, digamos, una ecuación $f(x) = g(x)$ en el sistema de los números reales, calcular la intersección de los dominios de f y de g, aprovechar las propiedades del sistema y, confiando en Zermelo, encontrar la solución, teniendo claridad en la noción de igualdad de conjuntos[14], suponga una demanda cognitiva inapropiada o indeseable. Sin embargo, en lo que se refiere a la resolución de ecuaciones, ello parece tener más sentido apuntar que aprender álgebra de Boole, hacer diagramas sagitales y realizar las construcciones de los diferentes sistemas numéricos (sobre todo, si no se distingue claramente elementos de clases de equivalencia).

En todo caso, no se puede decir que la noción de función, que pudo usarse para estudiar con seriedad los dominios de validez de muchas fórmulas algebraicas –y evitar así una cantidad importante de errores de cómputo debidos a ingenuidad–, haya sido bien aprovechada.

4. Chile entrando al siglo XXI

4.1 Disposiciones de interés

Desde ligeramente antes de comienzos del milenio[15] , el país tomó una serie de medidas decididas y relevantes para responder a la situación que se le planteaba entonces, de las cuales interesa aquí señalar algunas. En primer lugar, aumentó seriamente la inversión en educación. Por otra parte, inició y completó un amplio programa de Fortalecimiento de la Formación Inicial de Profesores (FFID).

Además, decidió ingresar a la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OECD). Esto último comportó, en particular: solicitar a la organización un estudio sobre su sistema educacional, el cual le fue entregado en 2004 (OECD, 2004), someterse a la prueba PISA desde 2003, y ser el anfitrión del primer *Global Forum on Education*, de la OECD, realizado en Santiago en 2005.

También en 2005, se nombró una Comisión sobre Formación Inicial Docente, que entregó un Informe a fines de ese año, en una reunión en la cual representantes de 46 instituciones formadoras de profesores firmaron, en presencia del ministro de Educación de entonces, el "Compromiso por la calidad de la Formación Inicial Docente en Chile".

En 2006 se nombró un Consejo Asesor Presidencial en Materia de Educación, que entregó un informe a fines de ese año.

Más adelante, se elaboró un ambicioso proyecto de apoyo a la formación inicial de profesores, que se llamó Programa INICIA (CPEIP, 2017). En su dimensión curricular, este programa se tradujo posteriormente, de acuerdo con una nueva Ley General de Educación (Ministerio de Educación [MINEDUC], 2009), en una revisión programada, entre 2009 y 2019, de todo el espectro de asignaturas, en todos los niveles escolares, y que fomenta el desarrollo de habilidades del siglo XXI (MINEDUC, 2019).

4.2 Los convidados de piedra

4.2.1 Error de sintonía

Las medidas señaladas, interesantes como son, muestran, además, la escasa o ninguna presencia de la ciencia y, en particular, de la matemática, en los debates chilenos correspondientes. Especialistas en matemáticas y en su enseñanza estarían fuera de lugar en las reuniones *ad hoc*, y, al parecer, no siempre se piensa que deban tener voz en el asunto.

Por de pronto, el Informe de la OECD (2004) es bastante explícito respecto de la necesidad de esa presencia. Manifiesta que el currículo de formación inicial docente es insuficiente en materias específicas; que –como decíamos– no articula suficientemente los elementos pedagógicos generales y los de enseñanza de las disciplinas. Alienta a "reformar las facultades de educación" (p. 293), para lo cual estima conveniente "estimular explícitamente la interacción y colaboración con otras facultades de las universidades, y de

[13] No pretendemos que el tema no sea delicado (basta ver, por ejemplo, la manera en que lo trata Bourbaki en su volumen de teoría de conjuntos).
[14] Porque, por ejemplo, el que un mismo procedimiento de resolución para las ecuaciones $1+\sqrt{x}=2$ y $1-\sqrt{x}=2$, dé la solución en el primero y en el otro parezca no darla, no es una cuestión de dominios.
[15] Somos, también, devotos del sistema decimal.

naciones más industrializadas" (p. 293). Recomienda alejar la formación continuada "de las formas generales de perfeccionamiento... hacia formas de apoyo más específicas y más estructuradas para desarrollar pedagogías de materias específicas..." (p. 160). Añade que casi la mitad de los profesores de Matemáticas en ejercicio tiene poca confianza en sus competencias, que solo un cuarto cree que domina las materias y que, en efecto, a los profesores les falta aprendizaje específico de matemáticas. (En un informe posterior, de 2017, la OECD reitera esas preocupaciones).

Aunque parezca increíble, al año siguiente, en el Informe de la Comisión por la Formación Inicial Docente en Chile (2005), extenso documento que acompañó al compromiso sobre la formación inicial ya mencionado, el vocablo "matemáticas" aparece dos veces: una para mencionar que han aumentado las matrículas de pedagogía en la disciplina, la otra para señalar que hay debilidades en las habilidades entre los profesores encargados de su enseñanza. No se encontrará en él reacción, ni menos acogida, a la recomendación de preocuparse de la enseñanza de disciplinas específicas.

A continuación, el Informe Final del Consejo Asesor Presidencial en Materia de Educación, de 2006, ignorando abiertamente el diagnóstico (no solo el de la OECD en 2004[16]) de revisar seriamente el accionar de las facultades de educación, incluye esta estupefaciente sugerencia:

> Atendiendo a la importancia de contar con una efectiva coordinación institucional de las carreras de formación docente en las instituciones universitarias que las imparten, establecer en las instituciones de formación docente entidades coordinadoras únicas (Facultades o Escuelas de Educación) para las carreras de Pedagogía. (p. 180)[17]

(Tradicionalmente, en Chile, las carreras de pedagogía en Matemáticas pertenecen ya sea a una facultad de Educación, o a una de Ciencias o de Matemáticas, o bien están adscritas a una vicerrectoría académica).

4.2.2 Un horizonte cercano

En marzo de 2020, tres lustros después del Informe de la OECD, con la pandemia en ciernes, y en la misma sala del antiguo edificio del Congreso Nacional, hoy muy visible, en que se entregó oficialmente aquel informe al país, se presentó un libro de más de 400 páginas destinado a horizontes y propuestas para transformar el sistema educacional chileno (Corvera y Donoso-Torres, 2020). Distinguidos educadores fueron convocados para escribirlo, pero no se invitó a ningún científico. La matemática no es un tema del libro: el vocablo aparece 12 veces en total (ocho en enumeraciones de asignaturas, dos en referencia a evaluaciones, una para referirse a los resultados de una escuela rural). Tampoco lo es la computación (la cuerda "comput" aparece una vez; "informát" tres veces, dos de ellas a propósito de cambios sociales). "Empleo" aparece tres veces (una en relación con los funcionarios de una escuela, otra referida a la enseñanza técnico-profesional, la tercera a un dato del SENCE). Aun admitiendo la tosquedad de nuestra relación, esta traza manifiesta, entre otras cosas, inconsciencia del cambio en la manera de concebir los aprendizajes que la irrupción de los computadores, la sociedad del conocimiento, etc., conllevan. Un horizonte un tanto limitado, nos parece, pues ignora, *de facto*, un grave problema social que está ocurriendo (Asia-Pacific Economic Cooperation, APEC, 2020) –y sobre el cual, y otros aspectos, seguramente un científico invitado habría levantado la voz–[18].

4.2.3 Un ejemplo amenazante

Si fuera posible, legítimo, o, al menos, no pernicioso ni medroso, buscar algún tipo de consuelo ante el manifiesto desinterés de organismos importantes del Estado por disciplinas y hechos tan relevantes para el futuro de la educación matemática y lo que ello conlleva, podríamos tal vez refugiarnos en la ingenua noción de que, al menos, los programas de estudio de matemáticas no se ven amenazados, y que serán principalmente decididos por personas que se ocupan del tema. Ciertamente, la Unidad de Curriculum y Evaluación del MINEDUC, UCE, por ejemplo, ha tomado siempre ese resguardo. Sin embargo, hay razón para preocuparse al respecto.

Tomemos, como muestra, algunas ideas del último libro de un educador de renombre (Perkins, 2017), que promovió en una reciente visita a nuestro país como consultor, y en el cual se pregunta qué deben aprender los estudiantes para el futuro, y que se ocupa explícitamente de "Renovar las disciplinas" (p. 166), y

[16] En ese tiempo, un número importante de universidades del país intervino sus facultades de educación.
[17] Por si quedara alguna duda: este párrafo no pretende, ni podría pretender, menoscabar el trabajo de las facultades de educación. Por otra parte, el tema al que aludimos es serio y, más allá de que no se vea bien en negro sobre blanco, debe remediarse.
[18] Por obvio, es ocioso decir que no pretendemos tener competencias para juzgar del contenido de los artículos que componen el libro; pero aprovechamos de manifestar nuestra admiración por un buen número de las personas que los escribieron.

de "Reformular las disciplinas" (p. 171) en el currículo. Nos había llamado la atención una frase: "He venido a alabar las disciplinas, no a enterrarlas para siempre" (p. 122)[19].

A pesar de su declaración de amor por la matemática, no las comprende suficientemente bien (esto es, para la tarea que se propone), y está notoriamente atrasado respecto de su enseñanza. Su desaliñado manejo de fórmulas comete errores análogos al de pensar que el crecimiento es proporcional cuando el aumento de una variable comporta el de la otra, y se aventura en la manera ya largamente desacreditada en que las utilizó David Hartley en 1749 en sus estudios "cuantitativos" sobre ética (Hartley, 1834[20]). Podemos convenir en que es disculpable que la matemática no sea el lado fuerte de aquel autor. Sin embargo, que pretenda incidir, aconsejar sobre el asunto, y que suponga que el área necesite de sus hallazgos sobre la materia, es ya (como se usaba decir cuando el pan no se compraba en las tiendas) "harina de otro costal". Por ejemplo, nos ofrece una "sorpresa para ti lector" (p. 26) que descubrió, nos aclara más adelante, en un viaje a Tasmania, donde alguien propuso estudiar la ecuación (sic) cuadrática como "una manera de configurar el crecimiento"; le pareció "un pensamiento fantástico"; incluso, le dio un nombre: "el gran ahorro" (p. 68).

Que alguien se equivoque en matemáticas no es inusual –si bien no siempre ocurre tan ostensiblemente, y nunca es un adorno–. Lo preocupante es que crea que puede ofrecer lineamientos para el currículo de matemáticas alguien que, por ejemplo, alegremente subscribe a otro autor (Postman, 1995) que expresa que "Objetivos pregonados de manera habitual como la preparación para el mundo laboral o la familiaridad con las tecnologías son 'falsos dioses' que juegan con el tema educativo de manera trivial", y que considera que los métodos educativos son "un mero 'problema de ingeniería'" (p. 163). Su propia manera (la de Perkins) de considerar el currículo en general se le "antoja algo como un manantial de agua limpia comparado con el lodazal (sic) de la educación envuelta únicamente en logros académicos, información y conocimientos técnicos" (p. 212). Podemos convenir, al menos, en que esa su expresión es un tanto fuerte. Tal vez sea más preocupante que esa visión parcial, según declara, provendría de un camino hacia la sabiduría ya emprendido –difícil, por tanto, de controvertir, pero que, en todo caso, no aprecia la profundidad de los acontecimientos que afectan a la educación en su conjunto–.

