VOLÚMEN 13
N°1
ABRIL 2021

RECHIEM

REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

sochiem

ÍNDICE

sochiem

Sociedad Chilena de Educación Matemática
Revista Chilena de Educación Matemática
ISSN 2452-5448 Versión en línea
Chile

EDITORIAL

La *Revista Chilena de Educación Matemática –RECHIEM–*, a pesar de la crisis sanitaria mundial, debida al brote de COVID-19, ha seguido recibiendo manuscritos y ha publicado sus tres números regulares durante el 2020 y empieza este 2021 con su primer número de abril, por lo que agradece a sus lectores, autores, evaluadores y a todos quienes participan en su creación y posicionamiento por el compromiso y la confianza.

Estos dos años han sido de inmensa incertidumbre, aislamiento y aprendizaje, de pérdidas y despedidas, y nuestra revista no estuvo ajena a ello. El 23 de marzo de 2021 despedimos al Dr. José Carrillo Yáñez, Catedrático de la Universidad de Huelva de España quien formaba parte del Consejo Editorial de la RECHIEM desde el 2019. El Equipo Editorial de la revista expresa su más profundo pésame por la irreparable pérdida. Apreciamos su excepcional persona y destacada trayectoria académica; la huella personal y legados profesionales de gran envergadura que ha dejado. Nos enorgullece haber colaborado y contado con su apoyo incondicional en los procesos de la revista y acompañamos en el sentimiento a todos quienes disfrutaron de su persona y sienten su partida.

Compartimos también una buena noticia con nuestra comunidad, y es que la revista ha comenzado a recibir manuscritos en idioma portugués, hecho que beneficia a la amplitud de su alcance y a la apertura más allá de sus fronteras geográficas.

El primer número de este volumen reúne tres artículos en contextos distintos que ofrecen reflexiones sobre temas relevantes de nuestra área: la transferencia del conocimiento entre Matemática y Física; las características argumentativas de la interpretación de tablas de frecuencia y la articulación entre alfabetización estadística y alfabetización financiera.

Las autoras *María del Valle Bermejo-Luna* y *Gloria Sánchez-Matamoros García* comparten un artículo en el cual problematizan la transferencia del conocimiento entre Matemática y Física, dos disciplinas que se nutren mutuamente, sin embargo, la relación entre ambas se ve truncada en algunos sistemas educativos. Las autoras realizan una investigación cualitativa en el contexto español con 119 estudiantes de Segundo de Bachillerato (17-18 años) y evidencian distintas manifestaciones en la transferencia de conocimiento entre las Matemáticas y la Física en torno al concepto de tasa de variación media y velocidad media. La transferencia entendida como la aplicación de la Matemáticas fuera de su dominio, en este estudio, distingue dos tipos: transferencia "vertical" y transferencia "horizontal". Se da a conocer cómo se han identificado cuatro grupos de estudiantes, según las distintas manifestaciones de transferencias del conocimiento realizadas en dos tareas propuestas para fines de la investigación y se abre una profunda discusión al respecto.

Carmen Paz González Venegas, Rosa Muñoz Guajardo y *Joel Muñoz Pardo* tratan un tema que sigue siendo desafiante para el sistema educativo chileno, esto es, el desarrollo del pensamiento estadístico y, particularmente, los distintos errores que surgen en la construcción e interpretación de tablas de frecuencia. Tomado como punto de partida que estos errores se reflejan a través de la argumentación oral o escrita de los estudiantes, los autores se cuestionan sobre las características argumentativas que se presentan en la verbalización de estudiantes de segundo medio (15-16 años) al interpretar una tabla de frecuencia. Diseñan un instrumento para la recogida de datos, que consiste en una tabla de frecuencias que muestra el avance de los casos confirmados de COVID-19 durante los primeros 90 días desde el primer contagiado por coronavirus en Chile, exponen sus alcances y limitaciones. Los autores presentan sus resultados a partir del análisis de datos con tres categorías generadas para las interpretaciones de tablas de frecuencia: racional, intuitivo y literal. El lector podrá apreciar cuál de estas categorías predominó en los resultados y reflexionar al respecto junto con los autores.

El artículo de *Cileda de Queiroz e Silva Coutinho* plantea una investigación documental y bibliográfica desarrollada a partir de la lectura de la Base Nacional Común Curricular, un documento normativo de la educación brasileña, los textos publicados por investigadores en el campo de la educación estadística y educación financiera, y de algunas preguntas propuestas en el Examen Nacional de Educación Secundaria que se aplicó en el año 2019. La autora busca definiciones de la alfabetización funcional, alfabetización estadística y alfabetización financiera para apoyar su análisis y discutir sobre las influencias de la alfabetización estadística en la alfabetización financiera y viceversa. El artículo concluye destacando la necesidad del desarrollo de ambas alfabetizaciones a lo largo de la escolarización.

Desde RECHIEM les invitamos a revisar y compartir este nuevo número de nuestra revista, y de esta forma contribuir al desarrollo de la comunidad que trabaja en torno a educación matemática.

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i1.36

EVIDENCIAS DE CONOCIMIENTO ENTRE MATEMÁTICAS Y FÍSICA SOBRE VELOCIDAD MEDIA

EVIDENCE OF KNOWLEDGE BETWEEN MATHEMATICS AND PHYSICS ABOUT AVERAGE SPEED

María del Valle Bermejo-Luna
vll.bermejo@gmail.com
Universidad de Sevilla, Sevilla, España

Gloria Sánchez-Matamoros García
gsanchezmatamoros@us.es
Universidad de Sevilla, Sevilla, España

RESUMEN

Resultados de investigaciones previas han puesto de manifiesto la complejidad de la transferencia de conocimiento entre Matemáticas y Física. El objetivo de este artículo es caracterizar las manifestaciones de transferencia o evidencia de conocimiento entre ambas áreas en estudiantes de Bachillerato (16-18 años) cuando resuelven problemas sobre la velocidad media. El enfoque metodológico es cualitativo. Nuestro instrumento de recogida de datos consiste de dos tareas sobre velocidad media en distintos registros de representación, que realizaron un total de 119 estudiantes españoles. Los resultados han permitido identificar cuatro grupos de estudiantes en relación con la evidencia de conocimiento de la tasa de variación media y la velocidad media, puesta de manifiesto en la resolución de las tareas. Un primer grupo de estudiantes que no usa la velocidad media ni la tasa de variación media, un segundo grupo que usa la tasa de variación media, un tercer grupo que evidencia conocimiento de ambas áreas a partir de determinados datos y un cuarto grupo que manifiesta la transferencia de conocimiento entre ambas áreas a partir de cualquier tipo de datos. Estos resultados nos han permitido caracterizar una posible progresión en la transferencia de conocimiento entre ambas áreas en la resolución de tareas sobre velocidad media.

PALABRAS CLAVE:
Transferencia de conocimiento; Matemáticas; Física; velocidad media; Bachillerato.

ABSTRACT

Results of previous investigations have shown that the transfer of knowledge between Mathematics and Physics can be very complex. The aim of this article is to characterize the manifestation of knowledge transfer between both areas in high school students (16-18 years old) when they solve problems about average speed. The methodological approach selected is qualitative. As a data-collection instrument we used a two-task questionnaire about average speed given in different representation registers. This questionnaire was completed by a total of 119 Spanish students. The resolution of the tasks by the students allowed us to characterize four different groups of students in relation to the evidence of the transfer of knowledge between Mathematics and Physics around the concept of average speed. A first group of students who do not use the average speed or the average rate of variation, a second group who use the average rate of variation, a third group who manifest knowledge transfer between both areas based on certain data and a fourth group that manifest the transfer of knowledge between both areas from any type of data. These results have allowed us to characterize a possible progression in the transfer of knowledge between both areas for the concept of average speed.

KEYWORDS:
Transfer of knowledge; Mathematics; Physics; Average Speed; High School students.

Recibido: 8 de julio de 2020 , Aceptado: 25 de enero de 2021

1. Introducción

Las leyes físicas son el mejor modelo matemático del que disponemos para describir el comportamiento de nuestro entorno, desde la interacción gravitatoria, las leyes de la termodinámica, etc. Todas estas leyes han sido elaboradas como una aplicación de las Matemáticas para resolver problemas de la vida real (Verschaffel et al., 2002). Parece indudable, entonces, que la Física se ha beneficiado de los avances de las Matemáticas, apoyándose en esta para su propio desarrollo.

Sin embargo, si analizamos la relación entre la Física y las Matemáticas, observamos que el beneficio se da en ambos sentidos. Problemas concretos de Física, como pueden ser aquellos de Cinemática (rama de la Física que estudia el movimiento, sin tener en cuenta las causas que lo produce), han sido cruciales en el desarrollo histórico de las Matemáticas. Sin ir más lejos, el concepto de Derivada estudiado por Newton tuvo su origen en el análisis de la variación de un movimiento (Azcárate, 1990).

Deteniendo la mirada en el sistema educativo español observamos que esta relación aparece truncada. La Física comienza a estudiarse en el segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria (13-14 años), y es entonces cuando aparecen por primera vez en el currículo los conceptos de Cinemática tales como: velocidad media, instantánea y aceleración (Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte [MECD], 2015). No obstante, en Matemáticas el concepto de Derivada no se introduce hasta entrado en Primero de Bachillerato (etapa no obligatoria, 16-17 años). Esto supone, tal y como señalan Valera et al. (1983), que la relación de los conceptos de velocidad y aceleración con los de espacio y tiempo sea de muy difícil asimilación por parte de los estudiantes, pese a que su origen se remonte al inicio del estudio del Cálculo, ocasionando que estos estudiantes tengan problemas a la hora de enfrentar enunciados de Mecánica (Azcárate, 1984).

En este sentido, los resultados de diversas investigaciones (McDermott et al., 1987; Planinic et al., 2012) con estudiantes de Educación de Secundaria (15-16 años) concluyen que estos no se dan cuenta de que están trabajando con un mismo elemento matemático cuando resuelven tareas en diferentes contextos, es decir, cuando resuelven tareas de Matemáticas o Física (Planinic et al., 2012). Así, estudiantes que son capaces de resolver una tarea matemática, fallan en la tarea análoga en el contexto físico. Una de las principales fuentes de dificultad de dichos estudiantes, según estos autores, se encuentra en la relación que deben establecer entre los gráficos de contextos físicos, y del mundo real. Sin embargo, investigaciones (Marrongelle, 2001, 2004) centradas en el uso de la Física para resolver problemas de Cálculo a través de un curso integrado de Física y Matemáticas, concluyen que los estudiantes entienden mejor las representaciones gráficas cuando las relacionan con distintos fenómenos físicos, es decir, cuando las contextualizan. En relación con la tasa de variación media, según estas investigaciones, los estudiantes de Física se basan en conceptos físicos para construir conceptualizaciones significativas de la tasa de variación media. Sin embargo, no sucede lo mismo para conceptos como la Derivada o Integral. En esta misma línea, investigaciones realizadas con estudiantes universitarios centradas en el estudio de las respuestas a tareas de aplicación de conceptos matemáticos y del análisis matemático a la Física (Beichner, 1994; Christensen y Thompson, 2012; Quinn, 2013; Thompson et al., 2010) exponen que los estudiantes universitarios cometen errores a la hora de resolver problemas de Cinemática cuando las tareas requieren el cálculo de áreas bajo curvas y pendientes, dificultades que podrían tener su origen en los procesos matemáticos de integración y derivación (Beichner, 1994). Estas investigaciones concluyen que el problema de la transferencia de conocimiento proviene de que los estudiantes carecen de los conceptos previos de Matemáticas necesarios para resolver las tareas desafiantes que se les proponen (Christensen y Thompson, 2012; Thompson et al., 2010). En este sentido, algunas de estas investigaciones concluyen que los estudiantes muestran una menor confianza en realizar una transferencia de conocimiento entre las Matemáticas y la Física y Química cuando trabajan con el concepto matemático de pendiente (Quinn, 2013).

Es decir, la transferencia solo puede producirse cuando se ha construido un esquema coherente y robusto en el dominio inicial del aprendizaje (Rebello et al., 2017). Por otra parte, los resultados de la investigación de Woolnough (2000) muestran que, incluso aquellos estudiantes que normalmente obtienen buenos resultados en ambas disciplinas, fallan al establecer relaciones entre estas, atribuyéndolo a las creencias que tienen los estudiantes con respecto a cada una de las áreas; uno de los estudiantes llega a afirmar que "áreas diferentes hacen las cosas diferentes" (Woolnough, 2000, p. 264).

Como consecuencia de los resultados de todas estas investigaciones, podemos afirmar que el conocimiento matemático no es garantía de éxito en la resolución de tareas físicas, "la componente de interpretación de cantidades matemáticas en el contexto físico (por ejemplo, reconocer la pendiente de un gráfico velocidad-tiempo como la aceleración) falta a veces" (Planinic et al., 2012, p. 1140).

Redish y Kuo (2015) van más allá, concluyendo incluso que, pese a que la falta de éxito con las Matemáticas en los contextos físicos tradicionalmente se atribuye a la falta de habilidades para transferir el conocimiento matemático a las clases de Física, su origen también puede deberse a que "aprender Matemáticas en la clase de Matemáticas y Matemáticas en la clase de Física debe tratarse como si se aprendieran dos lenguajes relacionados pero distintos" (Redish y Kuo, 2015, p. 587).

Desde la perspectiva de esta problemática se plantea una investigación que pretende caracterizar el desarrollo del esquema de Derivada aplicada a problemas de la Cinemática en estudiantes de Bachillerato (16-18 años). En el transcurso de la misma, se observó distintas manifestaciones en la transferencia de conocimiento que se originaban entre la Física y las Matemáticas en torno a distintos conceptos de la Cinemática. En particular, en este trabajo nos centramos en las asociadas al concepto de tasa de variación media (a partir de ahora, T.V.M.) y velocidad media.

Definimos la T.V.M. en registro algebraico-numérico como el cociente de la variación de una función en un intervalo [a,b] entre la variación *b-a* (1). En el contexto de la Física, definimos la velocidad media vectorialmente como la razón del vector desplazamiento con el intervalo temporal en el que transcurre dicho desplazamiento (Young y Freedman, 2009).

$$T.V.M_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (1)$$

En el registro de representación gráfico la T.V.M. es la pendiente de la recta secante a la curva en los puntos *(a, f(a)) y (a+h, f(a+h))*. De igual forma, la velocidad media se corresponderá con la pendiente de la recta secante entre dos puntos de la gráfica posición-tiempo.

Por tanto, en términos de transferencia de conocimiento, se puede considerar que la velocidad media es la T.V.M. aplicada al caso particular de que la variable independiente sea el tiempo y la variable dependiente sea la posición del móvil respecto al tiempo. Para el caso particular de esta investigación, trabajaremos con tareas donde el movimiento se produzca en una sola dimensión de forma rectilínea. En estas condiciones, no es necesario el tratamiento vectorial de la velocidad, y la velocidad media podrá definirse como se expresa en (2).

$$v_{media} = \frac{x(t_f) - x(t_i)}{t_f - t_i} \quad (2)$$

Además, consideraremos que, al tratarse en todas las tareas de movimientos rectilíneos, el signo de la velocidad media nos proporcionará el sentido de la velocidad con respecto a nuestro sistema de referencia.