Por de pronto, y como modo de alertarnos, puede venir al caso citar, un tanto sorpresivamente, la definición que Lee Shulman cuenta haber recibido de enfermeras a quienes preguntó cuál era su rol profesional: somos, le dijeron la última línea de defensa del paciente frente al médico (Shulman et al., 2009). Lejana, sugestiva, seguramente injusta, pero, a la vez, oportunamente inspiradora, metáfora.

Antes de salir de este páramo y aun cuando no es, realmente, necesario, reiteramos que aquí mostramos la existencia de un caso, que se opone a otros, más cercanos y bastante más virtuosos[21].

4.2.4 Sobre el cuantificador universal

Para todos nosotros, siempre es un agrado hablar de matemáticas, aunque sea elemental. Esta, tal vez única vez, se hará con alguna reticencia.

Cuando hablamos de un debate de todas las personas concernidas, queremos decir eso, *todas*. La aclaración debe hacerse, porque es un hecho demostrable que no siempre (o tal vez, a menudo), no se entiende así. En lo que sigue hay un par de ejemplos, como muestra. Advierto al lector, como se suele hacer según la etiqueta contemporánea, que las imágenes que siguen son un tanto fuertes.

El ya citado Informe de la Comisión por la Formación Inicial Docente en Chile, de 2005, que usa la expresión "todos los actores" (p. 66, *e. g*.), señala, con cierta satisfacción, que "al Encuentro asistieron 210 participantes... El 38% de los asistentes procedían (sic) de regiones" (p. 15). No menciona, sin embargo, que, en su elaboración, participó solo 6% (sic) de personas que no eran de la capital del país (un cuarto del número de representantes de la universidad santiaguina anfitriona), la mitad del cual no lo hizo por su condición de regional, sino como presidente de los decanos de educación del CRUCH.

Por su parte, el también mencionado Informe del Consejo Asesor Presidencial para la Calidad de la Educación (2006), lista, a menos que nuestro

[19] En este caso, la abducción produce reacciones similares a las de otras abducciones, frecuentes en la literatura de ficción.
[20] "...the fear of God will still be the middle proportional between the love of the world and the love of God" (p. 526); "...since then W:F::F:L, W=F^2/L" (p. 527). Luego, hay que calcular los límites al infinito.
[21] Por ejemplo: en una reunión de los académicos involucrados en formación inicial de facultades de ciencias de tres universidades chilenas, un invitado externo presentó temas relevantes en la enseñanza de las ciencias. Los asistentes se preguntaron qué especialidad científica experimental tenía ese doctor en educación, entonces decano de educación de otra universidad.

cálculo sea excesivamente entusiasta, un 16% de personeros de regiones (igual que para una de las universidades santiaguinas convocadas), algunos de ellos representantes de asociaciones. Por lo demás, había tres alcaldes, todos de comunas de Santiago, y un presidente de una asociación de padres y apoderados... de la Región Metropolitana[22].

5. Nuestra tarea en la actualidad

5.1 Rol de la matemática

Recordemos que la educación debe preocuparse de formar aprendices autosuficientes y para toda la vida[23]. Asimismo, usar computadores en el aula parece ahora más claro que hace un par de años. La necesidad del trabajo colaborativo es otra demanda social del siglo. Se debe, además, defender y atender a la identidad cultural del país, y también a las de grupos específicos.

Ahora bien, pensar que lo anterior sea independiente de lo que sucede en el aula de matemáticas procede, seguramente, de no haber tenido tiempo de ver con claridad los propósitos del aprendizaje de la disciplina. Estos son sugeridos en parte por las cuatro habilidades cuyo desarrollo expresamente le encarga el currículo; adicionalmente, la conjetura, la experimentación, el descubrimiento, el razonamiento matemático, todo apunta al desarrollo del pensamiento independiente, al desarrollo y ejercicio de la libertad.

5.2 El profesor, nuevamente

Imaginemos un profesor que enseña matemáticas en la actual pandemia. En términos generales, y dependiendo del nivel educativo en el que se desempeñe, antes del COVID-19, laboraba ya entre 1,5 y 1,8 veces la media de horas de los países de la OECD, y sabemos que las exigencias sobre él son múltiples, provienen de demasiadas direcciones, suelen ser contradictorias entre sí... y han aumentado y se han diversificado.

Con entera seguridad, ese profesor es consciente de que sus estudiantes, según los niveles, esperan mucho de él, tanto en su cercanía pedagógica como en su enseñanza de matemáticas. Inevitablemente, se inclinará hacia uno u otro polo de su hacer, y parece posible que deba preguntarse al respecto, si bien no es seguro que la formación recibida le permita integrarlos armónicamente (OECD, 2004).

Probablemente un tema que también le preocupa es el de la evaluación de los aprendizajes, y, al respecto, es verosímil que considere que educar en matemática consiste en enseñar procedimientos de cómputo (Ávalos, 2014) . Por otra parte, y de acuerdo con estudios recientes, su conocimiento de temas específicos de la disciplina se sitúa bajo el 40% (CPEIP, 2017).

Por otra parte, es muy posible que esté pensando en cómo sacar mayor provecho de la tecnología, cómo ello modifica todo lo anterior, y cómo orientar el ambiente de su aula hacia el trabajo colaborativo de los estudiantes.

Su tarea pedagógica (separada aquí con propósitos de análisis) le hace mayores demandas, y, como decíamos, atender a ella y a la vez a la especificidad de la matemática, cosa que considera, naturalmente, su deber, le plantea una ecuación de resolución aparentemente imposible. Además, se preguntará, tal vez a menudo, cómo se motiva el aprendizaje de temas específicos de la disciplina.

En otras palabras, en términos generales, está, como cualquier persona que se ocupa del tema, procurando sintonizar con la dirección de los acontecimientos. No parece obvio, sin embargo, que su formación inicial, o la cultura de la institución en que se desempeña, ni las diversas instancias de desarrollo profesional que añade a su agenda ya muy apretada, le provean de los elementos que necesita para ir elaborando su propia síntesis, a la vez que enfrentando los desafíos que tiene ante sí.

Podemos apostar a que la falta de aquellos elementos es más gravosa mientras más acendrada sea su vocación de profesor[24].

5.3 Trabajo colaborativo

El trabajo colaborativo es hoy, como todos sabemos, una necesidad en empresas, en la academia y en otras asociaciones. En particular, en educación, ayuda a desarrollar virtudes cívicas significativas, como, por

[22] Hay, también en esto, honrosas excepciones, debidas a quienes ponen un especial cuidado en que sus equipos no manifiesten esa descarada vocación metropolitana que venimos señalando.

[23] Ello tiene, además, la virtud de mostrarnos que las aulas no deben solamente procurar preparar para un futuro incierto, sino además tener su propio presente, aunque solo sea para no escamotear parte de la vida de los estudiantes.

[24] No tenemos datos estadísticos sobre este tema, salvo los de la literatura que se menciona. En todo caso, el cuadro que reseñamos ha sido corroborado por un centenar de profesores provenientes de gran parte del país.

ejemplo, procurar convencer en lugar de imponer (MINEDUC, 2019).

Ahora bien, es una hipótesis razonable que parte de la resistencia que presentan instituciones escolares y personas concernidas ante las nuevas demandas en la educación matemática (Centro de Investigación Avanzada en Educación y Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile, CIAE-CMM, 2016; OECD, 2017, *e. g.*) esté relacionada con no aceptar que la forma de trabajar haya cambiado. Uno podría conjeturar que un ingeniero de hace un par de siglos a cargo del diseño y ejecución de unas obras en una región muy remota podría encontrar problemas no previstos en la literatura que manejaba ni en su experiencia personal, y debía ser capaz de resolverlos por su cuenta. Tal hipótesis es ahora difícil de concebir. Sin embargo, es interesante notar que, contrariamente a lo que sucede en las ciencias experimentales, en que los cultores acostumbran a aceptar resultados obtenidos por otros, en matemáticas se supone que el especialista puede dar cuenta de todo su razonamiento, *ab initio*.

Naturalmente, la necesidad de trabajo colaborativo no es en absoluto una práctica social novedosa. Lo que podría serlo es que algunas concepciones relacionadas con ello –y que podrían fundamentarlo– han variado; por ejemplo, modelos actuales han cambiado el foco desde la competición a la colaboración como motor de la evolución de las especies (Cazzolla, 2016; y, en particular, para el caso humano y desde su propia perspectiva, Maturana, 2003).

5.4 Nuestro cometido

Estamos, pues, todos enfrentados a un problema mayúsculo, difícil, que no podemos resolver sino en forma comunitaria, pues no conocemos todas sus aristas, pero sobre el cual no tenemos derecho a improvisar.
Es necesario tener presente que toda respuesta que se dé a la problemática que venimos describiendo es, inevitablemente, transitoria, y ella y cada una de sus partes deberán evolucionar, justificarse... y, eventualmente, ser reemplazada por otra mejor.

Por sobre otras consideraciones, parece apropiado insistir en que el asunto es urgente, y que hay personas que sufren y pierden oportunidades por los yerros, indecisiones, improvisaciones, faltas de claridad, actitudes puramente ideológicas[25], etc.

Más aún, debemos reiterar que no avanzar en esto, o hacerlo en forma muy lenta, significa, de hecho, retroceder comparativamente.

6. La nueva reforma

Mientras, en Chile, los principales actores concernidos con la educación matemática no terminan de ponerse de acuerdo, en otros países ya se han concordado políticas generales de desarrollo que los llevan en una dirección mejor definida. Sin embargo, pensar que nuestra estrategia debería consistir en seguir tratando de “apurar el tranco” para intentar (sin demasiada esperanza) alcanzarlos, sería un gran error. Ello no solo porque, de hecho, no hay visos de que ello haya, alguna vez, resultado, ni únicamente porque aquella estrategia no podría impedir que nuestro sistema educacional siguiere aumentando la desigualdad; ni siquiera porque la nueva reforma es más amplia y profunda que la anterior, sino más bien porque ella tiene un carácter diferente de la que hemos descrito. Por lo demás, ella podría también dar mejores oportunidades a los más desposeídos, que suelen quedar a la vera de estos caminos.

Al respecto, llevar a cabo el debate que proponemos es, manifiestamente, una empresa difícil. Más que de modificaciones al currículo, el tema es la dirección que este debería tomar, de acuerdo con el escenario actual y el de un futuro más bien inmediato. Las personas concernidas son muchas, y sus perspectivas e intereses, variados. Con seguridad, habría intervenciones de carácter filosófico o ideológico, y la discusión podría tender a prolongarse hasta que se solucione un buen número de otros problemas del país. Sin embargo, en algún momento, ese debate debería tomar un carácter más específico, sustentarse en información, estudios y evidencias, y establecer un sustrato mínimo de conocimiento a partir del cual construir. Como sea, no podremos verdaderamente avanzar, si no terminamos de aprender las lecciones de la historia que hemos venido describiendo.

La nueva reforma es natural, inevitable, necesaria, demandante. No se refiere solo al currículo de matemáticas. Explica y jerarquiza las habilidades del currículo. Modifica un tanto lo que habitualmente entendemos por cognición. Puede dar mejores oportunidades a los más necesitados. Requiere, sin embargo, de una perspectiva adecuada. Procuraremos explicitarla en la tercera parte de este ensayo.

[25] Como la de traer muchos profesores del extranjero, para aumentar la competencia.

Referencias

APEC. (2020). COVID-19 Hastens Automation, Singapore: APEC Policy Support Unit. https://www.apec.org/Press/News-Releases/2020/0626_Future

Apostol, T. M. (1967). *Calculus – One-variable Calculus, with an introduction to Linear Algebra*. Blaisdell.

Artigue, M. (1989). Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles en premier cycle universitaire. *Cahiers du Séminaire de Didactique des mathématiques et de l'informatique.* IMAG-LSD.

Ávalos, B. (2014). La formación inicial docente en Chile: Tensiones entre políticas de apoyo y control. *Estudios Pedagógicos (Valdivia), 4*(Especial), 11-28. https://doi.org/10.4067/S0718-07052014000200002

Baldor, A. (1997). *Álgebra.* Publicaciones Cultural.

Ball, D. L., Thames, M. H., Bass, H., Sleep, L., Lewis, J., y Phelp, G. (2009). A practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, y C. Sakonidis, (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1* (pp. 95-98). Psychology of Mathematics Education.

Bocheński, I. M. (1961). *A History of Formal Logic.* University of Notre Dame Press.

Bourbaki, N. (1939-2016). *Éléments de Mathématique.* (11 Vol.). Hermann.

Cajori, F. (1928-1929). *A History of Mathematical Notations.* Open Court.

Cazzolla, R. (2016). A conceptual model of new hypothesis on the evolution of biodiversity. *Biologia, 71*(3), 343-351. https://doi.org/10.1515/biolog-2016-0032

Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas. (2017). *Resultados nacionales: Evaluación Nacional diagnóstica de la Formación inicial docente 2017.* https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2018/07/Informe-Nacional-END-2017.pdf

Chevallard, Y. (1982). *Sur l'ingénierie didactique.* Texte préparé pour la deuxième Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=195

CIAE-CMM (2016). *Identificación de elementos críticos para fortalecer la formación de profesores en el área de matemática de Pedagogía en Educación Básica en Chile.* https://www.google.com/search?q=CIAE-CMM+2016&oq=CIAE-CMM+2016&aqs=chrome..69i57.7500j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8

CIAEM-IACME. (2022). *Conferencias CIAEM 1961-2003.* https://ciaem-iacme.org/ciaem-1961-2003/

Comisión sobre Formación Inicial Docente. (2005). *Informe Comisión sobre Formación Inicial Docente.* https://www.academia.edu/36119920/INFORME_COMISI%C3%93N_SOBRE_FORMACI%C3%93N_INICIAL_DOCENTE_2005_Serie_Bicentenario

Consejo Asesor Presidencial para la Calidad de la Educación. (2006). *Informe del Consejo Asesor Presidencial para la Calidad de la Educación.* http://www.opech.cl/bibliografico/doc_movest/informe_final_consejo_asesor2.pdf

Corvera, M. T., y Donoso-Torres, O. (Eds.). (2020). *Horizontes y propuestas para transformar el sistema educacional chileno.* Ediciones Biblioteca del Congreso. https://www.bcn.cl/publicaciones/obtienearchivo?id=documentos/10221.1/78612/3/LIBRO_HORIZONTES_FINAL_5_MARZO.pdf

Dieudonné, J. (1964). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire.* Hermann.

Dieudonné, J. (1968). *Éléments d'analyse: Fondements de l'analyse moderne.* Gauthier Villars.

Eyzaguirre, B., y Fontaine, L. (1997). *El futuro en riesgo: Nuestros textos escolares.* Centro de Estudios Públicos.

Fehr, H. F., Camp, J., y Kellogg, H. (1971). *La revolución en las matemáticas escolares (segunda fase).* Organización de Estados Americanos.

Feynman, R. (1965). New textbooks for the "New" Maths. *Engineering and Science, 28*(6), 9-31.

Godement, R. (1963). *Cours d'Algèbre.* Hermann.

Granville, W. A., y Smith, P. F. (1904). *Elements of the Differential and Integral Calculus.* The Ateneum Press.

Hartley, D. (1834). *Observations on Man, his frame, his duty, and his expectations.* Thomas Tegg and Son.

Hilton, P. (1971). Topology in the High School. *Educational Studies in Mathematics, 3*(3/4), 36-53. https://doi.org/10.1007/978-94-017-5896-3_11

Kitchen, J. W. (1968). *Calculus of One Variable.* Addison-Wesley.

Klein, F. (2006). *Matemática elemental desde un punto de vista superior. Aritmética. Álgebra. Análisis.* Nivola.

Kline, M. (1973). *El fracaso de la matemática moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* Siglo XXI.

Lakoff, G., y Núñez, R. L. (2000). *Where Mathematics* *comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* Basic Books.

Leithold, L. (1992). *El Cálculo con Geometría Analítica.* Harla.

Leyton, M. (2017). *Creación y primeros años del CPEIP.* https://www.cpeip.cl/mario-leyton-aniversario/

Maturana, H. (2003). *Amor y juego. Fundamentos olvidados de lo humano. Desde el patriarcado a la democracia.* JC Sáez Editor.

Mena Lorca, A. (2022). Sobre la nueva reforma de la educación matemática: invitación a un debate, 1. *Revista Chilena de Educación Matemática, 14*(1), 4-16. https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i1.107

Ministerio de Educación. (2009). *Ley 20370. Establece la Ley General de Educación.* Autor. https://www.bcn.cl/leychile/navegar?idNorma=1006043

Ministerio de Educación. (2019). *Fundamentos Bases Curriculares 3° & 4° Medio.* Unidad de Curriculum y Evaluación. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Basescurriculares/91414:Bases-Curriculares-3-&-4-Medio

Núñez, A. (2021). *Una secuencia didáctica para el estudio de las fracciones iguales desde la perspectiva del Estudio de Clases y el Espacio de Trabajo Matemático.* [Tesis de Maestría no publicada. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso].

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2004). *Revisión de Políticas Nacionales de Educación. Chile.* PISA, OECD Publishing.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2017). *Education in Chile, Review of national policies for education.* PISA, OECD Publishing.

Oteiza, F. (2004). *Aprender matemática creando soluciones: desarrollo de un modelo interactivo para el aprendizaje matemático, de bajo costo y alto impacto para profesores y estudiantes de séptimo básico y segundo medio.* http://repositorio.conicyt.cl/handle/10533/112917#

Peirce, C. S. (1998). *The Essential Peirce. Volume 2. Selected Philosophical Writings (1893-1913).* Indiana University Press.

Perkins, D. (2017). *Educar para un mundo cambiante. ¿Qué necesitan aprender realmente los alumnos para el futuro?* Ediciones SM.

Postman, N. (1995). *The end of education: Redefining the value of school.* Alfred A. Knof.

Shulman, L., Benner, P., Sutphen, M., Leonard, V., y Day, L. (2009). *Educating Nurses: A Call for Radical Transformation.* Jossey-Bass. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Swokowski, E. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica.* Grupo Editorial Iberoamericano.

Zermelo, E. (1908). Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. *Mathematische Annalen, 65*(2), 261-281. https://doi.org/10.1007/BF01449999

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

PROPUESTAS DIDÁCTICAS

https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i1.105

DISCORDANCIAS DEL CURRÍCULO ESCOLAR: HOMOTECIA MÁS ALLÁ DE LA PROPORCIONALIDAD

SCHOOL CURRICULUM DISCORDANCES: HOMOTHETY BEYOND PROPORTIONALITY

Juana Gómez Calalán
jgomez.rcv@gmail.com
Colegio Rubén Casto, Valparaíso, Chile
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

Melissa Andrade-Molina
melissa.andrade@pucv.cl
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

RESUMEN

El objetivo de este artículo es explorar las discordancias que emergen al contrastar los lineamientos curriculares, respecto al desarrollo de las habilidades para la conformación de un ciudadano productivo y las actividades propuestas en documentos oficiales distribuidos por el Ministerio de Educación de Chile. Para ello, se analizan textos escolares –con el fin de localizar estas discordancias– y una propuesta de situación didáctica, enmarcada en el Estudio de Clases y en la Teoría de Situaciones Didácticas, para examinar posibles caminos para que los estudiantes identifiquen elementos constitutivos de homotecia y desarrollen las habilidades declaradas en las Bases Curriculares. La implementación revela que la propuesta ayuda a atender las discordancias identificadas.

PALABRAS CLAVE:
Homotecia, Propuesta de aprendizaje, Discordancias, Geometría escolar.

ABSTRACT

This paper aims at exploring the discordances that emerge when contrasting curricular guidelines, in relation to the development of skills and competencies needed to shape productive citizens, and the set of activities proposed in pedagogical materials from the Ministry of Education in Chile. School mathematics textbooks—to unveil the discordances—and to a didactic proposal—framed within the Lesson Study and Theory of Didactical Situations—were analyzed to examine possibilities for students to identify constitutive elements for homothety and develop the abilities enounced in the Chilean official curricular guidelines. The implementation section of this study reveals that this proposal helps in addressing the identified discordances.

KEYWORDS:
Homothety, teaching proposal, discordances, school geometry.

Recibido: 18 de febrero de 2022 , Aceptado: 21 de marzo de 2022

1. Introducción

En un contexto escolar se asume que la geometría, como disciplina científica, destaca por procesos de formalización que aportan a la comprensión del entorno, además de potenciar la formación del individuo, dado el trabajo sistemático, riguroso, de abstracción y generalidad que conlleva su estudio (ver Castiblanco et al., 2004). Actualmente, en lugar de enfrentar al estudiante a este tipo de procesos, la enseñanza de la geometría escolar se centra, más bien, en la memorización y aplicación de fórmulas, con estrategias pedagógicas como la algebrización de la geometría en la escuela –que ha sido reconocido como un "error pedagógico" cuando el desplazamiento entre aritmética y álgebra se salta la geometría (Guevara-Casanova y Burgués-Flamarich, 2018)–. Este fenómeno ha sido explorado, por ejemplo, como una falta de propuestas metodológicas que imposibilitan dar sentido y significado al aprendizaje de la geometría (Barrantes y Blanco, 2005). La geometría escolar busca desarrollar capacidades espaciales que permitan a los estudiantes comprender matemáticamente el espacio y sus formas. Y, así, transitar desde lo bidimensional a lo tridimensional –por ejemplo, mediante el uso de herramientas tecnológicas para facilitar la visualización y manipulación de figuras y formas (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2015)–. Sin embargo, la geometría escolar se enfoca en la enseñanza de un espacio Euclidiano en el que las figuras y cuerpos solo pueden ser concebidos bajo una aprehensión humana específica del mundo y accedidos a través de herramientas tecnológicas o filtros perceptuales (Brown y Heywood, 2011).