Este artículo tiene como objetivo caracterizar las manifestaciones de la transferencia de conocimiento entre las Matemáticas y la Física en los estudiantes de Bachillerato (16-18 años) cuando resuelven problemas sobre la velocidad media.

2. Marco teórico

La transferencia de conocimiento a menudo se define como la aplicación de lo que uno ha aprendido en una situación a otra situación diferente (Rebello et al., 2017; Reed, 1993; Singley y Anderson, 1989). Una de las concepciones del término transferencia en Educación Matemática descrita por Evans (1999) la considera como la aplicación de la materia académica de Matemáticas fuera de su dominio, en particular en este trabajo la consideramos aplicada a la Cinemática en la Física.

Los modelos tradicionales se centran en aspectos cognitivos (Bassok, 1990; Brown y Kane, 1988; Reed, 1993; Singley y Anderson, 1989). Según Singley y Anderson (1989), el estudiante construye una representación mental abstracta o esquema a través de experiencias en situaciones de aprendizaje y despliega los esquemas en la situación de transferencia. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes no puede reconocer similitudes entre el contexto de aprendizaje y el contexto de transferencia y, por lo tanto, no puede resolver con éxito los problemas en el último contexto, a pesar de que pueda hacerlo en el contexto de aprendizaje original. Los investigadores han explicado a menudo la falta de dicha transferencia en términos de la incapacidad de los estudiantes para construir un esquema coherente en el dominio de aprendizaje (Reed, 1993).

Algunas de estas investigaciones (Bransford y Schwartz, 1999; Greeno et al., 1993; Lobato, 1996) han comenzado a considerar la transferencia como las habilidades de los estudiantes para aprender a resolver problemas en el nuevo dominio (Bransford y Schwartz, 1999). Además, estas investigaciones se han centrado en la activación de conocimientos (DiSessa, 1993) o recursos cognitivos (Hammer, 2000) en el nuevo dominio y en la construcción dinámica de similitudes entre el aprendizaje y el contexto de transferencia (Lobato, 2003).

En este sentido, los modelos contemporáneos de transferencia han ido más allá de centrarse únicamente en los aspectos cognitivos de la transferencia, han incluido otros factores mediadores que afectan la transferencia. Una característica común de todas estas perspectivas es que consideran la transferencia como un proceso dinámico activo, y conciben la transferencia como la construcción personal de similitudes entre actividades donde los estudiantes ven las situaciones como similares (Greeno et al., 1993).

Así, desde la perspectiva de Rebello et al. (2005), hay dos tipos de asociaciones que un estudiante puede hacer en un escenario de resolución de problemas. El primer tipo de asociación implica asignar información leída de un problema a un elemento de conocimiento previo del estudiante. Un ejemplo es leer un valor numérico del enunciado del problema y asignarlo a una cantidad física particular. Por ejemplo, si un problema indica que un automóvil se está moviendo a 20 metros/segundo, el alumno reconoce que los 20 metros/segundo es la "velocidad" del automóvil, más específicamente que "$v = 20m/s$", y puede conectarse a una fórmula ya aprendida o a la derivada de una función, siendo estas parte del esquema interno del alumno para resolver el problema. Este tipo de asociaciones, entre la nueva información obtenida del problema y los elementos de la estructura de conocimiento del estudiante, generalmente están firmemente establecidas por el estudiante y las articula fácilmente. Y también, se produce un segundo tipo de asociación entre un elemento de conocimiento leído del problema y un elemento de la estructura de conocimiento del alumno, que a su vez se basa en su conocimiento previo. Esta asociación suele ser más abstracta y tenue y, a menudo, el alumno puede no ser capaz de articularla claramente. Por ejemplo, un estudiante al que se le muestra una animación de un automóvil en movimiento, sin siquiera saber que la velocidad tiene algo que ver con el problema, comienza a pensar en la velocidad del automóvil como una característica importante del problema. Este alumno está haciendo una asociación implícita entre dos ideas: movimiento (que se muestra en la animación del problema) y velocidad (cuyo conocimiento se considera necesario para describir el movimiento).

Estos dos tipos de asociaciones se pueden considerar vinculadas a dos tipos diferentes de procesos de transferencia. En el primer tipo de transferencia, la transferencia "horizontal", el estudiante lee información proporcionada explícitamente de un escenario problemático y activa su estructura de conocimiento. Esta conexión o asignación entre la información proporcionada y la estructura de conocimiento del estudiante determinará si este puede resolver el problema. Si dicha conexión o asignación no ocurre naturalmente, es decir, si la representación externa del problema no coincide con la estructura de conocimiento del estudiante o la representación interna del problema, este no puede resolver el problema. El enunciado del problema proporciona explícitamente toda la información requerida.

En el segundo tipo de transferencia, la transferencia "vertical", un estudiante reconoce las características de la situación y activa intuitivamente elementos de su conocimiento previo. En este tipo de transferencia, el estudiante generalmente no tiene una estructura de conocimiento preconcebida que se alinee con la información del problema. Más bien, construye un modelo mental *in situ* a través de sucesivas construcciones y deconstrucciones de asociaciones entre elementos de conocimiento. Por ejemplo, en lugar de que le digan la velocidad inicial y la aceleración del vehículo, al estudiante se le muestra un video o una animación de un vehículo y se le pide que descubra qué distancia pudo haber recorrido el vehículo después de salir del borde del video. En ningún momento se le habla al estudiante de la velocidad o aceleración inicial, ni siquiera de que estas variables sean relevantes para la situación. En este caso el estudiante, fijándose en el plano inclinado, primero debe reconocer que el vehículo estaba acelerando e incluso puede enfrentar el supuesto de que esta aceleración puede no ser uniforme. El estudiante no puede activar una estructura de conocimiento preconcebido claramente identificable o una representación interna que se adecue perfectamente con la situación.

Hay que destacar que un proceso dado puede tener componentes de transferencia "horizontal" y "vertical", y que estos dos procesos no son mutuamente excluyentes. En este trabajo nos centraremos en el proceso de transferencia "horizontal" en relación con la T.V.M. y la velocidad media. Consideraremos que hablamos de transferencia "horizontal" pues presentaremos a los estudiantes situaciones problemáticas con toda la información necesaria para su resolución, esperando que estos activen sus estructuras de conocimiento, tanto aquellas estructuras del dominio de la Física como de las Matemáticas, puesto que ambas son necesarias para resolver la situación. La transferencia de conocimiento se considerará efectuada de forma completa y correcta cuando el estudiante pueda realizar dicha conexión entre la situación problemática y las estructuras en ambos dominios. En este contexto, nuestra pregunta de investigación es la siguiente:

¿Qué transferencia o evidencia de conocimiento entre las Matemáticas y la Física se ponen de manifiesto en los estudiantes de Bachillerato (16-18 años) cuando resuelven problemas sobre la velocidad media?

3. Metodología

3.1 Participantes y contexto

Los participantes en la investigación fueron 119 estudiantes de la materia de Matemáticas II de Segundo de Bachillerato (17-18 años). Estos estudiantes han sido seleccionados de cuatro centros de Educación Secundaria de la provincia de Sevilla (España). Dichos centros se eligieron por la disponibilidad y facilidad que ofrecieron a la hora de poder realizar este estudio. Como hemos mencionado anteriormente, el concepto de velocidad media se introduce en segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria (13-14 años), mientras que es en cuarto curso de la Educación Secundaria Obligatoria (15-16 años) cuando el estudiante aprende el concepto de T.V.M. (MECD, 2015) en la asignatura de Matemáticas orientada a las enseñanzas académicas. Y es en Primero de Bachillerato cuando el concepto de T.V.M. se estudia en Matemáticas y el de velocidad media en Física. Sin embargo, estos contenidos se trabajan en dichas asignaturas –Matemáticas y Física y Química de Primero de Bachillerato– en diferentes momentos del curso (incluso en diferentes trimestres). Por este motivo, se ha considerado que los participantes en nuestra investigación sean estudiantes de un curso superior, antes de haber impartido estas materias en Segundo curso (17-18 años).

3.2 Instrumento de recogida de datos

El instrumento de recogida de datos seleccionado para este artículo son dos tareas (véase la Figura 1) que forman parte de un cuestionario diseñado para una investigación más extensa. La selección de tareas del cuestionario se ha realizado conforme a tareas utilizadas en investigaciones previas de la Cinemática y del concepto de Derivada, en el ámbito de investigación de Didáctica de las Ciencias Experimentales y Matemáticas, respectivamente. Además, se han adaptado las mismas para la etapa educativa pertinente.

TAREA 1:

Indica la velocidad media de un móvil que se mueve en una única dimensión en los intervalos temporales [0,10], [10,20], [20,30] y [0,40] a partir de su posición en los distintos momentos:

Tiempo [s]	0	1 0	20	30	40
Posición [m]	0	33	41	56	100

TAREA 2:

A) *Indica la velocidad media de un móvil que se mueve en una única dimensión en los siguientes intervalos temporales:*

De 0 a 17 segundos.
De 0 a 11 segundos.
De 0 a 5 segundos.
De 0 a 2 segundos.

B)

a) *¿Hay algún intervalo dónde la velocidad media es nula? Si lo hubiera dibújalo sobre la gráfica. Justifica tu respuesta.*

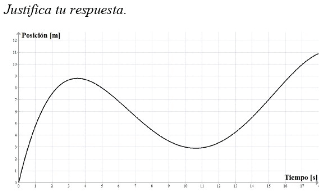

Figura 1. Tareas propuestas a los estudiantes de Bachillerato.
Fuente: Elaboración propia.

La primera tarea dada en registro numérico, como tabla de valores de posición-tiempo, no se corresponde ni al movimiento rectilíneo uniforme ni al movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, es decir, no se corresponde con ningún tipo de movimiento estudiado en la instrucción previa por los participantes en esta investigación. Esta tarea se asemeja a la utilizada por Azcárate (1990), no obstante, en su investigación no pregunta acerca de la velocidad media (T.V.M.).
Además, en la resolución de esta tarea se espera que el estudiante proceda a calcular la velocidad media de los intervalos temporales proporcionados. Para resolverla, pueden aplicar la fórmula de la T.V.M. desde los datos numéricos. Para ello, los estudiantes deben conectar dos puntos diferentes pero cercanos en un registro algebraico-numérico, es decir, usar dos puntos consecutivos de una tabla que relaciona las dos magnitudes covariantes (posición-tiempo) para calcular la velocidad media.

La segunda tarea, adaptada de investigaciones previas (Azcárate, 1990; Marrongelle, 2004; Sánchez-Matamoros, 2004), está dada en registro gráfico, y en ella se espera que el estudiante calcule la velocidad media directamente desde la gráfica como la pendiente de la recta secante entre dos puntos de la gráfica, es decir, el estudiante debe relacionar las dos magnitudes covariantes (posición-tiempo) mediante un segmento de línea (debe conectar dos puntos en una curva definida por la gráfica de posición-tiempo para obtener una cuerda, segmento de una línea secante a la curva, que pasa por esos dos puntos), y calcular su pendiente. También puede extraer los datos numéricos a partir de la representación gráfica (en cuyo caso realizará la traslación del registro de representación gráfico al algebraico-numérico) y calcular la velocidad como T.V.M. de la posición con respecto al tiempo. En ambos casos, obtendrá el valor de la velocidad media para cada uno de los intervalos del enunciado. Al igual que en la tarea 1, la gráfica presentada de la posición frente al tiempo muestra que el movimiento que se describe no se corresponde ni al movimiento rectilíneo uniforme ni al movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, estudiados en la instrucción previa. Además, en esta tarea deben indicar si hay algún intervalo donde la velocidad media sea nula, esto sucederá cuando el incremento de la posición sea nulo o la pendiente de la recta secante sea cero.

La transferencia o evidencia de conocimiento entre las Matemáticas y la Física puede observarse en la resolución de estas tareas en la medida en que los estudiantes identifican las dos magnitudes covariantes e interpretan el significado físico de lo que les piden, es decir, de la velocidad media. Además de entender su significado físico, los estudiantes deben mostrar que son capaces de trabajar con las tres magnitudes (posición, tiempo y velocidad), haciendo uso de las unidades de medida correspondientes a estas magnitudes. Así mismo, el hecho de que los datos presentados en estas tareas no se corresponden a ninguno de los tipos de movimientos estudiados en su instrucción previa, hace que el estudiante no pueda recurrir a ninguna de las fórmulas aprendidas.

Por tanto, en la resolución de ambas tareas se evidenciará una transferencia de conocimiento "horizontal" por parte del estudiante cuando asocie la velocidad media pedida (contexto físico) con la T.V.M. (contexto matemático) en cada intervalo en la tarea 1, o con la pendiente de la línea secante en la tarea 2. El estudiante leerá la tabla de valores proporcionada en el enunciado (posición-tiempo) en la tarea 1, o los puntos de la gráfica en la tarea 2, y activará su estructura de conocimiento para resolver el problema, dando como resultado del mismo el valor numérico de la velocidad media expresada en "m/s" como unidad de magnitud en cada uno de los intervalos temporales de los enunciados de dichas tareas. Además, el hecho de que el estudiante sea capaz de responder que la velocidad media será nula (al responder el apartado B de la tarea 2) cuando el incremento de la posición sea nulo, o la pendiente de la recta secante sea cero, también será indicativo de dicha transferencia de conocimiento o evidencia de conocimiento entre Matemáticas y Física, ya que tanto en un caso como en el otro deben usar conocimiento que proviene de las Matemáticas, para considerar que para que la velocidad media sea nula, el numerador del cociente incremental debe ser cero o la recta secante paralela al eje del tiempo. Esto le permitirá concluir, en ambos casos, que la posición del móvil en el instante de tiempo inicial y final de intervalo temporal considerado debe ser la misma.

3.3 Análisis

El enfoque metodológico seleccionado para esta investigación es el cualitativo descriptivo. Esta elección se debe a las preguntas de investigación planteadas, y por ende al elemento de recogida de datos utilizado: un cuestionario de preguntas abiertas (Hernández Sampieri et al., 2006). Tal y como se ha visto en el apartado anterior, el cuestionario constará de tareas donde los estudiantes deberán mostrar el proceso de resolución de las mismas y la justificación a dicho proceso.