En Chile, el MINEDUC presenta las estructuras curriculares y la distribución de los contenidos matemáticos para los niveles de escolarización obligatoria a través de diversos materiales (e. g. Bases Curriculares). Pero, a pesar de que esa distribución sea expresada en cantidad de horas sugeridas para cada unidad, desde hace algunos años se priorizan ciertos contenidos por sobre otros en el aula de matemáticas (ver Abrate et al., 2006). Esta priorización, en la mayoría de los casos, va en detrimento de contenidos geométricos. Tal afirmación se sustenta en resultados obtenidos mediante evaluaciones estandarizadas que revelan aprendizajes no logrados y competencias no desarrolladas en el eje de geometría (i. e. TIMSS 2019 (ACE, 2020)). Los resultados que presenta la Agencia de la Calidad de Educación en Chile (ACE) revelan que el rendimiento en geometría es significativamente menor que el rendimiento en otras áreas de la matemática. De igual manera, el Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE), prueba que se encarga de medir los niveles de aprendizaje a nivel nacional, ha arrojado que, a pesar de observar un incremento en los niveles de logro durante los últimos 10 años, más del 50% de los estudiantes no alcanza los niveles de desempeño esperado (ver ACE, 2015).

La geometría se posiciona como un área de la matemática escolar en necesidad de propuestas metodológicas que potencien las habilidades esperadas para un ciudadano productivo (de modo de alcanzar los niveles de logro). La investigación en el campo de la educación matemática ha advertido las ventajas del uso de herramientas tecnológicas para la enseñanza de la geometría. Por ejemplo, Gamboa (2007) argumenta que la incorporación de tecnología ha modificado significativamente la forma en que los estudiantes aprenden matemáticas, debido a las diferentes posibilidades para explorar y comunicar ideas matemáticas. El uso de herramientas tecnológicas permite, además, potenciar el desarrollo de habilidades propias de la geometría, tales como la exploración, visualización, argumentación y justificación, concediendo a los estudiantes la posibilidad de descubrir, aplicar y obtener sus propias conclusiones (Gamboa y Ballestero, 2010). No obstante, al explorar el currículo escolar, el tratamiento de la geometría no permite, necesariamente, desarrollar estas habilidades en los estudiantes. Particularmente, al centrar la atención en ciertos objetos matemáticos como el de homotecia es posible observar que el énfasis está puesto en aplicar técnicas y fórmulas más que en concebir a la homotecia como una relación entre perspectiva e infinidad de transformaciones geométricas que puede tener un cuerpo o figura.

Una revisión de los materiales entregados por el MINEDUC muestra que, para el contenido de homotecia, se enfatiza el uso de proporcionalidad, particularmente de razón, para obtener figuras homotéticas como resultado de una transformación en el plano –lo que conlleva a una concepción estática de la homotecia de figuras homotéticas fijas (Lemonidis, 1990)–. Esto lleva a cuestionar si la utilización de razón y proporción propicia en el estudiante la comprensión de la homotecia para resolver problemas de la vida cotidiana. Por el contrario, una exploración epistemológica de la homotecia muestra cómo sus aplicaciones se relacionan con la necesidad de dibujar objetos distantes y la fabricación de máquinas que facilitaban esta tarea (Bartolini Bussi y Maschietto, 2007). En estos escenarios, la homotecia se convierte en un medio para replicar o calcular segmentos de objetos medibles solamente a través de una proyección. La homotecia surge bajo una idea de movimiento y transformación de figuras en el plano y en el espacio que hicieron posible el estudio del dibujo en perspectiva y la geometría proyectiva.

Esta revisión también expresa la importancia de desarrollar habilidades matemáticas (MINEDUC, 2015) y habilidades del siglo XXI (ver MINEDUC, 2019). Ambas habilidades son reconocidas como necesarias para la alfabetización matemática del ciudadano productivo al jugar "un papel fundamental en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos y en la aplicación de conocimientos en contextos diversos" (MINEDUC, 2015, p. 97). Por ejemplo, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares debe escapar de la aplicación de técnicas y memorización de fórmulas para moverse hacia resolver problemas de la vida diaria. Aquí, la resolución de problemas es considerada como un eje vertebral para adquirir una "buena educación matemática" (MINEDUC, 2015), que implica usar estrategias, comprobar, comunicar, experimentar, inventar, tomar decisiones, representar, modelar, simular, evaluar, etc. Para el MINEDUC (2015), la resolución de problemas también fomenta el pensamiento autónomo, reflexivo, crítico y creativo dado que "muchas veces lo que más aporta en el aprendizaje… [es] el proceso de búsqueda creativa de soluciones" (p. 97). Ambas habilidades se nutren entre sí para conformar el ciudadano. De esta forma, el objetivo de este artículo es explorar cómo una aproximación alineada a la teoría de situaciones didácticas sobre la homotecia, utilizando las herramientas digitales actuales, podría servir como puente para acercar al estudiante a la homotecia y darle sentido a su estudio junto con desarrollar habilidades matemáticas y habilidades del siglo XXI.

2. Exploración curricular

Una exploración de los textos escolares distribuidos por el MINEDUC a establecimientos públicos y subvencionados de Chile permite observar una visión acotada sobre la geometría escolar. Esta visión conlleva al surgimiento de ciertas discordancias en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría escolar. Esta exploración se centra en la homotecia como eje vertebral para ejemplificar las discordancias que emergen al contrastar el tipo de habilidades que los estudiantes deben desarrollar (según las guías curriculares) y los ejercicios propuestos para la enseñanza de la homotecia en los textos escolares.

Según la estructuración curricular, la homotecia corresponde a los contenidos de Primer Año de Enseñanza Media (14-15 años), la exploración de los textos escolares –Guía Didáctica Docente (GDD) (Arancibia, 2021) y Texto del Estudiante (TdE) (Fresno et al., 2021)– corresponde a ese nivel escolar. La GDD es un texto dirigido a los docentes como complemento al TdE (los estudiantes no tienen acceso a la GDD). En la GDD se sugiere abordar la homotecia como una "transformación geométrica" que permite obtener "una figura proporcional a la original que es igual respecto a su forma" (Arancibia, 2021, p. 247). Se propone un tiempo estimado de 30 horas pedagógicas para abarcar la homotecia en conjunto con el teorema de Tales (Lección 8 de la Unidad 3) y desarrollar las habilidades matemáticas de *identificar, explicar, representar, comparar, calcular, resolver, construir, analizar, evaluar y crear.* Dado el interés por vincular el conocimiento matemático con las preocupaciones actuales a nivel nacional e internacional, el estudio de la homotecia se vincula al tema central de la Unidad 3: el medio ambiente. Con esto se espera que la enseñanza de la homotecia se articule bajo una reflexión sobre la importancia del cuidado y preservación de la naturaleza. En el TdE, la homotecia se aborda al vincular elementos claves como el quinto postulado de Euclides y puntos de fuga: "el quinto postulado de Euclides indica que por un punto exterior a una recta paralela pasa una única paralela […] el punto de fuga se relaciona con la geometría no euclidiana, ya que las paralelas convergen por la perspectiva utilizada" (Fresno et al., 2021, p. 104). Esta descripción se acompaña con una imagen en perspectiva de las vías de ferrocarril en San Pedro de Atacama, en la que las vías paralelas parecen converger en el horizonte.

2.1 Primer acercamiento a Homotecia

La GDD sugiere que, para resolver problemas de homotecia, los estudiantes requieren repasar operatoria con números racionales, razones y proporciones y ecuaciones lineales. De esta manera, el TdE inicia con una serie de ejercicios para *motivar y activar ideas previas*. Los estudiantes deben operar con números racionales, determinar valores desconocidos mediante proporcionalidad y resolver problemas de proporciones en contextos diversos (ver Arancibia, 2021). Además, en la GDD se sugiere explicar "la importancia del uso de las proporciones en la elaboración de planos en arquitectura y mapas de geografía" (Arancibia, 2021, p. 245). Posteriormente, en el TdE aparece una actividad con la que se espera profundizar la noción de proporcionalidad al examinar similitudes en una fotografía del Parque Nacional Conguillío en la Araucanía. En esta imagen se observa un conjunto de araucarias (árboles nativos de la Región de Arauco) a diferentes distancias del observador, los estudiantes deben responder si es posible generar imágenes conservando la forma al aumentar o disminuir proporcionalmente su tamaño para introducir la noción de homotecia. La siguiente figura (Figura 1) presenta una actividad que espera acercar a los estudiantes a identificar ciertos elementos claves en la imagen de los pinos, algo que resulta más explícito al dibujar las líneas punteadas (ello indica que la respuesta espera una transformación geométrica específica).


Un pino corresponde a un tipo de árbol con tronco fuerte y rugoso, cuyas hojas son estrechas y parecen agujas. Existen más de 100 especies de pinos y están repartidas por todo el mundo en diferentes continentes. Algunos pinos se encuentran casi extintos y requieren que sean protegidos en parques nacionales para asegurar su bienestar.

Observa la siguiente imagen, y luego responde.

- ¿En qué se parecen los dos pinos?
- ¿Cómo podrías obtener el pino de la derecha a partir del de la izquierda?
- Investiga junto con tus compañeros acerca de si los pinos producen algún efecto negativo o positivo en el medioambiente chileno. Argumenta tu respuesta.

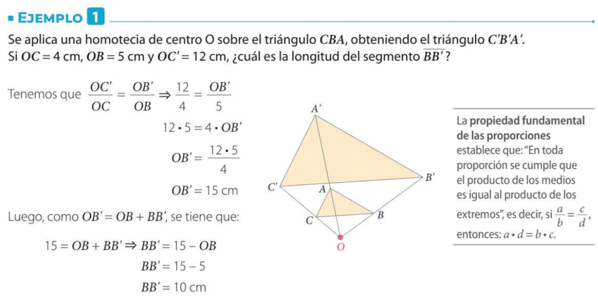
Figura 1. Introducción de Homotecia.

Nota. Texto del Estudiante, Primer Año Medio (Fresno et al., 2021, p. 107).

Esta actividad es seguida por la definición escrita de homotecia. La definición expone términos con los que los estudiantes deben familiarizarse para resolver los problemas propuestos durante el desarrollo de la unidad, tales como transformación geométrica, ampliar, reducir, razón de homotecia y centro de homotecia:

> Una homotecia es una **transformación geométrica** en la que se obtiene una figura a partir de **ampliar** o **reducir** otra, multiplicando cada trazo por un mismo valor distinto de 0, llamado **razón de homotecia**, con lo que la imagen obtenida conserva la forma de la original en el mismo sentido o invertida, por tanto, sus trazos son proporcionales y la unión de los puntos homólogos convergen en un punto llamado **centro de homotecia**. (Fresno et al., 2021, p. 107)

A continuación (Figura 2), el TdE presenta un ejemplo para conectar proporcionalidad y homotecia, ubicando algunos elementos mencionados en la definición, como centro de homotecia.



Ejemplo 1

Se aplica una homotecia de centro O sobre el triángulo CBA, obteniendo el triángulo $C'B'A'$.
Si $OC = 4$ cm, $OB = 5$ cm y $OC' = 12$ cm, ¿cuál es la longitud del segmento $\overline{BB'}$?

Tenemos que $\frac{OC'}{OC} = \frac{OB'}{OB} \Rightarrow \frac{12}{4} = \frac{OB'}{5}$

$12 \cdot 5 = 4 \cdot OB'$

$OB' = \frac{12 \cdot 5}{4}$

$OB' = 15$ cm

Luego, como $OB' = OB + BB'$, se tiene que:

$15 = OB + BB' \Rightarrow BB' = 15 - OB$

$BB' = 15 - 5$

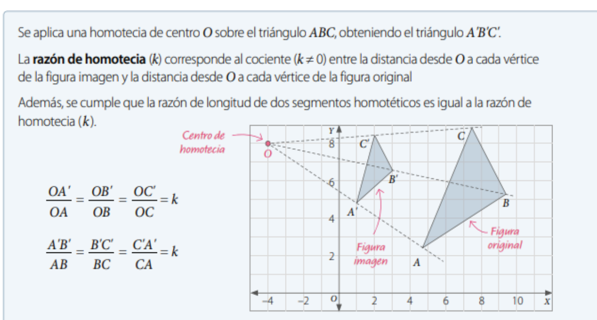
$BB' = 10$ cm

La **propiedad fundamental de las proporciones** establece que: "En toda proporción se cumple que el producto de los medios es igual al producto de los extremos", es decir, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces: $a \cdot d = b \cdot c$.

Figura 2. Ejemplo de Homotecia.

Nota. Texto del Estudiante, Primer Año Medio (Fresno et al., 2021, p. 107).

Finalmente, la proporcionalidad se utiliza para establecer la razón de homotecia (k), que se define en el TdE como el cociente entre las distancias de la figura original y la imagen respecto del origen:



Se aplica una homotecia de centro O sobre el triángulo ABC, obteniendo el triángulo $A'B'C'$.

La **razón de homotecia** (k) corresponde al cociente ($k \neq 0$) entre la distancia desde O a cada vértice de la figura imagen y la distancia desde O a cada vértice de la figura original

Además, se cumple que la razón de longitud de dos segmentos homotéticos es igual a la razón de homotecia (k).

$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = k$

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k$

Figura 3. Razón de Homotecia

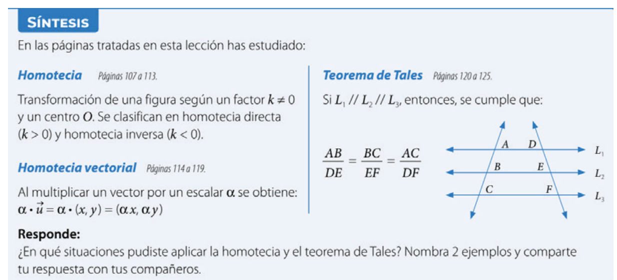
Nota. Texto del Estudiante, Primer Año Medio (Fresno et al., 2021, p. 108).

Y se mencionan las condiciones para que la razón de homotecia (k) sea inversa o directa:

> Dependiendo de la razón de homotecia con k 0, si k > 0, entonces la homotecia es **directa** y las figuras imagen y original quedan en el mismo lado respecto del centro O, mientras que si k < 0 es **inversa** y las figuras imagen y original quedan a distintos lados respecto del centro O. (Fresno et al., 2021, p. 110)

3. Discordancias en la enseñanza de la homotecia

Si bien el primer acercamiento a la homotecia propuesto en TdE y GDD guía al estudiante a identificar elementos constitutivos, el resto de esta sección (Fresno et al., 2021, pp. 107-113) reduce la homotecia a: (i) cálculos de cambio de longitud utilizando proporcionalidad (2 problemas), (ii) cálculos de razón de homotecia (4 problemas), (iii) construcción de la figura resultante dada la razón de homotecia (6 problemas), (iv) aplicación del teorema de Tales (1), (v) vínculo con otras materias, artes visuales: puntos de fuga; ciencias naturales: cálculo de longitud (3 problemas). El resto de los ejercicios circulan dentro del mismo espectro de determinar longitudes, razones, etc. En la siguiente figura (Figura 4) se hace una síntesis, en TdE, sobre los elementos claves abordados en la unidad.



Síntesis

En las páginas tratadas en esta lección has estudiado:

Homotecia *Páginas 107 a 113.*

Transformación de una figura según un factor $k \neq 0$ y un centro O. Se clasifican en homotecia directa ($k > 0$) y homotecia inversa ($k < 0$).

Homotecia vectorial *Páginas 114 a 119.*

Al multiplicar un vector por un escalar α se obtiene:
$\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$

Teorema de Tales *Páginas 120 a 125.*

Si $L_1 // L_2 // L_3$, entonces, se cumple que:

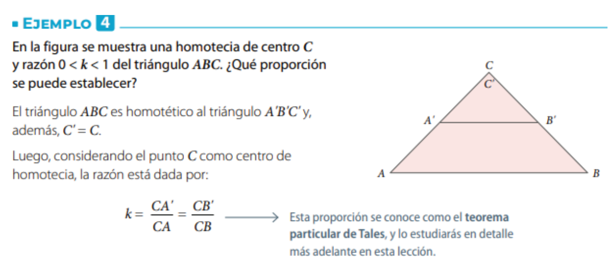
$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

Responde:
¿En qué situaciones pudiste aplicar la homotecia y el teorema de Tales? Nombra 2 ejemplos y comparte tu respuesta con tus compañeros.

Figura 4. Síntesis de la Lección 8

Nota. Texto del Estudiante, Primer Año Medio (Fresno et al., 2021, p. 108).

Aquí, la homotecia deja de concebirse con la profundidad epistemológica que dio inicio a su formalización como una transformación geométrica y es reducida a un método para calcular razones de proporcionalidad de figuras planas (ver Figura 5). Curricularmente se decide vincular la homotecia con el teorema de Tales, estructurando ambos contenidos en la Lección 8. La Figura 5 muestra un ejemplo de la relación entre razón, proporcionalidad y homotecia mediante el teorema de Tales.



Ejemplo 4

En la figura se muestra una homotecia de centro C y razón $0 < k < 1$ del triángulo ABC. ¿Qué proporción se puede establecer?

El triángulo ABC es homotético al triángulo $A'B'C'$ y, además, $C' = C$.

Luego, considerando el punto C como centro de homotecia, la razón está dada por:

$k = \frac{CA'}{CA} = \frac{CB'}{CB}$ ⟶ Esta proporción se conoce como el **teorema particular de Tales**, y lo estudiarás en detalle más adelante en esta lección.

Figura 5. Cálculo de proporciones y teorema particular de Tales.

Nota. Texto del Estudiante, Primer Año Medio (Fresno et al., 2021, p. 109).

Si bien las actividades sugeridas referentes a la homotecia pueden ser resueltas, por ejemplo, utilizando la función lineal de homotecia al reconocer el factor de homotecia, o la distancia entre puntos, estas no son instrucciones declaradas ni en la GDD ni en el TdE. Tal como se observa en el siguiente ejercicio, propuesto en la sección de evaluación (Figura 6), los estudiantes deben operar con conocimientos sobre razón. Este tipo de problemas no están enmarcados dentro del Objetivo de Aprendizaje (OA) propuesto para esta Unidad: OA8. En OA8 se declara que los estudiantes demuestran comprensión del concepto de homotecia cuando (1) la relacionan con perspectiva, el funcionamiento de instrumentos ópticos y el ojo humano, (2) miden segmentos adecuados para determinar las propiedades de la homotecia, (3) aplican propiedades de la homotecia en la construcción de objetos, de manera manual y/o software educativo y (4) resuelven problemas de la vida cotidiana y de otras asignaturas (ver Arancibia, 2021). Esto deja en manifiesto una discordancia sobre lo que curricularmente se declara como aprendizaje esperado y la forma en la que se enuncian los problemas que los estudiantes deben resolver. Una posible explicación se basa en la profundidad con la que un conocimiento matemático es presentado en los materiales curriculares y la importancia para la formación de un ciudadano productivo que se desprende de la comprensión de un contenido matemático específico. En el caso de la homotecia, la importancia se enuncia respecto a aplicaciones relacionadas a la perspectiva, replicar y construir objetos, etc., que podrían tomar relevancia, por ejemplo, para arquitectura y dibujo técnico o entender el funcionamiento de cámaras fotográficas y maquinaría de optometría. Sin embargo, en un contexto escolar, se decide abordar la homotecia como un medio para calcular longitudes y razones en las que una figura varía respecto de su imagen.

A un triángulo de vértices $\boldsymbol{A}(-2, 4)$, $\boldsymbol{B}(-4, 6)$ y $\boldsymbol{C}(-4, 2)$ se le aplica una homotecia de centro $\boldsymbol{O}$ y valor de razón $\boldsymbol{k}$, obteniéndose como imagen otro triángulo de vértices $\boldsymbol{A}'(4, 4)$, $\boldsymbol{B}'(8, 0)$ y $\boldsymbol{C}'(8, 8)$.

a. ¿Cuáles son las coordenadas del centro $\boldsymbol{O}$?

b. ¿Cuál es el valor de razón de homotecia?

Figura 6. Ejercicio Propuesto en la Parte de Evaluación

Nota. Texto del Estudiante, Primer Año Medio (Fresno, 2021, p. 109).

El trabajo con la homotecia en el TdE no menciona conceptos como función de proporcionalidad o la propiedad de colinealidad entre los puntos. La propuesta curricular se construye desde la utilización de la proporcionalidad entre trazos a través de las razones en detrimento de la relación OA''=kOA o la función de homotecia. Más aún, en los ejercicios propuestos en el TdE, se deja entrever que la homotecia es una transformación geométrica estática (dado que k es fijo o se calcula a partir de la razón entre segmentos dados). Ello obstaculiza la concepción de la homotecia como infinitas imágenes (derivada de la función de homotecia). Esto constituye otra discordancia en la que el conocimiento matemático se ve reducido al punto de volverse una herramienta para el cálculo de elementos más que un conocimiento con aplicabilidad en la vida cotidiana con potencial de activar el pensamiento espacial, métrico, variacional y numérico, dado que se incluye el concepto de medida, formas geométricas, patrones, escalas, razones y proporciones, entre otros (Castro Cortes y Jaramillo Riascos, 2019).

Finalmente, no es explícito cómo la propuesta curricular en TdE y GDD permite desarrollar las habilidades matemáticas declaradas para esta unidad. Hay indicios de acuerdo con el verbo que se utiliza para cada enunciado, pero no es evidente para todas las habilidades comprometidas en la Unidad 3.