Para analizar los datos se tomó primero una pequeña muestra a partir de la cual se codificaron las respuestas de los estudiantes a las dos tareas en función a las evidencias, y se crearon varias categorías. Una vez llegado a un acuerdo, se añadieron nuevos datos con el objetivo de revisar el sistema de categorías creado inicialmente y constatar su validez (Strauss y Corbin, 1994). Este proceso de análisis se realizó en dos fases. En la primera fase se analizaba si en la respuesta del estudiante a la tarea se ponía de manifiesto el uso de la T.V.M. o de la velocidad media. En la segunda fase analizamos si los estudiantes de Bachillerato ponían de manifiesto transferencia de conocimiento entre las Matemáticas y la Física o evidenciaban conocimiento de una de ellas o de ambas en la resolución de las tareas. Como resultado de este análisis obtuvimos distintos grupos de estudiantes basados en la manera en la que estos ponían de manifiesto evidencia de conocimiento entre Matemáticas y Física. Así consideramos, por un lado, a los estudiantes que, haciendo un uso correcto de la T.V.M., no evidenciaban conocimiento de Física y, por otro, los que haciendo un uso correcto de la T.V.M. además ponían de manifiesto en su resolución diferentes características de conocimiento de ambas. Los resultados de estas fases del análisis están descritos en la siguiente sección.

4. Resultados

Esta sección de resultados la hemos estructurado en cuatro apartados. En primer lugar hemos considerado aquellos estudiantes en los que no se evidencia el uso de la T.V.M., en segundo lugar los estudiantes en los que se evidencia el uso de la T.V.M. pero no se evidencia conocimiento de Física, y finalmente aquellos estudiantes en los que se evidencia el uso de la T.V.M. para encontrar la velocidad media y se evidencia además conocimiento de ambas, diferenciando en este último caso dos grupos, los que evidencian conocimiento de Matemáticas y Física en determinadas situaciones y los que evidencian siempre conocimiento de ambas, poniendo de manifiesto la transferencia de conocimiento entre la T.V.M. y la velocidad media (ver Tabla 1). Pasamos a describir cada uno de estos grupos.

Tabla 1

Número de estudiantes asignados a cada grupo

Grupo	Número de estudiantes
No uso de la velocidad media ni de la T.V.M.	46
Uso de la T.V.M.	8
Uso de velocidad media y T.V.M. a partir de datos de posición y tiempo	55
Uso de velocidad media y T.V.M. a partir de cualquier tipo de datos	10
Total	119

Fuente: Elaboración propia.

4.1 No uso de la velocidad media ni de la tasa de variación media

En este grupo encontramos 46 estudiantes que no utilizan de forma correcta la velocidad media ni la T.V.M. para resolver las tareas. La mayoría de los estudiantes de este grupo hacen uso del cociente entre posición y tiempo (sin calcular incrementos), un ejemplo de ello lo tenemos en el estudiante E38, como muestra la Figura 2. En la tarea 1, para calcular la velocidad media en el intervalo [0, 10] este estudiante coge el valor de la posición del móvil (33 m) en el instante de tiempo correspondiente (10 segundos) para responder que la velocidad en ese intervalo es 3,3 m/s, actuando de igual forma en los restantes intervalos temporales.

Estos estudiantes identifican parcialmente las magnitudes consideradas en el contexto físico. No distinguen entre posición y distancia recorrida, de ahí que realicen el cociente de la primera de ella entre el tiempo sin atender a incremento. El estudiante mencionado usa una fórmula memorizada en la instrucción previa pero no la recuerda de forma correcta. Ello hace que no pueda asociar el elemento físico de la velocidad media al elemento matemático de la T.V.M. Es decir, recuerda que debe hacer el cociente de la magnitud que tiene unidades de longitud entre la que tiene unidades temporales, pero sin prestar atención a las características de los datos que le da el problema. Observamos que no se produce transferencia de conocimiento entre el contexto físico dado y los conocimientos de Matemáticas que tiene el estudiante, debido a que este no interpreta de forma correcta el contexto físico.

Además, se evidencia en el estudiante dificultad en relación con el conocimiento de las Matemáticas, pues al realizar el cociente de la posición inicial (cero metros) entre el tiempo inicial (0 segundos), obtiene el cociente 0/0. Este cociente en Matemáticas se considera una indeterminación, mientras que, en el contexto físico presupone de forma errónea que al estar en la posición 0 metros a los 0 segundos se supone una velocidad 0 m/s, cuando no es así. Es decir, comenzar a medir el tiempo (t=0 segundos) justo cuando pasa por la posición de referencia (0 metros) no tiene por qué indicar que el movimiento tenga velocidad inicial nula. Esto puede considerarse una evidencia de que E38 no asocia el conocimiento de las Matemáticas a la Física, o que en ocasiones las dificultades relacionadas con conocimiento proveniente de las Matemáticas (en nuestro caso, T.V.M. o 0/0) impiden que se produzca la transferencia de conocimiento.

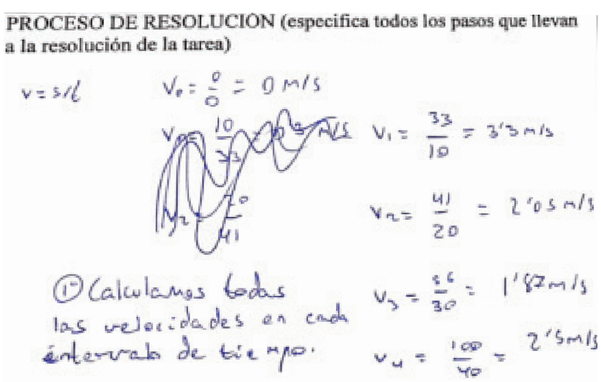

Figura 2. Respuesta de la tarea 1 del estudiante E38.
Fuente: Datos recogidos.

4.2 Uso de la tasa de variación media

De los 119 estudiantes, 8 utilizan correctamente la fórmula de la T.V.M., pero se evidencia como algo aprendido de la instrucción previa. No ponen de manifiesto evidencia de conocimiento entre la Física y las Matemáticas. Un ejemplo de ello lo tenemos en el estudiante E90 (véase la Figura 3). Este estudiante hace uso correcto de la T.V.M. en los distintos intervalos temporales, pero no indica, en ninguno de ellos, la unidad de medida de las magnitudes consideradas. Además, indica en la justificación de la respuesta que es una fórmula que recuerda de la instrucción previa.
En este grupo observamos que el estudiante usa un elemento matemático que ha estudiado previamente, la T.V.M. Sin embargo, a la hora de dar respuesta a la tarea, olvida que la tarea está dada en un contexto físico y responde directamente desde las Matemáticas.

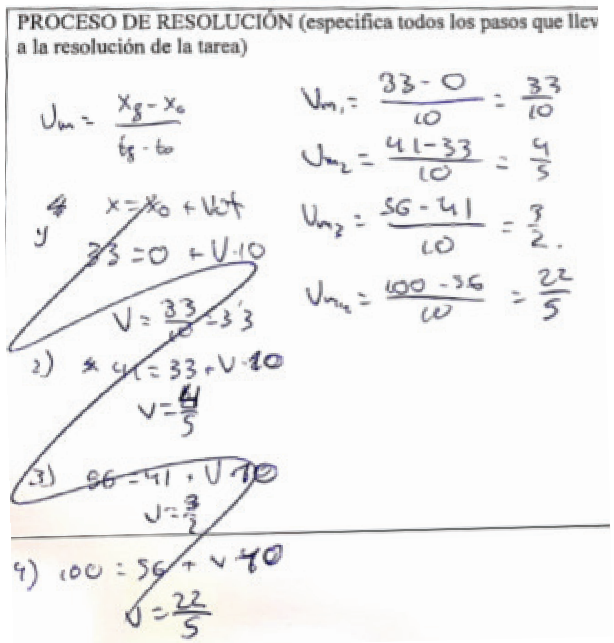

Figura 3. Respuesta de la tarea 1 del estudiante E90.
Fuente: Datos recogidos.

4.3 Uso de la velocidad media y de la tasa de variación media a partir de datos de posición y tiempo

En este grupo encontramos 55 estudiantes que utilizan la T.V.M. para calcular la velocidad media de forma correcta, aunque no son capaces de explicar en qué condiciones la velocidad media será nula. Estos estudiantes ponen de manifiesto en la resolución de ambas tareas evidencias de conocimiento entre Matemáticas y Física, al haber asociado la velocidad media pedida con la T.V.M. en cada intervalo en ambas tareas (lo que podría considerarse evidencia de transferencia de conocimiento horizontal), es decir, estos estudiantes han leído la tabla de valores proporcionada en el enunciado (posición-tiempo) en la tarea 1, o los puntos de la gráfica en la tarea 2, y han activado su estructura de conocimiento para resolver el problema, dando como resultado de las mismas el valor numérico de la velocidad media expresada en “m/s” como unidad de magnitud en cada uno de los intervalos temporales de los enunciados de dichas tareas. Es decir, desde un contexto físico, estos estudiantes leen la tarea, utilizan el elemento matemático asociado y luego son capaces también de dar la respuesta nuevamente en dicho contexto físico. Además, en algunos de ellos se evidencia también la traslación del registro numérico de los datos al registro gráfico de forma correcta, sin embargo, no son capaces de responder el apartado B de la tarea 2 donde se les pregunta en qué circunstancias la velocidad media es cero, evidenciándose que a partir de la posición y el tiempo dados sí son capaces de evidenciar conocimiento de ambas materias tanto cuando la tarea es dada en registro numérico como en registro gráfico, pero no sucede lo mismo cuando a partir de un valor dado de la velocidad media deben deducir qué sucede con la posición del móvil respecto al tiempo (no hay evidencia de transferencia de conocimiento horizontal), un ejemplo sería el estudiante E5 (véase Figura 4).

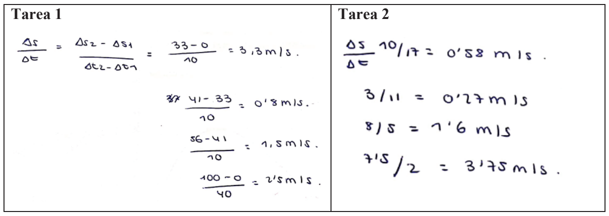

Figura 4. Respuestas de las tareas 1 y 2 del estudiante E5.

Fuente: Datos recogidos.

Entre estos estudiantes, hay un grupo (15 de estos 55 estudiantes) que, además de las velocidades medias en cada intervalo, calculan la media o promedio de todas las velocidades medias obtenidas en los distintos intervalos temporales. Un ejemplo de ello lo tenemos en la respuesta del estudiante E68 a la tarea 1 (Figura 5), que además escribe en la justificación de la respuesta: *"la velocidad media es la suma de las velocidades de los intervalos partida por el número de estos"*. Esto no se les pedía en el enunciado de la tarea, por lo que puede considerarse una dificultad añadida en relación a la transferencia de conocimiento entre Matemáticas y Física, puesto que estos estudiantes parecen estar aplicando la media aritmética aprendida en Matemáticas cuando realizan este último cálculo del promedio de las velocidades. Esto se puede considerar una evidencia de que este grupo de estudiantes no conoce las condiciones bajo las que el contenido matemático que han usado (la media aritmética) no es aplicable en Física.

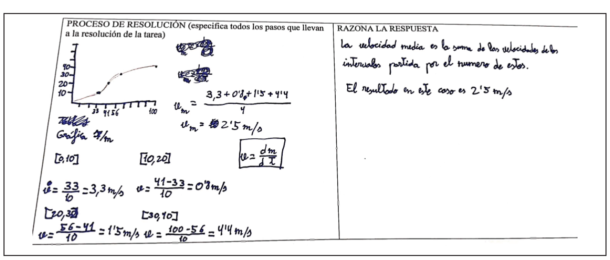

Figura 5. Respuesta de la tarea 1 del estudiante E68.

Fuente: Datos recogidos.

4.4 Uso de la velocidad media y de la tasa de variación media: transferencia de conocimiento

Finalmente, en este grupo encontramos a 10 estudiantes que utilizan la T.V.M. para dar respuesta a las tareas sobre la velocidad media, y además ponen de manifiesto en su respuesta la transferencia de conocimiento entre la Física y las Matemáticas, es decir, se evidencia conocimiento en todas las situaciones planteadas (lo que podría considerarse evidencia de transferencia de conocimiento horizontal). Estos estudiantes utilizan correctamente la T.V.M. para hallar la velocidad media tanto a partir del registro numérico como del registro gráfico, y utilizan en todo momento las unidades de medida correspondientes a las magnitudes consideradas en la situación planteada para dar una respuesta correcta. Un ejemplo de esto lo encontramos en el estudiante E100, este estudiante en la tarea 1, dada en registro numérico, responde de forma correcta justificando su resolución a partir de la expresión de la velocidad media (incremento de la posición dividido por el incremento del tiempo) expresando el resultado en m/s (véase Figura 6).

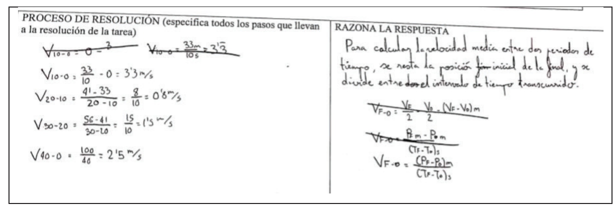

Figura 6. Respuesta de la tarea 1 del estudiante E100.

Fuente: Datos recogidos.

Además, en la tarea 2 (véase Figura 6), dada en registro gráfico, vuelve a poner de manifiesto el uso correcto de la T.V.M. aplicado a la velocidad media. Por tanto, en la resolución de ambas tareas se evidencia por parte del estudiante E100 conocimiento de Matemáticas y Física, lo que podría estar poniendo de manifiesto una transferencia de conocimiento horizontal. El estudiante E100 ha asociado la velocidad media pedida con la T.V.M. en cada intervalo en ambas tareas, es decir, ha leído la tabla de valores proporcionada en el enunciado (posición-tiempo) en la tarea 1, o los puntos de la gráfica en la tarea 2, y ha activado su estructura de conocimiento para resolver el problema, dando como resultado de las mismas el valor numérico de la velocidad media expresada en "m/s" como unidad de magnitud en cada uno de los intervalos temporales de los enunciados de dichas tareas.

Así mismo, responde correctamente al apartado B de la tarea 2. Es decir, indica correctamente que la velocidad media se anula en el intervalo [6, 15], justificando que *"para que la velocidad media sea nula el móvil debe estar en la misma posición en varios periodos [refiriéndose a los instantes de tiempo] en este caso como en el séptimo y decimoquinto segundos el móvil está a siete metros, se anula la velocidad media en ese periodo"* (véase la Figura 7). Esta respuesta de E100 es una evidencia de conocimiento de Matemáticas y Física (podría ser una manifestación de transferencia de conocimiento horizontal entre ambas materias), ya que ha considerado que para que la velocidad media sea nula, la posición del móvil en el instante de tiempo inicial y final del intervalo temporal que se considere debe ser la misma, es decir, el numerador del cociente incremental debe ser nulo (al tratarse del numerador de una fracción, conocimiento de Matemáticas que transfiere a Física). De esta manera, se ha puesto de manifiesto que ha activado su estructura de conocimiento para resolver el problema de forma correcta.

En la resolución de ambas tareas se ha evidenciado, por parte del estudiante, conocimiento de Matemáticas y Física con relación a la T.V.M. y a la velocidad media a partir de cualquier tipo de datos. Es decir, se ha puesto de manifiesto transferencia de conocimiento entre ambas materias por parte del estudiante, de lo que se deduce que este tiene construido un esquema coherente y robusto de la T.V.M.

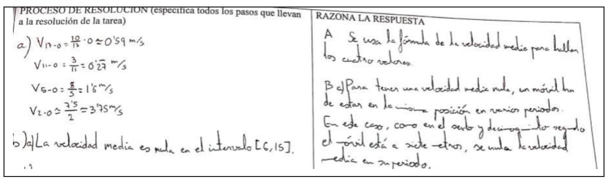

Figura 7. Respuesta de la tarea 2 del estudiante E100.
Fuente: Datos recogidos.

5. Discusión y conclusiones

El propósito de este artículo es caracterizar las manifestaciones de la transferencia de conocimiento entre la Física y las Matemáticas en la respuesta de los estudiantes de Bachillerato (16-18 años) a problemas sobre la velocidad media. Los resultados del análisis nos han permitido observar cómo hay un primer grupo de estudiantes que recuerda la fórmula de la velocidad media aprendida en la instrucción previa con errores, y un segundo grupo que recuerda la fórmula de la T.V.M. aprendida de la instrucción previa de forma correcta pero sin manifestar transferencia de conocimiento. Estos dos grupos podemos considerar que ven ambas materias, Matemáticas y Física, de forma separada (Woolnough, 2000). En este mismo sentido, una de las conclusiones de la investigación de Planinic et al. (2012) es que los estudiantes no son capaces de asociar los elementos matemáticos con las definiciones de los conceptos físicos, y ello les impide la transferencia de conocimiento entre ambas materias. También, la investigación de Marrongelle (2004) corrobora este resultado, pues, centrándose en el análisis de la transferencia de conocimiento de la T.V.M. en el registro de representación gráfico, observó cómo uno de los estudiantes resuelve el problema de forma rigurosa desde el punto de vista de las Matemáticas, pero no fue capaz de contextualizar su respuesta en el dominio de la Física.

Además, como resultado de este trabajo, hemos obtenido un tercer grupo de estudiantes que pone de manifiesto en la resolución de las tareas evidencias de conocimiento de Matemáticas y Física al haber asociado la velocidad media pedida con la T.V.M. en cada intervalo. Estos estudiantes han leído la tabla de valores proporcionada en el enunciado (posición-tiempo), o los puntos de la gráfica, y han activado su estructura de conocimiento para resolver el problema (Rebello et al., 2005), dando como resultado el valor numérico de la velocidad media expresada en "m/s" como unidad de magnitud en cada uno de los intervalos temporales de los enunciados de dichas tareas. En estos estudiantes se pone de manifiesto evidencia de conocimiento de ambas materias cuando deben calcular la velocidad media a partir de datos relativos a la posición del móvil y el tiempo tanto cuando estos datos vienen dados en registro numérico como en registro gráfico, sin embargo, no sucede lo mismo cuando a partir de un valor dado de la velocidad media deben deducir qué sucede con la posición del móvil respecto al tiempo. Y, por último, obtuvimos un cuarto grupo de estudiantes en los que se evidencia la transferencia de conocimiento entre Matemáticas y Física a partir de cualquier dato, ya que tanto cuando deben calcular la velocidad media a partir de datos relativos a la posición del móvil y el tiempo, como cuando a partir de un valor dado de la velocidad media deben deducir qué sucede con la posición del móvil respecto al tiempo, han activado su estructura de conocimiento para resolver el problema.

Desde estos resultados, se puede inferir en los estudiantes de Bachillerato una progresión en la transferencia de conocimiento entra la Física y las Matemáticas, que comienza en un primer momento no usando la velocidad media ni la T.V.M. de forma correcta; a continuación, en un segundo momento, usando la T.V.M. de forma correcta pero no asociándola a la velocidad media; en un tercer momento, asociando la velocidad media a la T.V.M. a partir de datos de posición y tiempo para calcular la velocidad media, y por último, en un cuarto momento, asociando la velocidad media a la T.V.M. tanto a partir de datos de posición y tiempo para calcular velocidad media, como a partir de datos de la velocidad media para calcular la posición respecto al tiempo. La caracterización de esta transferencia de conocimiento viene recogida en la Figura 8:

Figura 8. Transferencia de conocimiento entre Matemáticas y Física de la T.V.M. y la velocidad media.
Fuente: Elaboración propia.

Una de las dificultades en la transferencia de conocimiento que se ha puesto de manifiesto en la resolución de las tareas por parte de los estudiantes es la reiteración del cálculo de la velocidad media incluyendo el cálculo de la media aritmética de las velocidades. Aquellos estudiantes que, tras calcular la T.V.M. en cada intervalo, hacen la media o promedio de dichos valores, pueden estar manifestando una confusión entre el término "media" en ambos ámbitos. La media o promedio en Matemáticas se define como la suma de todos los valores obtenidos entre el número de valores (3).

$$\bar{v} = \frac{v_{media1} + v_{media2} + v_{media3} + \cdots}{n} = \frac{\sum v_{media}}{n} \quad (3)$$

Este tipo de dificultades en la transferencia de conocimiento entre Matemáticas y Física, que se pone de manifiesto en los estudiantes de Bachillerato, está en coherencia con el resultado de investigaciones previas y puede tener su origen en los procesos matemáticos implicados (Christensen y Thompson, 2012; Thompson et al., 2010), o en la propia Física, debido a que los estudiantes no observan similitudes entre los problemas en Matemáticas y Física (Planinic et al., 2012). Atendiendo a lo que exponen Redish y Kuo (2015), la dificultad puede venir asociada a que los estudiantes están acostumbrados a trabajar en la clase de Matemáticas y Física con lenguajes distintos, imposibilitando esta transferencia de conocimiento.

Todos los estudiantes participantes en el estudio que respondieron la tarea 2 lo hicieron trasladando el enunciado de la tarea, dado en registro gráfico, al registro numérico, ningún estudiante hizo uso de la velocidad media como pendiente de la recta secante entre dos puntos de la curva. Este resultado está en coherencia con resultados de investigaciones anteriores (Planinic et al., 2012) y nos indica que hay un predominio del registro algebraico-numérico sobre el registro gráfico en los estudiantes de Bachillerato. Como expresa Quinn (2013), los estudiantes tienden a evitar el concepto de pendiente en tareas que requieren la transferencia de conocimiento.

Este trabajo nos ha permitido caracterizar la transferencia de conocimiento entre Matemáticas y Física del concepto de velocidad media en relación con la T.V.M. en estudiantes de Bachillerato. Así mismo, al haber preguntado por distintas velocidades medias, ha puesto de relieve la dificultad vinculada al promedio de las velocidades medias, hecho que en investigaciones previas (Marrongelle, 2004) no se había puesto de manifiesto.

Agradecimientos

El presente trabajo ha recibido el apoyo del Proyecto del Plan Nacional: EDU2017-87411-R del "Ministerio de Economía y Competitividad, Gobierno de España".

Referencias

Azcárate, C. (1984). La nueva ciencia del movimiento de Galileo: una génesis difícil. *Enseñanza de las Ciencias, 2*(3), 203-208.

Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada.* Universitat Autònoma de Barcelona.

Bassok, M. (1990). Transfer of domain-specific problem-solving procedures. *Journal of Experimental Psychology: Learning, 16(3), 522-533.* https://doi.org/10.1037/0278-7393.16.3.522

Beichner, R. J. (1994). Testing student interpretation of kinematics graphs. *American Journal of Physics, 62*(8), 750-762. https://doi.org/10.1119/1.17449

Bransford, J. D., y Schwartz, D. (1999). Rethinking transfer: A simple proposal with multiple implications. *Review of Research in Education, 24*, 61-100. https://doi.org/10.3102/0091732X024001061

Brown, A. L., y Kane, M. J. (1988). Preschool children can learn to transfer: Learning to learn and learning from example. *Cognitive Psychology, 20*(4), 493-523. https://doi.org/10.1016/0010-0285(88)90014-X

Christensen, W. M., y Thompson, J. R. (2012). Investigating graphical representations of slope and derivative without a physics context. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research, 8*(2), 1-5. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.8.023101

DiSessa, A. (1993). Towards an epistemology of physics. *Cognition and Instruction, 10*(2-3), 105-225. https://doi.org/10.1080/07370008.1985.9649008

Evans, J. (1999). Building Bridges: Reflections on the Problem of. *Educational Studies in Mathematics, 39*, 23-44. https://doi.org/10.1023/A:1003755611058

Greeno, J. G., Moore, J. L., y Smith, D. R. (1993). Transfer of situated learning. En D. K. Detterman, y R. J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition and instruction* (pp. 99-167). Ablex.

Hammer, D. (2000). Student Resources for Learning Introductory Physics. *American Journal of Physics - Physics Education Research Supplement, 68*(7), S52-S59. https://doi.org/10.1119/1.19520

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4.a ed.). McGraw-Hill Interamericana.

Lobato, J. (1996). Transfer reconceived: How "sameness" is produced inmathematical activity. (Tesis doctoral, University of California). Dissertation Abstracts International, AAT 9723086.

Lobato, J. (2003). How Design Experiments Can Inform a Rethinking of Transfer and Vice Versa. *Educational Researcher, 32*(1), 17-20. http://www.jstor.org/stable/3699930

Marrongelle, K. A. (2001). *Physics experiences and calculus: How students use physics to construct meaningful conceptualizations of calculus concepts in an interdisciplinary calculus / physics course.* University of New Hampshire.

Marrongelle, K. A. (2004). How Students Use Physics to Reason About Calculus Tasks. *School Science and Mathematics, 104*(6), 258-272. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2004.tb17997.x

McDermott, L. C., Rosenquist, M. L., y Van Zee, E. H. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. *American Journal of Physics, 55*(6), 503-513. https://doi.org/10.1119/1.15104

Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte [MECD] (2015). Real Decreto 1105/2014. *Boletín Oficial del Estado, Sec. I* (Num. 3), 169-546.

Planinic, M., Milin-Sipus, Z., Katic, H., Susac, A., e Ivanjek, L. (2012). Comparison of student understanding of line graph slope in physics and mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*(6), 1393-1414. https://doi.org/10.1007/s10763-012-9344-1

Quinn, R. (2013). Students' Confidence in the Ability to Transfer Basic Math Skills in Introductory Physics & Chemistry Courses at a Community College. *Dissertations, 438.* https://aquila.usm.edu/dissertations/438

Rebello, N. S., Cui, L., Bennett, A. G., Zollman, D. A., y Ozimek, D. J. (2017). Transfer of Learning in Problem Solving in the Context of Mathematics and Physics. En D. H. Jonassen (Ed.), *Learning to Solve Complex Scientific Problems* (pp. 223-246). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315091938-10

Rebello, N. S., Zollman, D. A., Allbaugh, A. R., Engelhardt, P. V., Gray, K. E., Hrepic, Z., Itza-Ortiz, S. F. (2005). Dynamic Transfer: A Perspective from Physics Education Research. En J. P. Mestre (Ed.), *Transfer of Learning from a Modern Multidisciplinary Perspective* (pp. 217-250). Information Age Publishing Inc.

Redish, E. F., y Kuo, E. (2015). Language of Physics, Language of Math: Disciplinary Culture and Dynamic Epistemology. *Science and Education, 24*(5-6), 561-590. https://doi.org/10.1007/s11191-015-9749-7

Reed, S. K. (1993). A schema-based theory of transfer. En D. K. Detterman, y R. J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, Cognition and Instruction* (pp. 39-67). Ablex.

Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada (Desarrollo del concepto).* (Tesis doctoral, Universidad de Sevilla). Depósito de investigación idUS. https://idus.us.es/xmlui/handle/11441/73311#.Xg4kbuasO3I.mendeleyç

Singley, K., y Anderson, J. R. (1989). *The Transfer of Cognitive Skill.* Harvard University Press.

Strauss, A., y Corbin, J. (1994). Grounded theory methodology: An overview. En N. K. Denzin, y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 273-285). Sage Publications, Inc.

Thompson, J., Christensen, W., y Mountcastle, D. (2010). Investigating Student Understanding of Physics Concepts and the Underlying Calculus Concepts in Thermodynamics. *Bulletin of the American Physical Society, 55*. http://meetings.aps.org/link/BAPS.2010.MAR.H42.3

Valera, M., López Fernández, C., García García, S., Gil Ibáñez, J., Frutos, J., Iniesta, M. A., y Marset, P. (1983). Intuición e historia de las Ciencias en la Enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 1*(3), 205-217.

Verschaffel, L., Greer, B., y De Corte, E. (2002). Everyday Knowledge and Mathematical Modeling of School Word Problems. *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education*, (1993), 257-276. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3194-2_16

Woolnough, J. (2000). How do students learn to apply their mathematical knowledge to interpret graphs in physics? *Research in Science Education, 30*(3), 259-267. https://doi.org/10.1007/BF02461633

Young, H. D., y Freedman, R. A. (2009). *Física universitaria* (12.a ed., vol. I). Pearson Educación.

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i1.39

CARACTERÍSTICAS ARGUMENTATIVAS DE LA INTERPRETACIÓN DE TABLAS DE FRECUENCIA EN ESTUDIANTES CHILENOS DE SEGUNDO AÑO MEDIO

ARGUMENTATIVE CHARACTERISTICS OF THE INTERPRETATION OF FREQUENCY TABLES IN CHILEAN TENTH GRADE STUDENTS

Carmen Paz González Venegas
carmen.pgonzalezv@gmail.com
Colegio Cardenal Juan Francisco Fresno, Santiago de Chile, Chile

Rosa Muñoz Guajardo
rosa.munozg@usach.cl
Colegios Padre Hurtado y Juanita de Los Andes, Santiago de Chile, Chile

Joel Muñoz Pardo
joel.munoz@ug.uchile.cl
Liceo Bicentenario Óscar Castro Zúñiga, Rancagua, Chile

RESUMEN

La enseñanza de la estadística y probabilidad inicia en los primeros años de educación básica pues ambas ramas son necesarias para comprender e implementar el ciclo de investigación estadística desde la recolección de datos, su procesamiento, análisis y elaboración de conclusiones a partir de estos. Esta investigación cualitativa y descriptiva se centró en recoger información sobre las características argumentativas de la interpretación de tablas de frecuencia para datos agrupados, en estudiantes de segundo medio (15-16 años), lo cual es relevante pues la interpretación de este tipo de tablas conlleva a errores y problemas dentro del ciclo investigativo estadístico. Desde distintos análisis de interpretaciones de elementos estadísticos para los gráficos y adaptados a las tablas de frecuencia atingentes a esta investigación, se propusieron tres categorías para estas interpretaciones: racional, intuitivo y literal, de las cuales predominó el tipo racional consistente en utilizar conceptos y explicaciones matemáticas pertinentes, con la seguridad de que son los mecanismos adecuados para resolver problemas, generando argumentos con fundamentos matemáticos.