4. Propuesta didáctica

De la exploración anterior, se logra reconocer la necesidad de proponer problemas que permitan a los estudiantes identificar, autónomamente, los elementos constitutivos de la homotecia en situaciones que involucren un contexto cercano. A su vez, se reconoce la necesidad de proponer actividades enfocadas en el desarrollo de habilidades matemáticas y habilidades del siglo XXI más que en el cálculo repetitivo de, por ejemplo, la razón de homotecia. Estas necesidades se identifican al contrastar los aprendizajes esperados que se declaran en documentos oficiales del MINEDUC con las actividades sugeridas en los textos escolares (GDD y TdE). Por ejemplo, la reducción del concepto de homotecia en el currículo escolar, al convertirse en un saber a enseñar, genera que ciertos elementos no sean el foco de las actividades propuestas en los materiales curriculares.

La exploración curricular lleva a diseñar una propuesta sustentada en dos referentes conceptuales fundamentales: Estudio de Clases (EdC) (Isoda y Olfos, 2009) y Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1998). Se comenzó por el supuesto de que los ciclos del EdC y las fases de la TSD contribuyen a generar las condiciones para el desarrollo de las habilidades matemáticas y del siglo XXI. Por un lado, el EdC es un recurso de investigación en acción que favorece las capacidades de docentes de reflexionar sobre su propia práctica docente (Isoda y Olfos, 2009), impactando positivamente en los aprendizajes de los estudiantes al robustecer y afinar la mirada del profesorado durante el proceso de enseñanza. En esta propuesta, el EdC contribuye a generar un espacio en donde el estudiante deba posicionarse en el rol del observador (centro de homotecia) para resolver problemas de homotecia y, de esta manera, lograr construir su propio conocimiento matemático a partir de conocimientos y experiencias previas. La situación fue diseñada por dos profesoras de Matemáticas siguiendo los ciclos del Estudio de Clases (ver Isoda y Olfos, 2009): *i) Identificación del problema:* se consideró la profundidad con la que se aborda la homotecia en la escuela y el escaso material didáctico y propuestas de aprendizaje planteados por expertos, vale decir, educadores matemáticos. *ii) Planificación* *de la clase:* se propuso una clase enfocada a introducir el concepto de homotecia en concordancia con OA8 presentado en los lineamientos curriculares del MINEDUC. *iii) Implementación*: la clase diseñada fue implementada con un grupo de estudiantes. Esta implementación permitió validar la propuesta de aprendizaje y robustecer ciertos puntos para fortalecer la construcción del concepto de homotecia y el desarrollo de las habilidades matemáticas y del siglo XXI. *iv) Evaluación de la clase y satisfacción con los resultados:* la implementación de la clase fue analizada en conjunto con un grupo de siete profesores de Matemáticas en ejercicio y un académico experto en Estudios de Clases, ello permitió reestructurar la propuesta y redefinirla según los criterios conversados en conjunto. *v) Reconsideración de la clase:* esta reconsideración permitió abrir un segundo ciclo de EdC, que consistió en reajustar la planificación de la clase e implementarla a un grupo diferente de estudiantes, generando la propuesta didáctica presentada y respuestas exploradas en este artículo.

Por otro lado, la TSD (Brousseau, 1998) constituye el fundamento teórico de la propuesta. La propuesta se planteó con el fin de propiciar un *medio* que genere un *conflicto cognitivo* en los estudiantes, dado que el saber se genera, por un lado, mediante procesos de modificación, ruptura y adaptación y, por otro, mediante procesos de interacción con pares (Brousseau, 1998). Las preguntas planteadas fueron diseñadas siguiendo las fases de una situación didáctica: acción, formulación y validación, de manera tal que los estudiantes logren construir una noción inicial de homotecia a partir de la interacción entre pares y no mediante la intervención e instrucción docente. Así, la intervención del docente pierde protagonismo para escapar del fenómeno reconocido como “la obligación social de enseñar” de la profesión docente, rompiendo el contrato didáctico (Brousseau, 1998, p. 73). La TSD, además de propiciar el aprendizaje autónomo de los estudiantes, permite el desarrollo de habilidades matemáticas tales como resolver problemas y argumentar y comunicar. Desde los OA en su dimensión cognitivo-intelectual, se espera que los estudiantes expongan ideas, opiniones, experiencias de manera coherente y fundamentada y así formar estudiantes más autónomos, participativos, reflexivos de su propio proceso de aprendizaje (Castillo y Popayán, 2018).

Etapa 1: Actividad inicial
La primera actividad de la propuesta didáctica consiste en que los estudiantes identifiquen mediante tres fotografías la réplica de la imagen original del Arco Británico. Se entregan tres figuras impresas a los estudiantes y se les comenta que solo una de ellas es la réplica de la figura original. La pregunta enunciada es: ¿Cuál de las siguientes figuras corresponde a la réplica? Justifique su elección. Con esta actividad se espera activar conocimientos previos de proporcionalidad e impulsar una idea intuitiva de semejanza, además de propiciar las habilidades de argumentar y comunicar, resolver problemas y las habilidades del siglo XXI de maneras de pensar (creatividad y pensamiento crítico) y maneras de trabajar (colaboración y comunicación).

Etapa 2: Actividad central
Se enfrenta a los estudiantes a una situación específica en la que un arquitecto debe tomar las medidas del Arco Británico para diseñar un nuevo arco. En el enunciado se presentan las medidas tomadas por el arquitecto y la distancia a la que se encuentra del arco. Posteriormente, se enuncian tres preguntas que los estudiantes deben resolver, con el apoyo de un Applet en Geogebra.

Pregunta 1. Encontrar medidas para la réplica: ¿Cuáles serían las dimensiones del nuevo arco, si este debe situarse en las mismas líneas de proyección desde el lugar donde se encuentra observando? Escriba todas las opciones posibles.

Pregunta 2. Establecer una relación entre las distancias: ¿Qué relación puedes observar entre las distancias desde el punto de observación hacia los puntos extremos del arco original y la distancias desde el punto de observación hacia los nuevos arcos?

Pregunta 3. Encuentre una expresión que permita representar la situación.

Con estas preguntas se espera impulsar las habilidades matemáticas de resolver problemas y representar y las habilidades del siglo XXI de herramientas para trabajar (alfabetización en tecnologías digitales de la información), maneras de pensar (pensamiento crítico y metacognición) y de maneras de trabajar (colaboración y comunicación).

Etapa 3: Plenario
Esta sección corresponde a la fase de validación de la TSD. Aquí, los estudiantes deben compartir, explicar y demostrar sus argumentos y estrategias al resto de los grupos. Los estudiantes deben llegar a acuerdos que no son solamente un intercambio de información, sino que un proceso de cooperación en la construcción de conocimiento matemático. Con ello se espera impulsar el desarrollo de habilidades de resolver problemas y argumentar y comunicar y las habilidades del siglo XXI de maneras de pensar (pensamiento crítico y metacognición) y de maneras de trabajar (colaboración y comunicación).

5. Experiencia de aula

La propuesta de aprendizaje fue aplicada a un grupo de 17 estudiantes de Segundo Año Medio de un establecimiento educacional particular subvencionado de la ciudad de Viña del Mar. Los 17 estudiantes se dividieron en 6 grupos: G_1 (E_1, E_2, E_3), G_2 (E_4, E_5, E_6), G_3 (E_7, E_8, E_9), G_4 (E_{10}, E_{11}, E_{12}), G_5 (E13, E_{14}) y G_6 (E_{15}, E_{16}, E_{17}). La experiencia de aula evidenció la necesidad de enfrentar a los estudiantes a actividades que permitan desarrollar no solo las habilidades matemáticas declaradas por el MINEDUC, sino que también las habilidades del siglo XXI. En esta sección se presentan las categorías bajo las cuales se examinaron las respuestas de los estudiantes, además de profundizar en episodios vivenciados en esta implementación de la propuesta de aprendizaje.

4.1 Categorías de análisis

Una vez implementada la propuesta de aprendizaje, se levantaron categorías de análisis para examinar la producción de los estudiantes durante las fases de acción, formulación y validación. Ello permite explorar con mayor detenimiento el acercamiento de los estudiantes hacia el concepto de homotecia y, a su vez, cómo construyen la noción de homotecia a partir de sus conocimientos previos.

Tabla 1. Categorías de Análisis

Fase de la TSD	Criterio	Descripción del criterio de análisis
Fase de acción	*C1*: Idea intuitiva de semejanza y proporción.	Identifican características referidas a su forma de la réplica.
	C2: Elementos relacionados con la proporción.	Hacen referencia al crecimiento de la figura, mencionan características asociadas al crecimiento proporcional como proporcionalidad, escala, factor de crecimiento.
	C3: Crecimiento de la réplica.	Dibujan réplicas más grandes, escriben medidas mayores de la réplica.
Fase de formulación	*C4*: Representar desde diferentes registros, medidas o argumentos para la réplica, desde lo proporcional o desde la semejanza.	Representan medidas o en su escrito se observa de manera explícita o implícita la utilización de un factor de proporcionalidad o palabras como amplificación y escala, para referirse al crecimiento de la figura.
		Dan ejemplos del incremento proporcional.
	C5: Representar medidas para la réplica correspondientes a sumar una cantidad constante.	Suman una misma cantidad a las medidas iniciales de la réplica.
	C6: Identificar infinitas posibilidades para las medidas de la réplica.	Dan respuesta de infinitas medidas para la réplica.
		Representan en una expresión algebraica de manera explícita o implícita las infinitas posibilidades.
Fase de validación	*C7*: Manifestación de forma verbal o escrita el factor de homotecia.	Expresan medidas de la réplica utilizando un factor, como el doble, triple, etc., o utilizando otro factor de multiplicación.
		Manifiestan que las medidas del arco se encuentran multiplicando por un mismo factor todas las medidas originales de la réplica.
	C8: Interpretación de la linealidad.	Explican que hay infinitas posibilidades para la réplica mencionando rectas, dando varios ejemplos, mostrando el Applet.
		Identifican la línea de proyección, rectas, por dos puntos una única recta.
		Mencionan que el foco (el observador), un punto de la réplica original y un punto de la nueva réplica están en una misma línea de proyección.
	C9: Manifestación de la relación de homotecia.	Muestran cálculos utilizando el teorema de Pitágoras, semejanza para calcular las distancias.
		Representan una expresión numérica, algebraica o verbal para mostrar la relación de homotecia, donde se manifiesta el factor de homotecia.

Nota. Elaboración propia.

La evidencia recopilada en las etapas 1 y 2 (producciones escritas de los estudiantes) y en la etapa 3 (registro audiovisual) fue clasificada según las categorías planteadas en la Tabla 1. La clasificación de las evidencias de cada grupo está presentada en la siguiente tabla.