PALABRAS CLAVE:
Frecuencia; tabla de frecuencia; características argumentativas.

ABSTRACT

The teaching of statistics and probability begins in the first years of primary school since both processes are necessary to understand and implement the statistical research cycle from data collection, data processing, data analysis and drawing of conclusions from these. This qualitative and descriptive research was focused on collecting information about the argumentative characteristics of the interpretation of frequency tables for grouped data, in students in their second year of high school (15-16 years), which is relevant because the interpretation of this type of this type of tables entails errors and problems within the statistical research cycle. From different analyzes of interpretations of statistical elements for the graphs and adapted to the frequency tables that are relevant to this research, three categories were proposed for these interpretations: rational, intuitive, and literal. The predominating category was the rational type, consisting of using relevant mathematic concepts and explanations, with the assurance that these are the suitable mechanisms for solving problems and generating arguments with mathematical foundations.

KEYWORDS:
Frequency; frequency table; argumentative characteristics.

Recibido: 7 de septiembre de 2020 , Aceptado: 5 de marzo de 2021

1. Introducción y antecedentes

El desarrollo del pensamiento estadístico en la ciudadanía contribuye a alfabetizar a la sociedad desde una mirada crítica hacia la información, aportando elementos para que los individuos sean capaces de interpretar y analizar la información entregada a partir de gráficos, tablas, artículos publicados en los medios de comunicación o a través de redes sociales (Álvarez et al., 2020). Esta alfabetización estadística implica un conocimiento básico para que los individuos, además de ser consumidores críticos de información, puedan asumir roles de productores de la misma. Esto es, tal como lo afirma Tauber (2010), tener la capacidad de recoger y organizar datos estadísticos, tanto en tablas de conteo como en tablas de frecuencia y de contingencia.

Si bien el desarrollo del pensamiento estadístico tiene vital relevancia para la sociedad, este no ha estado ajeno a obstáculos o errores desde la mirada de la didáctica de la matemática, como lo han corroborado algunas investigaciones desarrolladas por Álvarez et al. (2020), quienes formularon una taxonomía de errores en la construcción e interpretación de tablas de frecuencia. Sin embargo, ahora el foco está puesto en ver qué características verbales tienen estas interpretaciones, considerando que la enseñanza del pensamiento estadístico comienza desde los primeros años de la educación básica y se extiende hasta la educación media, de acuerdo a la propuesta del Ministerio de Educación (MINEDUC, 2018b).

Como la enseñanza de la Estadística es transversal en el currículo chileno, y es en particular en séptimo básico cuando se plantea el contenido específico referido a la interpretación de tablas de frecuencia y las habilidades argumentativas a desarrollar sobre esta interpretación, para asegurar que los informantes hayan abordado este contenido y habilidades quienes participaron en esta investigación cursan segundo año medio.

El artículo comienza con la identificación del hecho didáctico y como es abordado por algunos autores como Álvarez et al. (2020). Posteriormente se presenta el marco de referencia de la investigación, donde se explicitan los fundamentos teóricos que son la base del estudio y de las características argumentativas que se pueden encontrar en las interpretaciones de los estudiantes al interactuar con el medio didáctico "tablas de frecuencia". Luego se muestran los aspectos metodológicos utilizados para el estudio y la recolección de información necesaria para la elaboración del análisis final que permitió concluir algunas características generales de los argumentos entregados por los participantes a investigar.

2. Identificación del hecho didáctico

Las tablas de frecuencia son un elemento que tiene diversas utilidades y funciones. Sin embargo, el propósito general se relaciona con entregar luces sobre el comportamiento global de las observaciones (Araneda et al., 2013).

Los autores anteriores mencionan tres propósitos fundamentales de las tablas de frecuencia. El primero se relaciona con resumir observaciones identificando patrones globales, el segundo se enfoca en organizar estas observaciones, considerando las tablas como un paso previo a las representaciones gráficas. Finalmente, el tercer propósito tiene que ver con la comunicación de la información, un conjunto de datos ordenados en una tabla de frecuencia permite comunicar la información obtenida y dar respuestas a preguntas de investigación ayudando a la extracción de conclusiones generales.

El último propósito cobra vital importancia para esta investigación, ya que se podría catalogar como el nivel máximo para completar este ciclo, analizando y concluyendo con la finalidad de responder preguntas argumentando sus respuestas y fomentando habilidades matemáticas (Araneda et al., 2013). En este sentido, la interpretación de las tablas de frecuencia queda catalogada como el hecho didáctico a estudiar, ya que a partir de la experiencia de los investigadores se muestra como una dificultad presente en los estudiantes. Lo anterior también queda de manifiesto en la investigación realizada por Guerrero y Torres (2017), en donde los autores mencionan una serie de errores que pueden cometer los estudiantes al interpretar tablas de frecuencia. Posteriormente estos errores propuestos fueron tomados en la investigación de Guerrero y Hernández (2019), quienes destacan algunos, como por ejemplo que encuentran relaciones inconsistentes entre las frecuencias de dos o más valores de la variable estadística, identifican cuando se elige valor de la variable cuantitativa, un representante del intervalo e identifican conclusiones que no concuerdan con los datos estadísticos proporcionados en la tabla de frecuencia presentada.

Considerando que los errores descritos solo se pueden reflejar a través de la argumentación de los estudiantes, ya sea de manera oral o escrita, se ha planteado el siguiente objetivo de investigación: Indagar cómo los estudiantes verbalizan la interpretación de una tabla de frecuencia. Para este objetivo, se asocia la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué características argumentativas están presentes en la verbalización de los estudiantes al interpretar una tabla de frecuencia?

3. Marco de referencia

La estadística es una rama de la matemática que ha tomado fuerza a medida que pasan los años, su utilidad va desde el orden en cómo se presenta la información hasta las decisiones que se pueden tomar de acuerdo con el análisis de los resultados que se obtengan con métodos estadísticos. Gracias a esta importancia creciente, es posible encontrar muchos autores (Álvarez et al., 2020; Batanero, 1998, 2001; Curcio, 1981; Del Pino y Estrella, 2012; Friel et al., 2001; Wood, 1968) que entregan información sobre diversos aspectos o elementos estadísticos, y la comunidad de investigadores se fortalece y complementa cada día. Desde fines del siglo pasado se comenzó a incorporar en los distintos currículos educativos la estadística. Así, se potencia la visualización de esta en la vida cotidiana, su influencia en las distintas áreas del conocimiento y cómo, a través de ella, se desarrolla el pensamiento crítico (Batanero, 1998).

Según Batanero (1998), tanto el Instituto Internacional de Estadística y la International Association for Statistical Education, se han ocupado de los elementos didácticos, la formación de profesionales y los usuarios de la estadística. Es así como en la segunda mitad del siglo XX el trabajo de estas entidades fue mejorar la información estadística que estaba disponible sobre los países subdesarrollados. Con base en esa necesidad se potenció la preparación de personas en estos países. Considerando lo anterior, la enseñanza de la estadística fue progresando tanto en su contenido como en las demandas de la formación que entrega, la información que maneja la sociedad y la comprensión de técnicas que facilitan el análisis de los datos, así como su interpretación.

El elemento estadístico en el que se centra particularmente esta investigación es la "tabla de frecuencia"; se ha recopilado distinta información que gira en torno a este elemento, y se suman investigaciones que se encontraron sobre el elemento "gráficos estadísticos" como aportes complementarios de los cuales se pueden realizar analogías hacia la tabla de frecuencia.

Batanero (2001) menciona que la elaboración de tablas y gráficos estadísticos es sencilla y por eso existe poca dedicación a su estudio y enseñanza, en algunos casos. No obstante, cuando se construye una tabla de frecuencias existe una reducción estadística, dado que se pierden valores originales de los datos individuales y se pasa a una distribución de frecuencias. Lo anterior puede resultar complejo para los estudiantes, dado que comprende cualidades sobre los individuos, pero es más complejo entender la idea de distribución.

Entre los principales escritos que sostienen el análisis de este documento encontramos la investigación de Friel et al. (2001), quienes muestran niveles de habilidades que se requiere que desarrollen las y los estudiantes cuando deben interpretar gráficos. Pese a que su objeto es el gráfico estadístico, se rescata la importancia que previeron en la tabla de frecuencias al considerar que se necesita prestar atención a su uso como herramientas de transición para organizar la información representada gráficamente. En su investigación contrastaron estudios previos que proponían tres niveles de habilidades requeridas para responder preguntas referidas a gráficos. Sobre estos tres niveles, Wood (1968) menciona que parecen estar relacionados con la comprensión de gráficos, nombrar, traducir, interpretar y extrapolar o interpolarlos. De acuerdo con la autora, la traducción requiere un cambio en la forma de comunicación, para interpretar se puede buscar relaciones entre especificadores de un gráfico, y al extrapolar o interpolar se perciben tendencias en los datos o se especifican las implicaciones que tiene en este proceso.

De esta manera se extrapolan estos niveles de comprensión de la información a niveles de comprensión de gráficos usando terminología de Curcio (1981) cuando se refieren a los niveles "leer los datos", "leer entre los datos" y "leer más allá de los datos". En particular usaron estos términos al clasificar preguntas que apelen a que las y los estudiantes se sientan llamados a "leer los datos" cuando la tarea proponga realizar básicamente una traducción de la información; o a "leer entre los datos" cuando la tarea proponga interpretar la información; o a "leer más allá de los datos" cuando la tarea proponga extrapolar/ interpolar la información.

Álvarez et al. (2020) se apoyaron en el trabajo de Friel et al. (2001) cuando propusieron sus niveles de interpretación de gráficos estadísticos. En esa investigación también se tipifican las dificultades en la interpretación de tablas de frecuencia, pero no se presentaron para este objeto matemático niveles de interpretación. Basados en su trabajo, esta investigación realiza una propuesta de niveles de interpretación argumentativa de una tabla de frecuencia. Se presentarán tres niveles que incluirán refuerzos de Yepes (2011) en aspectos lingüísticos involucrados.

Nivel 1: Leer los datos

El primer nivel tiene relación con que el estudiante, al interactuar con el medio didáctico, en el caso de la investigación de Álvarez et al. (2020) con un gráfico, solo se demuestra una lectura literal, muy básica o superficial, poniendo énfasis en los elementos adquiridos visualmente. En este nivel no hay una interpretación de la información. En palabras de Pinzás (2008), una comprensión literal es cuando el foco del estudiante está puesto en el elemento con el que debe interactuar, remitiéndose a lo más superficial de este (colores, apartados, títulos, etc.). Un estudiante que se encuentre en este nivel puede estar condicionado con el medio, ya que según datos aportados por Olarte (1998) los profesores redujeron, en ese estudio, los niveles de comprensión y se enfocan en elementos literales, sin dejar espacio a que los estudiantes se enfrenten a la lectura de un texto desde sus habilidades propias y desde el análisis crítico.

Nivel 2: Leer dentro de los datos

Cuando un estudiante es capaz de leer entre los datos, está utilizando estrategias de comprensión asociadas a las inferencias, las que se diferencian de una comprensión literal (nivel 1) ya que el estudiante está utilizando información entregada por el medio y estableciendo relaciones. En este sentido, Yepes (2011) menciona que una comprensión inferencial no es posible si la comprensión literal es pobre. Aquí se plantea cuán importante es el desarrollo de una buena comprensión literal como base de la comprensión inferencial.

Se hace una interpretación e integración de los datos presentados en el gráfico. Una lectura con mayor nivel de profundidad, pero solo hasta el punto de establecer relaciones entre los datos a partir de los conocimientos previos respecto a conceptos y destrezas matemáticas. Se establecen relaciones de orden entre frecuencias, se reconoce el tipo de variable de estudio y se identifica algún comportamiento de los datos a partir de medidas de tendencia central que se reconocen a simple vista (la moda) (Álvarez et al., 2020).

Nivel 3: Leer más allá de los datos

En palabras de Curcio (1981), en este nivel se requiere una extensión, predicción o inferencia que depende de los conocimientos previos para leer más allá de los datos. En los aportes de Friel et al. (2001), este nivel se relaciona con la habilidad de generación: "uno debe no solo procesar información en el documento, sino también hacer inferencias documentadas o proponer conocimientos previos personales" (p. 145). De acuerdo con Yepes (2011), la comprensión lectora es un proceso interactivo. Esto se aplica en este nivel respecto de la lectura y comprensión de una tabla de frecuencia en el sentido de que para realizar una interpretación "más allá de los datos" es necesario que la información o conocimientos previos que tiene el lector se complementen con la información que pueda rescatar de la misma tabla de frecuencia, y generar nueva información o darle mayor significado a los objetos que esta tabla contenga.

Lo referido a los contenidos y habilidades según nivel educativo será obtenido desde lo establecido por el MINEDUC (2012). En este planteamiento curricular, una de las habilidades que se busca desarrollar en la enseñanza de la matemática en Chile se relaciona con Argumentar y Comunicar, considerando lo que plantea el MINEDUC , esta habilidad apunta principalmente a que las alumnas y los alumnos de educación básica establezcan progresivamente "islotes deductivos", es decir, cadenas cortas de implicaciones lógicas que les permitirán hacer predicciones eficaces en variadas situaciones concretas, esperando que en niveles superiores de la educación obligatoria logren utilizar el lenguaje matemático con precisión para expresar ideas matemáticas. Al complementar lo anterior con la estadística, nos encontramos con la siguiente definición: "una persona alfabetizada estadísticamente debería ser capaz de leer e interpretar los datos; usar argumentos estadísticos para dar evidencia sobre la validez de alguna información, (...) leer e interpretar tablas, gráficos y medidas de resumen que aparecen en los medios" (Del Pino y Estrella, 2012, p. 55).

Se debe tener en cuenta que esta investigación estará enfocada en la interpretación de los datos obtenidos a partir del instrumento desarrollado. Debido a esto, es necesario mencionar que desde la didáctica de la Lengua, interpretar algún elemento está relacionado con la comprensión de este. De aquí que Sánchez (1974, citado en Herrera et al., 2015) defina la interpretación como la acción de formarse una opinión u obtener alguna idea, es decir, presenta una relación profunda con la comprensión, ya que permite complementar lo entregado por el elemento a interpretar y la percepción de quien recibe el estímulo. De acuerdo con lo anterior, en esta investigación se definirá la interpretación de tabla una de frecuencia como el proceso de generar una idea, respuesta, significado o conclusión a partir de la lectura de la tabla; esta generación puede ser fundada directamente a partir de los datos de la tabla, o entre ellos, o complementada con conocimientos previos de quien realice la interpretación.

4. Metodología

El estudio adoptó un enfoque cualitativo desde el cual se analizaron las respuestas de los participantes frente a las preguntas de interpretación de tabla de frecuencias para datos agrupados.

4.1 Caracterización de las y los informantes para la exploración

Participaron un total 10 estudiantes de segundo medio, de entre 15 y 16 años: 4 estudiantes de la Región de Valparaíso, 1 estudiante de la Región Metropolitana y 5 estudiantes de la Región de O'Higgins. La elección de las y los participantes radicó principalmente en las posibilidades de accesibilidad de los investigadores, considerando la contingencia sanitaria. Para este estudio se contó con el consentimiento escrito o de palabra de profesores y estudiantes.

Para la elección del nivel escolar de las alumnas y alumnos, se tomaron en cuenta sus conocimientos en el ámbito del eje Datos y Probabilidades, y los contenidos que deberían haber adquirido durante los años de enseñanza básica. Esto se puede evidenciar con los contenidos curriculares como se muestra a continuación.

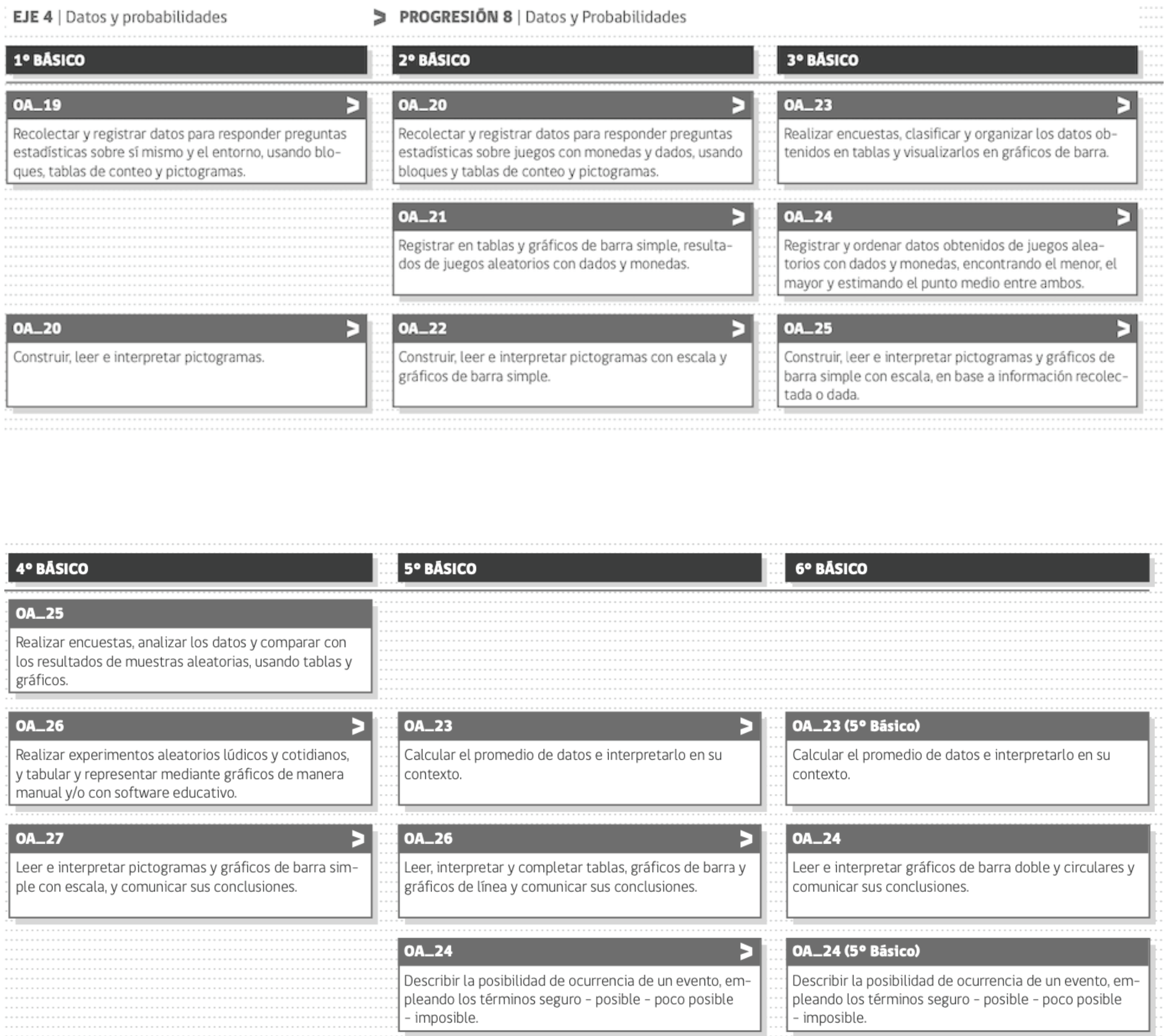

Figura 1. Progresiones de Aprendizaje en Espiral y Orientaciones para su Implementación eje Datos y Probabilidades.
Fuente: MINEDUC, 2018b.

En la figura anterior se puede extraer que las y los estudiantes deberían poseer conocimientos sobre recolectar y organizar información, interpretar gráficos y tablas, entre otros. Además, según su nivel educacional las alumnas y alumnos deberían conocer las tablas de frecuencia, los conceptos que estas presentan y a qué se refiere cada uno de ellos, considerando que cumplieron con la educación básica obligatoria, siendo promovidos a la enseñanza media.

4.2 Instrumento de recogida de datos

El instrumento diseñado por los investigadores, y aprobado por especialistas en el área, consistió en una tabla de frecuencias que muestra el avance de los casos confirmados de COVID-19 durante los primeros 90 días desde que se dio a conocer el primer contagiado por coronavirus en Chile, el 3 de marzo de 2020. Los datos fueron obtenidos del 23º Informe Epidemiológico elaborado por el Ministerio de Salud de Chile (2020).

Se presentó en la tabla los nuevos casos confirmados de COVID-19 mediante datos agrupados en intervalos de 10 días. Esta tabla contiene las frecuencias absolutas, frecuencias acumuladas, frecuencias relativas, frecuencias relativas acumuladas, frecuencias relativas porcentuales y frecuencias relativas acumuladas porcentual de cada intervalo. Se menciona que se realizó esta tabla con base en los primeros 90 días, pues al tiempo de elaborar y aplicar el instrumento, era la información más reciente a la que se tuviera acceso de forma fidedigna.

Instrumento:

Observa la siguiente tabla de frecuencias que informa el avance del COVID-19 en nuestro país. Lee las preguntas, respóndelas en los lugares y de la forma que más te acomode.

Tabla 1: Casos informados COVID-19 durante los primeros 90 días en Chile

Día	Frecuencia absoluta (Casos nuevos)	Frecuencia Absoluta Acumulada (Casos acumulados)	Frecuencia Relativa	Frecuencia Relativa Acumulada	Frecuencia Relativa Porcentual	Frecuencia Relativa Acumulada Porcentual
[1,10[	23	23	0,0002	0,0002	0,02	0,02
[10,20[	514	537	0,0054	0,0057	0,54	0,57
[20,30[	2201	2738	0,0232	0,0289	2,32	2,89
[30.40[	3763	6501	0,0397	0,0685	3,97	6,85
[40,50[	4006	10507	0,0422	0,1108	4,22	11,08
[50,60[	5516	16023	0,0582	0,1689	5,82	16,89
[60,70[	12843	28866	0,1354	0,3043	13,54	30,43
[70,80[	24751	53617	0,2609	0,5652	26,09	56,52
[80,90[	41241	94858	0,4348	1,0000	43,48	100,00
Total	94858	94858	1,0000	1,0000	100,00	100,00

Fuente: MINSAL, 2020

Preguntas:

1. ¿Qué información otorga el dato destacado en verde?¿Qué significado tiene?
2. Si tuvieras que explicarle a un amigo o amiga el significado del dato destacado en azul ¿qué le dirías?
3. Tu amigo o amiga no entiende el procedimiento que utilizaste para explicar el significado de ese dato. Cuéntale cómo lo hiciste.
4. ¿Qué te llama la atención de la tabla? ¿por qué?

Figura 2. Hoja de trabajo del estudiante.

Fuente: Elaboración propia.

4.3 Respuesta experta

A continuación, se proponen algunas respuestas expertas para las preguntas planteadas en el instrumento de recogida de datos, sin embargo, dada la naturaleza de estas, las respuestas podrían alejarse de la respuesta experta y aun así ser consideradas correctas.

1. ¿Qué información otorga el dato destacado en verde? ¿Qué significado tiene?

   El dato destacado en verde indica la frecuencia relativa, en este caso concluimos que entre los días 70 y 80 se contagió una proporción de 0,26 personas del total.

2. Si tuvieras que explicarle a un amigo o amiga el significado del dato destacado en azul, ¿qué le dirías?

   El significado que tiene el dato destacado en azul representa un porcentaje del total de los contagiados hasta un intervalo determinado. En este caso habría que explicar que del 100% de los contagiados durante los primeros 90 días, el 16,89% se contagió antes del día 60.

3. Tu amigo o amiga no entiende el procedimiento que utilizaste para explicar el significado de ese dato. Cuéntale cómo lo hiciste.

   Esta es una respuesta variada. Una posible respuesta es comentar a la amiga o amigo cuál es la definición o forma de calcular la frecuencia relativa acumulada porcentual y dar paso a explicar su significado, como se expuso en la respuesta anterior.

4. ¿Qué te llama la atención de la tabla?, ¿por qué?

   Esta es una respuesta variada: el enfocarse en el crecimiento de los contagios como casos confirmados en cada intervalo, en la concentración de porcentajes en algún intervalo, etc.

Las respuestas propuestas en esta sección tienen como finalidad sugerir una pauta dentro de los límites matemáticos e interpretativos en que se debería enfocar la respuesta de los alumnos que participaron en la investigación. Sirvió, posteriormente, para clasificar las respuestas emanadas de los informantes.

4.4 Alcances y limitaciones

Una posible complicación fue el tipo de representación de los valores de la tabla, por lo que se debió sopesar la posibilidad de que se agregara dificultad si los datos se presentan como decimales y no fracciones. Se determinó utilizar decimales pues es la forma en que tanto los textos escolares presentados por el MINEDUC como los planes y programas elaborados por la misma institución, presentan y trabajan las tablas de frecuencias con esta representación.

En el contexto de la pandemia por COVID-19, el país se encontraba en el mencionado Estado de Excepción Constitucional, que imposibilitaba el libre desplazamiento, además de la orden desde el MINEDUC de suspender las clases presenciales fomentando el teletrabajo. Esto repercutió en la facilidad de acceder a los estudiantes como informantes en el estudio, así como asegurar que recibieron, trabajaron y devolvieron el instrumento a los investigadores.

El instrumento consistió en una presentación de diapositivas que muestra finalidad de la investigación, el contexto de la tabla de frecuencia –pues el COVID-19 es un tema delicado de tratar debido al impacto social y económico que ha generado en familias chilenas.

4.5 La propuesta del instrumento

El instrumento de recogida de datos fue propuesto en un documento de presentación de diapositivas a los estudiantes que formaron parte de la muestra. En un primer lugar se presenta un saludo por parte de los investigadores y el propósito de la actividad. Posteriormente, se solicita observar la tabla de frecuencias presente en la figura 1 y luego, en diapositivas siguientes, se solicita responder las preguntas en los espacios asignados de forma oral y escrita.

Las preguntas planteadas en el instrumento están dirigidas a situar a los estudiantes en distintos escenarios de interpretación. A continuación, se presenta los niveles correspondientes a cada una de las preguntas, niveles tomados de lo planteado por Curcio (1981).

Tabla 1

Categorización de las preguntas del instrumento según Curcio (1981) y Wood (1968)

Pregunta	**Categoría según Curcio (1981)**	**Categoría según Wood (1968)**
¿Qué información otorga el dato destacado en verde? ¿Qué significado tiene?	Según Curcio (1981), esta pregunta corresponde al nivel “Leer los datos”.	De acuerdo con Wood (1968), el comportamiento que debiera predominar en las y los estudiantes para responder este tipo de pregunta es el de “traducción”.
Si tuvieras que explicarle a un amigo o amiga el significado del dato destacado en azul, ¿qué le dirías?	Esta pregunta corresponde al nivel “Leer los datos”, pues al mirar la columna de la frecuencia relativa porcentual acumulada se puede concluir la explicación solicitada.	El comportamiento que debiera predominar en quien responda es el de traducir, con el objeto de describir el elemento o concepto involucrado.
Tu amigo o amiga no entiende el procedimiento que utilizaste para explicar el significado de ese dato. Cuéntale cómo lo hiciste.	Según Curcio (1981), esta pregunta corresponde al nivel “Leer entre los datos”, pues es necesario que enlace elementos de la tabla para explicar a su amiga o amigo.	De acuerdo con Wood (1968), el comportamiento que debiera predominar en las y los estudiantes para responder este tipo de pregunta es el de “integración”, pues el enlace se debe realizar entre los datos para responder a la pregunta.
¿Qué te llama la atención de la tabla?, ¿por qué?	Según Curcio (1981), esta pregunta corresponde al nivel “Leer más allá de los datos”.	De acuerdo con Wood (1968), el comportamiento probable en las y los estudiantes para responder este tipo de pregunta es el de “generar”, pues es necesario que complemente su respuesta con ideas previas, para realizar contrastes o notar tendencias.

Fuente: Elaboración propia.

4.6 Categorías de análisis

Para analizar la interpretación de tablas de frecuencia realizada por los estudiantes, fue necesario establecer categorías de interpretación de los argumentos que estos entregaron. A partir del análisis general de las argumentaciones, se crearon 3 categorías con características específicas. Estas categorías siguen criterios propuestos originalmente por Curcio (1981), y que luego Álvarez et al. (2020) modificaron para el objeto "gráfico estadístico". Con base en estos antecedentes, se propondrán 3 categorías modificadas y adaptadas para el objeto "tabla de frecuencia", las que se presentan a continuación.

Tabla 2

Características de las categorías

Categoría	Características
C1 "Racional"	Una interpretación tiene características argumentativas "racionales" cuando utiliza vocabulario matemático, o aplica conceptos o procedimientos matemáticos de forma explícita o con la seguridad de que es atingente su uso para resolver un problema o contestar alguna pregunta.
C2 "Intuitiva"	Una interpretación tiene características argumentativas "intuitivas" cuando el vocabulario incluye conceptos matemáticos de forma implícita o sin la seguridad de que su uso sea atingente para resolver un problema o contestar alguna pregunta.
C3 "Literal"	Una interpretación tiene características argumentativas "literales" cuando el vocabulario utilizado es redundante con la misma pregunta o problema, o cuando no realiza conexiones con otros elementos de la tabla o con conocimientos previos para profundizar.

Fuente: Elaboración propia.