Tabla 2

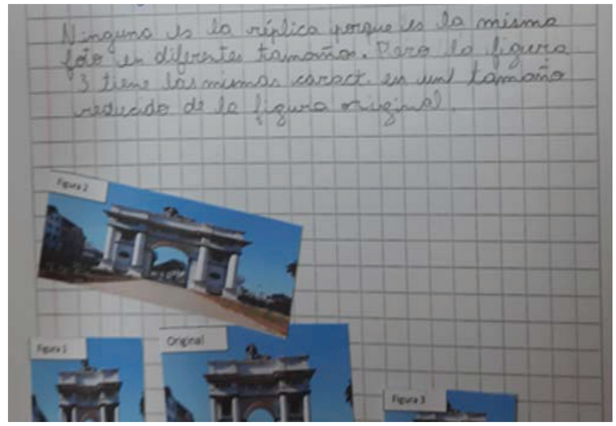
Categorización de Grupos

Grupo	Etapa 1	Etapa 2			Etapa 3
		P1	P2	P3	
G_1	C1	C4, C6	C4	C9	C7, C9
G_2	C1	C5	C8	C9	C7
G_3	C1	C4	-	C9	C7
G_4	C2	C1	-	-	C7
G_5	C2	C5	C7	-	C7, C8
G_6	C1, C2	C5	C7	C9	C7

4.2 Producciones de los estudiantes

A continuación, se presenta un análisis sobre las respuestas de G_6, de manera de seguir con mayor detenimiento la forma en la que los estudiantes construyen el concepto de homotecia. Se seleccionó a G_6, ya que el progreso de este grupo conlleva a elaborar conclusiones y argumentos que permiten identificar las habilidades implicadas en la construcción del concepto de homotecia. Las etapas 1 y 2 serán presentadas con la evidencia escrita de G_6 y la etapa 3 será presentada con transcripciones de las interacciones entre los estudiantes y la profesora a cargo de la implementación.

En la etapa 1, las producciones escritas de los seis grupos permiten un acercamiento a la toma de decisiones sobre tres imágenes. La Tabla 2 muestra que las respuestas de los estudiantes aluden a una idea intuitiva relacionada a semejanza y proporcionalidad (C1 y C2). Es decir, los estudiantes se centran en ciertas características de la figura (por ejemplo, crecimiento o disminución), lo que les permite activar conocimientos previos sobre proporcionalidad. Aquí, los estudiantes, al expresar cuál de esas imágenes es una réplica del Arco Británico, exhiben indicios de habilidades de colaboración, comunicación, argumentación y creatividad. La respuesta de G_6 lleva a una discusión sobre qué condiciones debe tener la réplica de una figura, ello les permite concluir que una réplica es aquella que tiene el mismo tamaño que la original, por lo que ninguna de las tres figuras es la réplica. Posteriormente, deciden que la figura 3 conserva "las mismas características" (C1) y proporciones (C2), pero en distinto tamaño.

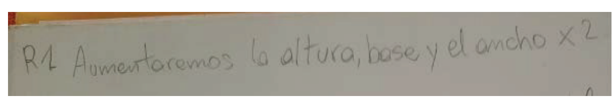


Ninguna es la réplica porque es la misma foto en diferente tamaño. Pero la figura 3 tiene las mismas características en un tamaño reducido de la figura original.

Figura 7. Respuesta Primera Etapa

Nota. Evidencia de G_6.

En la etapa 2, los estudiantes deben tomar decisiones relativas al cálculo de las medidas para una o más réplicas de mayor tamaño. La noción de semejanza y proporcionalidad se materializa en formulaciones que permiten proponer una expresión algebraica además de identificar las líneas de proyección desplegadas. Tal proceso se logra mediante el trabajo colaborativo de los grupos, resultado de la manipulación de un Applet de Geogebra. Por ejemplo, en la pregunta 1 (ver Tabla 2), los estudiantes se ubican en categorías sobre la utilización del factor de proporcionalidad (C4), encontrando las medidas de la réplica mediante la adición de una cantidad fija a cada medida (C5). La estrategia de G6 consiste en aumentar las dimensiones del arco utilizando factor 2. Aquí, a pesar de no obtener una medida específica, G_6 consigue mostrar algunos elementos de la homotecia, tales como aumentar utilizando el factor de homotecia (C4).

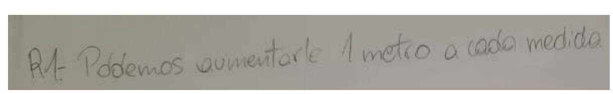


R1 Aumentaremos la altura, base y el ancho x 2.

Figura 8.Respuesta Etapa 2 (P1)

Nota. Evidencia de G_6.

Sin embargo, cuando se les plantea dar una medida diferente para la réplica, los estudiantes proponen aumentar en un metro cada medida del arco (ver Figura 9).

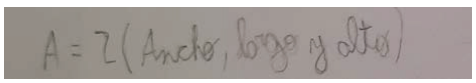


R1. Podemos aumentarle 1 metro a cada medida.

Figura 9. Respuesta Etapa 2 (P1)

Nota. Evidencia de G_6.

Esta respuesta permite observar que, aún cuando G6 utiliza argumentos que permiten suponer el reconocimiento de ciertos elementos (como aumento), otros elementos (como el factor) se diluyen y parecen no tan claros. Más concretamente, el aumento propuesto por G6 hace que las nuevas dimensiones del arco no aumenten de manera proporcional. De esta forma, se logran establecer momentos en los que ocurren quiebres cognitivos (en este caso con respecto a la proporcionalidad). La búsqueda de las dimensiones de la nueva réplica, que, además, cumplan con las condiciones planteadas en el problema, permite que los estudiantes analicen sus formulaciones y replanteen su respuesta, dando indicios de habilidad de resolver problemas, representar, pensamiento crítico, metacognición, colaboración y comunicación. Es así como G6 vuelve a la idea anterior de utilizar un factor de aumento (ver Figura 10), afinando sus estrategias.



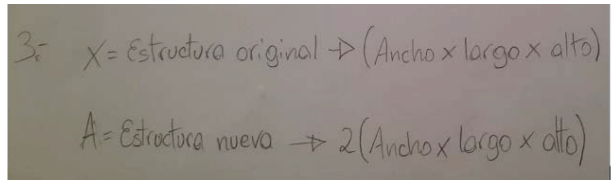
A = 2 (Ancho, largo y alto)

Figura 10. Respuesta Segunda Etapa (P2)

Nota. Respuesta de G_6.

G_6, por consiguiente, manifiesta de manera más explícita el factor de homotecia (C7) al proponer una medida específica para la nueva réplica, logrando aproximarse a la relación de homotecia. Esta propuesta de G6 se comprueba mediante la manipulación del Applet de Geogebra, donde los estudiantes pueden contrastar sus formulaciones en sus teléfonos móviles, desplegando habilidades de resolver problemas, alfabetización en tecnologías digitales de la información, pensamiento crítico, colaboración y comunicación.

A continuación, los estudiantes deben proponer una relación que logre expresar (matemáticamente) las dimensiones originales del arco y las de la réplica. La propuesta de G_6 manifiesta un acercamiento considerable a la relación de homotecia (C9). A pesar de que no está representada explícitamente, se interpreta que A (la "estructura nueva") se refiere a réplicas del arco mediante la multiplicación de factor 2 a todas las dimensiones del arco original. En esta evidencia, G_6 formaliza su respuesta al relacionar la figura inicial con la nueva figura. Por otra parte, es posible observar que los estudiantes manifiestan una relación lineal. Es decir, contrario a proponer la razón de homotecia como un cálculo de proporcionalidad directa (como aparece en los textos escolares), los estudiantes proponen una relación lineal: un factor multiplicado a las tres dimensiones.



3.- X = Escritural original -> (Ancho x largo x alto)
A = Estructura nueva -> 2 (Ancho x largo x alto)

Figura 11 . Respuesta Etapa 2 (P3)

Nota. Evidencia Grupo G_6.

En la etapa 3, los estudiantes expresan verbalmente sus respuestas y las contraponen con los demás grupos. A pesar de que la mayoría de los grupos logra expresar verbalmente el factor de homotecia (C7), algunos estudiantes presentaron dificultades al expresar relaciones o conjeturas de manera escrita (en términos matemáticos). En esta etapa se observa cómo el justificar argumentos y escuchar a otros permite la reestructuración y robustecimiento de respuestas escritas y ampliación de vocabulario. G6 verbaliza y justifica las respuestas propuestas, expresando la decisión de retomar la idea inicial de utilizar el factor para aumentar las dimensiones del arco y representar la relación como una multiplicación y no como una adición. Por ejemplo, en el siguiente extracto del plenario:

> **E16**: *Nosotros primero fuimos agregando de 2 en 2, pero vamos viendo el largo, el ancho y la altura, pero a cada medida el largo, el ancho y la altura algunas veces le sumábamos 2 a las 3 medidas y otras veces le sumábamos 2 al largo, 1 al ancho y dejábamos la altura igual entonces llegamos a la misma conclusión que el grupo de Vicente, ya si es que el nuevo arco las medidas llegaran a ser diferentes, tenían que ser intercaladas las medidas si el nuevo arco fuera diferente.*
> **P:** *¿A qué te refieres con intercaladas las medidas?*
> **E17:** *No deberíamos sumar las mismas de siempre porque al final no va a quedar como una réplica.*
> **P:** *Y, ¿cuándo quedaría como una réplica?*
> **E17:** *Una réplica, así réplica completa, debería ser las mismas medidas. 10, 5, 12 metros, así recién sería una réplica verdadera.*

En primer lugar, es posible observar que los estudiantes verbalizan sus estrategias en una interacción que los lleva a comprender y respaldar las opiniones de otros estudiantes y a defender sus propios posicionamientos utilizando argumentos que no son necesariamente matemáticos. Tal interacción de G6, producto de ensayo y error en el Applet de Geogebra, genera una discusión que hace posible identificar elementos que constituyen la homotecia.

El extracto anterior muestra cómo los estudiantes, a través de compartir sus estrategias, descartan ciertas maneras de abordar el problema que no satisfacen las condiciones declaradas en la actividad: la figura resultante debe ser una réplica. Por ejemplo, al preguntarse ¿cuándo la figura resultante corresponde a una réplica exacta? (considerada, por G6, como la figura que conserva las medidas originales), los estudiantes de G_6 comienzan a utilizar estrategias para amplificar las medidas del arco original sin que cambie la forma. El compartir las opiniones de otros grupos en un plenario (fase de validación), lleva a que G_6 reconozca, en otras estrategias, que el factor homotecia sucede en la multiplicación (algo que ellos expresaron en escrito como suma, pero que enunciaron verbalmente como que el "agregar" implicaba multiplicar una constante a todas las dimensiones del arco). Ello revela que, en algunos casos, los estudiantes expresan más claramente sus razonamientos de manera verbal que escrita en lenguaje matemático. Es decir que, probablemente, lo que los estudiantes expresan de forma escrita (matemáticamente) no es necesariamente lo que entienden o piensan al resolver un problema. En este sentido, es necesario explorar cómo las actividades sugeridas para el eje de geometría potencian el desarrollo de habilidades de modelación matemática.

En segundo lugar, el uso de herramientas tecnológicas, como complemento de la propuesta de aprendizaje elaborada, generó un escenario en el que los estudiantes comenzaron a validar sus formulaciones en conjunto. La manipulación del Applet de Geogebra, que los estudiantes tenían en sus teléfonos móviles, les proporcionó la posibilidad de explorar y observar las transformaciones geométricas de la figura original a la figura imagen, además de observar la relación entre el plano 2D y 3D y el crecimiento de la réplica.