Para la presentación de los resultados de la investigación se procedió a categorizar las respuestas de los estudiantes según las características de sus respuestas. Para ello se realizó la abreviación de los estudiantes, pregunta y tipo de respuesta, como se muestra en el siguiente ejemplo:

E1_P3O
Estudiante 1 _ Pregunta 3 Oral
(Para la última inicial, también puede utilizarse la letra E que corresponde a una respuesta escrita)

5. Resultados

5.1 Características racionales de la interpretación

Un punto principal para caracterizar los elementos racionales en la interpretación de tablas de frecuencia es considerar un vocabulario matemático correcto pues, como plantean Puga et al. (2016), al aplicar un lenguaje correcto y pertinente los docentes y estudiantes mejoran su diálogo, su comunicación, reflexión y comprensión. Las respuestas enmarcadas son ejemplos de las categorías de argumentos.

Cuando se plantea la primera pregunta, *"¿qué información otorga el dato destacado en verde? ¿Qué significado tiene?"*, haciendo referencia a la frecuencia relativa, nos encontramos con estudiantes capaces de utilizar conceptos matemáticos para explicar sus respuestas; por ejemplo:

> *La frecuencia relativa es el cociente entre la frecuencia absoluta y el total de casos. Nos entrega información sobre cuánto del total equivalen los casos nuevos de estos días, en este caso, los casos nuevos de los días 70-80, es un 0,2609 del total de 94858.* **E1_P1E**.[1]

En el ejemplo anterior, podemos observar la explicación y el uso del concepto de frecuencia relativa. Esta explicación se manifiesta a través de la utilización de términos matemáticos como cociente, frecuencia absoluta y total de casos, elementos propios de la definición de frecuencia relativa.

[1] *Todas las respuestas de los estudiantes ya sean orales o escritas, se plasman de forma textual, incluyendo los errores de ortografía.*

Además, la ejemplificación que realiza el estudiante da a entender que asocia los datos con porcentajes, específicamente cuando menciona que entre los días 70 y 80 hay un 0,2609 del total de 94.858 casos contabilizados. A modo general se observa que el estudiante relaciona elementos de la tabla presentada con la finalidad de dar respuesta a la pregunta.

La categorización para esta pregunta se muestra también en las siguientes respuestas de los participantes del estudio:

Es la frecuencia de contagias entre 70 y 80 días, 24751/94858. **E7_P1E.**	*La información que otorga el dato destacado en verde es la frecuencia relativa la cual significa la taza de nuevos casos diarios por Covid-19 entre el día 70 a 80.* **E9_P1E.**

Si bien las respuestas anteriores cumplen con los elementos definidos para la categoría 1, no se relacionan con la respuesta experta, pues no se evidencia una argumentación apoyada en el concepto de proporción.

Al analizar las respuestas que realizaron los estudiantes a la pregunta “si tuvieras que explicarle a un amigo o amiga el significado del dato destacado en azul, ¿qué le dirías? (refiriéndose a la frecuencia relativa porcentual acumulada), en primer lugar, se muestra que solo un estudiante responde la pregunta en función del planteamiento “explicarle a un amigo o amiga” y además asocia la frecuencia relativa acumulada a su definición.

Que es la suma de las demás frecuencias relativas, y para que sea una frecuencia relativa acumulada porcentual el resultado de la suma tiene que ser multiplicado por cien. **E6_P2E**

En segundo lugar, el resto de las respuestas observadas solo entregan información sobre el dato destacado en azul, asociando la frecuencia relativa porcentual acumulada a su definición. Algunos ejemplos se presentan a continuación:

El número destacado con azul es el porcentaje de los casos hasta el día 60 con respecto a los casos totales. Aquí se ve que lo casos que hubo hasta el día 60 equivale al 16,8 por ciento de los casos totales. **E1_P2O**	*El significado del dato destacado en azul es la-- es el porcentaje total de contagiados que hay entre el día 1 y el día 60 que es el día en el cual está destacado este dato.* **E10_P2O**

La tercera pregunta está enfocada en que el estudiante sea capaz de explicar el procedimiento que utilizó para conocer el significado del dato destacado en azul (correspondiente a la frecuencia acumulada relativa porcentual hasta el intervalo [50-60[). Se observa que las respuestas entregadas se enfocan en explicar el proceso que llevaron a cabo para determinar el valor de la frecuencia relativa acumulada porcentual, como se evidencia en las siguientes respuestas:

Dividí el número de casos de contagios había hasta el día 60 con el total de los casos con el total de los casos y el resultado 0,16 lo multipliqué por 100 para ver el porcentaje final. **E1_P3O**	*Solo hay que fijarse en que dice frecuencia relativa acumulada porcentual lo que nos dice que no son los caso acumulados hasta ese día, fi/N nos ayuda a calcular el porcentaje multiplicado por 100.* **E3_P3E**

Por último, la pregunta 4 se enfoca en determinar lo que llamó la atención de la tabla en los estudiantes. En este caso, quienes sostuvieron una argumentación racional a partir de un análisis de la tabla mencionaron lo siguiente:

Me llama la atención cómo partiendo con 23 casos terminamos en 94.858 en 100 días, casi. Cómo después de los días 50 y 60 los casos ya se multiplican casi el doble y que los contagiados en los días 8’0 y 90 equivalen casi la mitad de los contagiados totales. **E1_P4O**.	*Que cada diez días se duplican los casos según la tabla, llegando al 100% rápidamente.* **E8_P4O**.

5.2 Características intuitivas de la interpretación

Las respuestas a la pregunta 1, *“¿qué información otorga el dato destacado en verde? ¿Qué significado tiene?”*, que contienen características intuitivas, muestran evidencia de conocer u ocupar algunos elementos básicos y a través de ellos intentar relacionar y construir alguna idea, extraer alguna conclusión cierta, pero que muchas veces puede llegar a ser confusa o simplemente incorrecta. En la respuesta experta se planteaba asociar la frecuencia relativa acumulada a la probabilidad de que una persona se haya contagiado entre el día 70 y 80. Sin embargo, nadie de los que evidenciaron un proceso inductivo apuntó en esa dirección. En las siguientes respuestas se observa una interpretación acerca de la duplicación de los casos nuevos en un intervalo, respecto de su antecesor:

Que del día 70-80 se duplicaron los casos respecto a los 10 días anteriores. **E8_P1O**

También, con respecto a la pregunta 1, se ve en las respuestas que los estudiantes obtienen una relación entre la cantidad de personas contagiadas y el total de casos mediante la división y una mezcla, que sugerentemente induce una razón que para el alumno *"permite juzgar si esos casos son muchos o pocos en escala"*:

Para mi sería… el recuadro número verde, el número de veces que se repitió el suceso, pero también podría ser… no sé quizá, la muestra de alguna de la cantidad de personas contagiadas dividida con la suma de todos los casos nuevos. **E3_P1E**	*La información que me otorga es que me es más fácil, porque me entrega la información de manera más visual, porque es una mezcla de la frecuencia y del total de datos y también me permite juzgar si esos casos son muchos o pocos en escala.* **E6_P1E**

Para la pregunta 2, "si tuvieras que explicarle a un amigo o amiga el significado del dato destacado en azul, ¿qué le dirías?", se evidencia un análisis del comportamiento de los datos a medida que avanzan los días (se avanza de intervalo); los alumnos son capaces de ver este comportamiento en la tabla y a partir de eso proponer una explicación de la obtención del dato destacado en azul:

Lo que significa lo destacado en azul es la suma de la frecuencia relativa osea que es la suma de algunas proporciones de los datos totales. **E2_P2E.**	*Lo que hice fue fijarme donde dijera frecuencia relativa acumulada porcentual, porque eso nos indica que sería los datos acumulados hasta aquel día, en este caso sería 50, 60 días.* **E5_P2O.**

En la pregunta 3 del instrumento de recogida de datos, donde se solicita explicar a un amigo o amiga que no entiende el procedimiento que se usó para explicar el significado de ese dato, también se evidencia la utilización de elementos de la tabla para construir una explicación que muestre cómo se procedió para desarrollar la idea del significado de la frecuencia relativa porcentual acumulada y no se sostiene la explicación en definiciones matemáticas asociadas; algunos ejemplos son:

Sumando las frecuencias de arriba hacia abajo, de la primera a la segunda, el resultado de la segunda sumado con la tercera y así consecutivamente. **E2_P3E**	*Lo que hay que hacer para el por centaje, o mejor dicho la frecuencia acumulada porcentual es ocupar la frecuencia relativa acumulada, como se ocupa pues, ocupamos los datos que hay en la frecuencia relativa acumulada y corremos dos espacios hacia la izquierda.* **E9_P3O..**

Entre las respuestas a la pregunta 3 también se observaron características intuitivas, es decir, recurrían a ideas previas sin la certeza de que serían de utilidad para llegar a una respuesta o procedimiento correcto, o sin mostrar un vocabulario preciso matemáticamente hablando. Por ejemplo, en el proceso intuitivo fue posible observar que las y los estudiantes asocian el significado de la frecuencia relativa porcentual acumulada al porcentaje:

Yo le diría nos representaría en una forma de porcentaje la cantidad de casos totales acumulados que se encuentran en aquel día. **E5_P3O.**	*Es la eh… frecuencia con la cual se generan los contagios a diarios. Eh… la frecuencia eh… relativa acumulada es la suma de todos estos datos. Eh.. en este caso eh… tenemos 0,1689 o 0,1689 [cero coma dieciséis ochentainueve o cero coma mil seiscientos ochentainueve]; esa cifra la convertimos en porcentaje y nos da la frecuencia relativa acumulada, en este caso 16,89. Este… operatoria se puede utilizar en todas las frecuencias relativas y frecuencias acumuladas para obtener todos los datos la frecuencia relativa acumulada porcentual.* **E9_P3O.**

Por último, en la pregunta 4 que trata sobre qué les llama más la atención de la tabla, se tiene un par de ejemplos en los que logran observar un crecimiento exponencial de los casos nuevos de contagio en intervalos de diez días. Estos ejemplos poseen características intuitivas pues ocupan ideas previas sin tener la certeza de sus definiciones o de si están bien ocupadas (que en ambos casos no es así, cuando mencionan crecimiento exponencial).

"Lo que más me llamó la atención fue que la frecuencia relativa, que no me acordaba mucho como era, además parece que nunca la había visto muy bien y gracias a esta encuesta, la investigué y pude entender un poco más y también me ayudó a ver el crecimiento exponencial que ha tenido el COVID 19 en Chile, eso fue lo que me llamó la atención. Muchas gracias por la encuesta y me gustó mucho participar." **E6_P4O**	*Lo que me llama la atención es la forma en que los datos están ordenados, porque nunca los había visto así, me refiero los datos sobre el covid-19, ya que así es más fácil visualmente de ver el crecimiento y es exponencial el crecimiento.* **E6_P4E**

5.3 Características literales de la interpretación

Como se mostró en el marco de referencia y en las categorías de análisis, existen lecturas que carecen de interpretación, y son solo una mención de los datos, como se evidencia en las siguientes respuestas a la pregunta 1 del instrumento de recogida de datos:

Nos entrega información sobre cuánto del total de casos equivalen los nuevos casos de los días entre setenta y ochenta. Aquí sería el 0.26 de los casos totales. **E1_P1O**	*El dato destacado en verde significa que la frecuencia relativa entre los setenta y ochenta días fue de 0,6609.* **E4_P1O**

Mismo fenómeno fue observado para la respuesta de la pregunta 2, en la cual existe una lectura del porcentaje que se asocia al valor de la frecuencia relativa porcentual acumulada:

Que entre los 50/60 días la frecuencia relativa acumulada porcentual fue de 16,89. **E4_P2E**	*Te representa en porcentaje la cantidad de casos acumulados hasta cierto día.* **E5_P2E**

Estas características literales no se encontraron en las respuestas de la pregunta 3. En la pregunta 4 pudimos evidenciar:

Que todo está conectado con todo, y si un dígito esté malo probablemente todo lo esté. **E3_P4E**	*Lo que me llama la atención de esta tabla de frecuencias es la: Frecuencia absoluta acumulada o mejor dicho como dice hay los casos acumulados: Por que como es posible que lleguemos a esa cantidad de casos por el Covid-19.* **E9_P4E**

La siguiente tabla muestra un resumen de las categorizaciones de todas las respuestas recogidas durante la investigación.

Tabla 3
Resumen de preguntas en función de las categorías

Pregunta	**Categoría 0** (respuestas que no se apegan a las categorías 1, 2 o 3)	**Categoría 1**	**Categoría 2**	**Categoría 3**
Pregunta 1	0	7	8	5
Pregunta 2	0	14	3	3
Pregunta 3	1	8	9	0
Pregunta 4	10	3	2	4
Totales de respuesta por categoría	11	32	22	12

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 3 resume las características argumentativas que se evidenciaron en las respuestas sobre la interpretación de las y los participantes del estudio, según las categorías planteadas. La gran mayoría de las respuestas (32) se encuadra en la categoría 1 *racional*, recordando que se refiere, básicamente, al uso de vocabulario matemático, así como de procedimientos y definiciones de forma explícita. En la categoría 2, donde las características argumentativas son predominantemente *intuitivas* y los conceptos matemáticos se presentan de forma implícita o sin seguridad en su pertinencia, se encuentran 22 respuestas. Finalmente, en la categoría 3, *literal,* hay 12 respuestas donde el vocabulario es redundante a la pregunta misma o carece de conexiones con más elementos de la tabla. Las respuestas a la pregunta 4 no se apegan a las categorías propuestas, es por eso que fueron clasificadas en la categoría 0. Esta pregunta en particular apeló a qué aspecto de la tabla les pareció relevante, pero al identificar estos aspectos y al argumentarlos no se sostuvieron en elementos matemáticos esperados, pues las y los participantes mencionaron impresiones personales.

6. Conclusiones y comentarios

Es posible categorizar las características argumentativas de la interpretación de tablas de frecuencia en tres grandes grupos: racional, literal e intuitivo. Las principales características *racionales* son el uso explícito de elementos matemáticos, aplicación correcta de procedimientos o identificación de conceptos relevantes a la pregunta que se quiera responder que apoyen la respuesta que la o el estudiante da. Los argumentos *intuitivos* contienen elementos matemáticos de forma implícita o tangencial, y existe inseguridad sobre la atingencia de procedimientos o vocabulario matemático-estadístico, lo que provoca que las respuestas de las y los estudiantes presenten argumentos débiles en rigurosidad o fundamentos matemáticos. Las principales características que posee un argumento para ser considerado *literal* son el uso redundante de vocabulario matemático, carencia de conexiones entre elementos provenientes de la tabla y el no recurrir a conocimientos previos. En particular, la calidad de los argumentos que pertenecen a esta categoría es baja respecto de los fundamentos matemáticos.