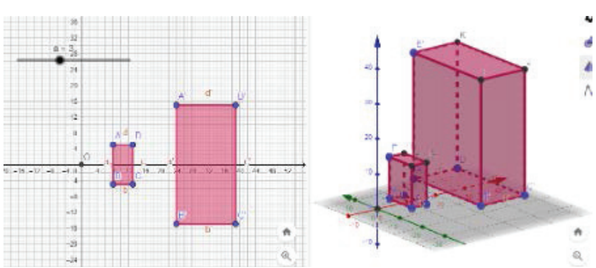


Figura 12. Imagen de Applet que Muestra la Situación en una Vista 2D y 3D. Nota. Una de las posibles vistas que observan los estudiantes.

El proceso llevado a cabo por los estudiantes en el desarrollo de la situación planteada, que en este caso es una situación contextualizada cercana a ellos, permite que resuelvan el problema de manera autónoma y colaborativa. Ellos buscan estrategias y comprueban sus formulaciones mediante la utilización del Applet de GeoGebra que simula la situación (Figura 12). El rol del profesor, en este caso, no es el de intervenir en la toma de decisiones y exploración de los estudiantes, sino que en guiarlos mediante preguntas planteadas (proceso de devolución) cuando ellos requieran asistencia, de modo de entregar la responsabilidad al estudiante de dar solución al problema. Por ejemplo, cuando los estudiantes consultan qué es una réplica al inicio de la implementación, la docente, en lugar de dar una respuesta directa invita a los estudiantes a reflexionar sobre el caso de Antman (superhéroe de Marvel). Los aportes de cada integrante del grupo resultan fundamentales para establecer estrategias al exponer sus hallazgos, por lo cual es vital que las intervenciones del docente no intercedan en la autonomía de los estudiantes.

La TSD aporta en el desarrollo de habilidades como argumentar y comunicar, ya que en la fase de validación los estudiantes deben probar, explicar y comunicar los hallazgos y estrategias utilizadas (Panizza, 2003). Cuando los estudiantes intentan explicar cómo encuentran una regularidad en sus conclusiones, dejan de manifiesto el proceso que los llevó a interactuar y tomar decisiones en conjunto. Este proceso no se trata solo de comunicar algo, sino de cooperar con los demás grupos en la búsqueda de una solución que represente la situación y en la cual puedan estar de acuerdo y se sientan partícipes (Kuzniak, 2005).

5. Conclusiones

Al enmarcar la propuesta de aprendizaje en la TSD se esperaba que los estudiantes se acercaran al concepto de homotecia al identificar los elementos que la constituyen y, además, impulsar el desarrollo de habilidades declaradas en el currículo nacional. Para potenciar el desarrollo de habilidades matemáticas y del siglo XXI se propone una actividad introductoria al concepto de homotecia que no presente las definiciones ni conduzca las estrategias de los estudiantes, a diferencia de los textos escolares explorados. De esta manera, se espera que los estudiantes sean capaces de poner en juego un conjunto de habilidades y conocimientos previos. Los estudiantes logran tomar decisiones colaborativamente que los llevan a mostrar respuestas en torno a las preguntas planteadas en el problema. La utilización de la herramienta tecnológica, en este contexto, permitió la exploración y comprobación de conjeturas en relación con las medidas de las posibles réplicas. Por ejemplo, en la segunda etapa, los estudiantes se enfrentan a un escenario nuevo (distinto a lo que están habituados producto del contrato didáctico) en el que deben proponer estrategias, aquí surge orgánicamente el uso del Applet como simulación para explorar posibles respuestas o comprobar estrategias planteadas.

Con respecto a la construcción de homotecia, los estudiantes sí lograron identificar elementos expresados en la definición de homotecia propuesta en el TdE, tales como ampliar y reducir conservando la forma, centro de homotecia, razón de homotecia y líneas de proyección. Además, pusieron en juego conocimientos previos declarados en la GDD: razón y proporción, ecuación lineal. Sin embargo, esta propuesta evitó las discordancias respecto a la reducción de la homotecia y al logro de los aprendizajes esperados. Los estudiantes no solo concluyeron que la homotecia correspondía a una función lineal, sino que plantearon las infinitas posibilidades que ello conlleva. En el plenario se discutió sobre las infinitas réplicas que puede tener el Arco Británico dependiendo de la razón de homotecia que se aplique (variación de k en la expresión lineal de la homotecia). Este elemento no es abordado en los materiales curriculares propuestos por el MINEDUC, pero brinda un entendimiento más profundo (respecto a la aplicabilidad de la homotecia en la vida diaria) y alineado con la epistemología de la homotecia.

La discordancia respecto a las habilidades desarrolladas se evitó producto del énfasis dado a potenciar habilidades matemáticas y del siglo XXI. Se puso especial atención al desarrollo de habilidades matemáticas como resolver problemas, representar y argumentar y comunicar que resultan esenciales en la TSD para el éxito de la construcción de un conocimiento matemático y el rompimiento del contrato didáctico. La habilidad de argumentar y comunicar se puede relacionar con la habilidad del siglo XXI de maneras de trabajar. Ambas habilidades permiten, mediante la colaboración y comunicación, argumentar ideas matemáticas que se complementan para llegar a acuerdos y tomar decisiones. Por ejemplo, durante el desarrollo de la actividad se observa que cada integrante de G6 tiene acceso a la información necesaria para responder las preguntas. Vale decir, cualquiera de ellos está en condiciones de proponer una solución, pero lo hacen en conjunto. En el plenario los estudiantes comparten un mensaje consistente respecto a la homotecia, exponiendo el coeficiente de similaridad o factor de homotecia y representando una relación escrita que se acerca a la relación formal de homotecia (algo que no se hubiese logrado sin la interacción entre pares). Por otro lado, el uso del Applet permitió no solo la comprobación de estrategias, sino que, además, encontrar regularidades para la formulación de nuevas estrategias. Ello posibilita el desarrollo de la habilidad de alfabetización en tecnologías digitales de información, en la que los estudiantes deben hacer uso de la tecnología como un medio para construir mensajes. De igual modo, las maneras de pensar, que consideran el pensamiento crítico y la creatividad, implican un proceso mental respecto a razonar y evaluar la evidencia dispuesta y proponer soluciones novedosas a un problema en el que se adapten ideas anteriores, habilidades que se potenciaron durante todo el desarrollo de la propuesta, por ejemplo, al promover estrategias e ideas intuitivas en relación con la proporcionalidad y semejanza en la etapa 1.

También es posible encontrar indicios de la habilidad para vivir, particularmente sobre la responsabilidad personal y social, convivir en armonía con los demás, comprender los valores de convivencia con los otros (MINEDUC, 2019). En el desarrollo de la propuesta se observa que, para que ocurra una comunicación óptima de modo que los estudiantes puedan colaborar para resolver el problema planteado en la actividad, se debe generar un clima de convivencia y respeto. La TSD incentiva que sea el propio estudiante quien se haga responsable de dar la solución al problema, aquí se desarrolla la responsabilidad personal y social, ya que cada opinión importa en la búsqueda de estrategias, en este proceso todas las opiniones son respetadas, escuchadas y discutidas por el grupo. Estos trabajos grupales no solamente permiten al estudiante resolver un problema matemático, sino que también lo acercan o lo posicionan en el rol de un ciudadano inserto dentro de una organización social que vela por una convivencia de respeto entre ciudadanos.

Finalmente, la propuesta didáctica presentada en este artículo pretende aportar en una construcción significativa del concepto de homotecia en miras hacia los nuevos programas de educación diferenciada para los grados de Tercero y Cuarto Medio propuestos recientemente por el MINEDUC (2020), específicamente en lo que respecta a la geometría 3D en cuanto a lo específico del conocimiento matemático. A su vez, pretende aportar en plantear actividades que permitan el desarrollo de habilidades reconocidas por el MINEDUC como fundamentales en el proceso de aprendizaje de la matemática escolar. Sin duda alguna, la TSD permite al profesor proponer actividades que puedan abarcar no solamente el conocimiento específico de matemáticas, sino que, también, potencia el desarrollo integral del estudiante.

Agradecimientos

Beca mentor de la Unidad de Práctica de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso y beca otorgada por el proyecto FONDECYT N 11190152.

Referencias

Abrate, R., Delgado, G., y Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación, 39*(1), 1-9.

Agencia de Calidad de la Educación. (2015). *Reporte de calidad. Evolución de los indicadores de calidad de la educación en Chile.* Gobierno de Chile.

Arancibia, R. (2021). *Guía Didáctica del Docente. Tomo 2. 1º medio.* Santillana.

Barrantes, M., y Blanco, L. J. (2005). Análisis de las concepciones de los profesores en formación sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría. *Números, 62,* 33-44.

Bartolini Bussi, M., y Maschietto, M. (2007). *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola.* Springer.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* La pensée sauvage, éditions.

Brown, T., y Heywood, D. (2011). Geometry, subjectivity and the seduction of language: the regulation of spatial perception. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2-3), 351-367. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9281-2

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L., y Acosta, M. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales.* Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Castillo, V., y Popayán, Y. (2018). Aplicación de la teoría de las situaciones didácticas a las Ciencias Sociales. *Educere, 21*(70), 539-555.

Castro Cortes, A., y Jaramillo Riascos, J. (2019). *Una aproximación al concepto de homotecia a partir de la noción de proporcionalidad geométrica en séptimo grado.* [Tesis Pregrado, Universidad del Valle]. Repositorio digital Univalle. http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/14292

Fresno, C., Torres, C., y Avila, J. (2021). *Texto del Estudiante. 1° Medio.* Santillana.

Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 2*(3), 11-44.

Gamboa, A., y Ballestero, A., (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare, 14*(2), 125-142. https://doi.org/10.15359/ree.14-2.9

Guevara-Casanova, I., y Burgués-Flamarich, C. (2018). Geometry and Visual Reasoning. Introducing algebraic language in the manner of Liu Hui and Al-Khwãrizmî. En K. Clark, T. Hoff Kjeldsen, S. Schorcht, y C. Tzanakis (Eds.), *Mathematics, Education and History. Towards a harmonious partnership* (pp. 165-192). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73924-3_9

Isoda, M., y Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases.* Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Kuzniak, A. (2005). La Theorie des Situations Didactiques de Brousseau. *RERERES-IREM, 61*, 19-35.

Lemonidis, C. (1990). *Conception, realisation et resultats d'une experience d'enseignement de l'homothetie.* [Tesis doctoral, Universidad Luis Pasteur]. National Archive of PhD Theses. http://hdl.handle.net/10442/hedi/3786

Ministerio de Educación de Chile. (2015). *Bases curriculares. 7° a 2° medio.* Gobierno de Chile. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-37136_bases.pdf

Ministerio de Educación de Chile. (2019). *Un recorrido por las habilidades para el siglo XXI Gobierno de Chile.* https://www.curriculumnacional.cl/portal/Innovacion/Desarrollo-docente/86740:Un-recorrido-por-las-habilidades-para-el-siglo-XXI

Ministerio de Educación de Chile. (2020). *Programa de estudio. Geometría en 3D. 3º y 4º medio.* Gobierno de Chile.

VOLÚMEN 14
N°1
ABRIL 2022

R
E
C
H
I
E
M

REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

sochiem