Curcio (1981) propone niveles de taxonomía para la comprensión de tablas, y es posible concluir que estos niveles pueden estar presentes en las tres categorías propuestas en este trabajo, es decir, un argumento *racional* con fundamentos matemáticos sólidos pudo provenir de una lectura directa de la tabla (primer nivel de Curcio), no necesariamente del nivel “leer más allá de los datos”. Esto se explica al considerar que la taxonomía de Curcio apunta a cómo comienza a actuar la o el estudiante al enfrentarse con un problema, mientras que las categorías planteadas son referentes a cómo finaliza el trabajo de la o del estudiante. Frente a esto, se propone analizar en nuevos estudios cómo afecta en los argumentos finales una lectura directa de los datos, entre los datos, o más allá de los datos, así como buscar afinidades entre categorías y niveles de comprensión de tablas.

Las y los estudiantes son capaces de entrelazar datos o activar conocimientos previos para poder complementar respuestas, cuando la pregunta es del tipo “leer entre los datos” o “leer más allá de los datos”. Pero cuando las preguntas están enfocadas en procedimientos o en observaciones individuales de cada uno de ellos, la categoría predominante es del tipo intuitiva.

Para la pregunta 3, se observa que no hubo respuestas que contengan características literales. Esta pregunta apela a que la o el estudiante pueda explicar su propio procedimiento. De acuerdo con la naturaleza de esa pregunta –que según Curcio (1981) es “leer entre los datos”– para realizar este tipo de tareas se requiere un comportamiento que integre la información obtenida desde la misma tabla; esta sería una razón de por qué no hay características literales, sin embargo, es necesario realizar nuevas investigaciones enfocadas en este hecho.

Si bien se plantea una respuesta experta para cada una de las preguntas aplicadas en el instrumento, los estudiantes no lograron llegar a este nivel de desarrollo de sus respuestas, sin embargo, entregan luces y elementos que les permiten ser clasificados dentro de las diferentes categorías planteadas en la investigación. Es posible que la reducción estadística, expresada por Batanero (2001), tenga su impacto al perder valoraciones cuando se posee una distribución estadística y resulte complejo expresar una respuesta que se encuadre en las categorías propuestas.

Se puede concluir, a partir de la desconexión entre la respuesta experta y las entregadas por las y los estudiantes, que no se evidencia en sus respuestas una relación directa entre la probabilidad y estadística, ya que ningún estudiante logró explicitar el vínculo que tienen la frecuencia relativa acumulada y la probabilidad de obtener algún dato. En futuras investigaciones se podría estudiar la causa de este fenómeno, pues podría ser que desde el profesorado no se propicia esa conexión, las y los estudiantes de segundo medio no la relacionan una vez que conocen la regla de Laplace, u otro factor que se descubra.

Otro elemento importante que destacar es que las y los estudiantes no siempre son capaces de responder cabalmente lo que se les está preguntando y las respuestas son ideas generales. Esto puede verse principalmente en las preguntas metacognitivas cuyo propósito es que se hagan conscientes de los procedimientos que desarrollan para obtener resultados o para explicarlo a otro.

Es interesante la idea de que los argumentos literales se relacionan con una alfabetización estadística *en desarrollo*, la cual puede ser fortalecida con preguntas que apunten a “leer los datos”. Fomentar la seguridad sobre qué elementos, conceptos o procedimientos emplear para obtener un resultado conllevaría a una mejora en los fundamentos matemáticos estadísticos en las respuestas. Los argumentos racionales presentes en preguntas que apuntan a “leer los datos” o “leer entre los datos” reflejarían un avance en la alfabetización estadística, e idealmente se podría avanzar hacia el pensamiento estadístico cuando preguntas que apunten a “leer más allá de los datos” sean respondidas con argumentos racionales, donde las conexiones de los datos presentes en la propia tabla con conocimientos previos o externos culturales tengan fundamentos matemáticos estadísticos sólidos.

Desde la mirada docente, es relevante analizar cómo influyen los tipos de argumentos de las y los estudiantes en el desarrollo de la alfabetización estadística; se plantea la observación de los argumentos matemáticos estadísticos, su seguimiento y posible evolución, al utilizar preguntas que apunten a distintos niveles de comprensión de tablas.

Referencias

Álvarez, I. Guerrero, Y., y Torres, Y. (2020). Taxonomía de errores y dificultades en la construcción e interpretación de tablas de frecuencia. *Zetetiké, 28*, 1-22. https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8656553

Araneda, A., Chandía, E., y Sorto, A. (2013). *ReFIP Matemática: Datos y azar, para futuros profesores de educación básica.* Ediciones SM Chile S.A. http://refip.accionmatematica.cl/files/datos_y_azar_final.pdf.

Batanero, C. (1998). *Situación actual y perspectivas futuras de la educación estadística* [sesión de conferencia]. Jornadas Thales de Educación Matemática, Jaén, España. https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/EDUCACIESTADISTICA.pdf.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística.* Universidad de Granada.

Curcio, F. (1981). *The effect of prior knowledge, reading and mathematics achievement, and sex on comprehending mathematical relationships expressed in graphs* (Final Report). Department of Education, St. Francis College. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED210185.pdf

Del Pino, G., y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, 49*(1), 53-64. https://pensamientoeducativo.uc.cl/files/journals/2/articles/483/public/483-2227-1-PB.pdf.

Friel, S., Curcio, F., y Bright, G. (2001). Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications. *Research in Mathematics Education. 32*(2), 124-138. https://doi.org/10.2307/749671

Guerrero, Y., y Hernández, J. (2019). *Cultura estadística: interpretación de tablas de frecuencia con apoyo de tecnología digital* [tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional de Colombia]. Repositorio institucional UPN. http://repository.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/11413.

Guerrero, Y., y Torres, Y. (2017). *Tipificación de errores y dificultades en el aprendizaje de tablas de frecuencia* [tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional de Colombia]. Repositorio institucional. http://funes.uniandes.edu.co/11943/1/Guerrero2017Tipificacion.pdf.

Herrera, L., Hernández, G., Valdés, É., y Valenzuela, N. (2015). Nivel de comprensión lectora de los primeros medios de colegios particulares subvencionados de Talca. *Foro educacional, 25*, 125-142. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6429438.pdf.

Ministerio de Educación. (2012). *Programa de estudio Matemática, séptimo año básico.* https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-18982_programa.pdf.

Ministerio de Educación. (2018a). *Bases curriculares, primero a sexto básico*. UCE, Unidad de Currículum y Evaluación. https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/2342/mono-1003.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

Ministerio de Educación. (2018b). *Progresiones de aprendizaje en espiral, orientaciones para su implementación Matemática.* División de educación general, Unidad de educación especial. https://especial.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/31/2019/04/Matematica-04-19.pdf.

Ministerio de Salud. (2020). *Informe Epidemiológico N° 23 Enfermedad SARS-CoV-2 (COVID-19)*. https://www.minsal.cl/23-informe-epidemiologico-covid-19/.

Olarte, N. (1998). El problema de la comprensión lectora. *Correo del Maestro, 23*, 7-8.

Pinzás, J. (2008). *Guía de estrategias metacognitivas para desarrollar la comprensión lectora.* Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Puga, L., Rodríguez, J., y Toledo, A. (2016). Reflexiones sobre el lenguaje matemático y su incidencia en el aprendizaje significativo. *Sophia, Colección de Filosofía de la Educación, 20*, 197-220. https://www.redalyc.org/pdf/4418/441846839009.pdf.

Tauber, L. (2010). Análisis de elementos básicos de alfabetización estadística en tareas de interpretación de gráficos y tablas descriptivas. *Ciencias Económicas,* (1), 53-74.

Wood, R. (1968). Objectives in the teaching of mathematics. *Educational Research, 10*, 83-98. https://doi.org/10.1080/0013188680100201

Yepes, M. (2011). *Nivel de comprensión lectora en estudiantes del Quinto Grado según tipo de institución educativa estatal y particular* [tesis de maestría, Universidad San Ignacio de Loyola]. Repositorio institucional USIL.

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i1.37

LETRAMENTO ESTATÍSTICO E LETRAMENTO FINANCEIRO: UMA REFLEXÃO SOBRE SUAS POSSÍVEIS ARTICULAÇÕES

ALFABETIZACIÓN ESTADÍSTICA Y ALFABETIZACIÓN FINANCIERA: UNA REFLEXIÓN SOBRE SUS POSIBLES ARTICULACIONES

STATISTICAL LITERACY AND FINANCIAL LITERACY: A REFLECTION ON ITS POSSIBLE ARTICULATIONS

Cileda de Queiroz e Silva Coutinho
cileda@pucsp.br
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil

RESUMO

Este texto tem por objetivo discutir as convergências entre o letramento estatístico e o letramento financeiro, particularmente as contribuições advindas da presença de um deles para a mobilização de elementos do outro. É uma pesquisa documental e bibliográfica desenvolvida a partir da leitura da Base Nacional Comum Curricular, em implementação nas escolas brasileiras, e da análise de algumas questões propostas no Exame Nacional do Ensino Médio em sua aplicação de 2019. Buscamos também definições de letramento funcional, letramento estatístico e letramento financeiro para embasar nossas análises. Observamos como resultados que a presença de habilidades componentes do letramento estatístico pode contribuir para a mobilização das habilidades que compõem o letramento financeiro, indicando assim a necessidade de desenvolvimento dos dois letramentos ao longo da escolaridade.

PALAVRAS-CHAVE:
Educação Estatística; Educação Financeira; Letramento; Ensino Médio; Escolaridade Básica.

RESUMEN

Este texto tiene como objetivo discutir las convergencias entre la alfabetización estadística y la alfabetización financiera, particularmente las contribuciones que surgen de la presencia de una de ellas para la movilización de elementos de la otra. Es una investigación documental y bibliográfica desarrollada a partir de la lectura de la Base Nacional Común Curricular, que se está implementando en las escuelas brasileñas, de la elección de algunas preguntas propuestas en el Exame Nacional do Ensino Médio en su aplicación en 2019. También buscamos definiciones de alfabetización funcional, alfabetización estadística y educación financiera para apoyar nuestro análisis. Como resultado, observamos que la presencia de habilidades que componen la alfabetización estadística puede contribuir a la movilización de las habilidades que componen la alfabetización financiera, lo que indica la necesidad del desarrollo de ambas alfabetizaciones a lo largo de la escolarización.

PALABRAS CLAVE:
Educación estadística; educación financiera; alfabetización; Escuela secundaria; Escolaridad básica.

ABSTRACT

The objective of this text is to discuss the convergence between statistical literacy and financial literacy, in particular, the contributions that emerge from the presence of one of them to help the mobilization of elements in the other. This is a documentary and bibliographic research developed from the reading of the Curricular Common National Base, which is being implemented in brazilian schools, and the selection of some questions proposed in the 2019 application of the Exame Nacional do Ensino Médio. We also looked for definitions of functional literacy, statistical literacy and financial education in order to support our analysis. As a result, we observed that the presence of the abilities that are part of statistical literacy can contribute to the mobilization of the abilities that comprise financial literacy, which indicates the need for the development of both literacies throughout the school process.

KEYWORDS:
Statistical Education; financial education; literacy; High school; Basic schooling.

Recibido: 20 de julio de 2020 , Aceptado: 16 de diciembre de 2020

1. Introdução

O presente artigo tem por objetivo discutir as convergências entre letramento estatístico e letramento financeiro quando consideramos o contexto da educação básica brasileira, particularmente o ensino fundamental (nove anos de escolaridade, idades de 6 a 14 anos). A Estatística foi introduzida no currículo escolar desde a promulgação dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (Brasil, 1997), que orientavam para a presença de conceitos estatísticos a partir dos primeiros anos de escolaridade, evoluindo de abordagens intuitivas para algo mais estruturado, com construção e leitura de gráficos e tabelas, assim como o cálculo das medidas de tendência central e de dispersão. Tal abordagem foi ampliada e mais bem discutida em termos de habilidades a serem construídas com a promulgação da Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018), que é atualmente um documento normativo na educação brasileira. Nele, orienta-se para a discussão desde a amostragem, passando pela realização de pesquisas cuja complexidade estatística evolui ano a ano, conforme discutiremos mais adiante neste texto. Quanto à educação financeira, encontramos também na BNCC as diretrizes para abordagem ao partir do primeiro ano de escolaridade, trazendo a perspectiva de desenvolvimento da postura crítica aliada a conhecimentos matemáticos específicos. Como a BNCC aborda os conteúdos a partir das habilidades a serem construídas, vale observar que a educação financeira está presente em quase todos os anos de escolaridade do ensino fundamental, assim como no ensino médio.

Para tal discussão, fizemos uma pesquisa bibliográfica e documental a partir da leitura da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), dos textos publicados por pesquisadores no campo da educação estatística e da educação financeira, assim como dos Exames Nacionais para o Ensino Médio. Nesses exames, buscamos exemplos de questões relacionadas à Matemática Financeira e que possam ser abordadas como atividade em sala de aula para encontrar relações entre os dois tipos de letramento, estatístico e financeiro. Dessa forma, construímos nosso referencial teórico para seguir a discussão do tema segundo os problemas propostos no ENEM.

2. Referencial teórico

2.1 Letramento Funcional

O Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional – INAF - é um levantamento realizado pelo Instituto Paulo Montenegro, em parceria com a ONG Ação Educativa, desde 2001, para medir o alfabetismo funcional em uma população de 15 a 64 anos de idade. A cada edição são entrevistadas 2.002 residentes em zonas urbanas e rurais de todas as regiões do país. A última edição é a de 2018, e seus relatórios estão sempre disponíveis no site < https://ipm.org.br/inaf >.

No relatório do INAF de 2018, encontra-se que Alfabetismo é

> a capacidade de compreender e utilizar a informação escrita e refletir sobre ela, um contínuo que abrange desde o simples reconhecimento de elementos da linguagem escrita e dos números até operações cognitivas mais complexas, que envolvem a integração de informações textuais e dessas com os conhecimentos e as visões de mundo aportados pelo leitor. **Dentro desse campo, distinguem-se dois domínios: o das capacidades de processamento de informações verbais, que envolvem uma série de conexões lógicas e narrativas, denominada pelo Inaf como letramento, e as capacidades de processamento de informações quantitativas, que envolvem noções e operações matemáticas, chamada numeramento.** (INAF, 2018, p. 4) (grifo nosso)

Neste texto, consideramos o alfabetismo como um todo, ao que, de acordo com a literatura abordada no campo da educação estatística e da educação financeira, chamaremos de letramento ou literacia, como tradução do termo literacy. A pesquisa é feita em domicílio, amostra probabilística, e consta de um questionário, tendo cada questão uma determinada pontuação. Inclui leitura/escrita da língua materna e matemática. A partir dessa pontuação, criou-se uma escala de categorias para o índice, apresentado na Tabela 1. Tal escala foi modificada a partir de 2015, de forma a melhor retratar os resultados observados. Na tabela, apresentamos as duas escalas, antiga e nova, para comparação do leitor.

Tabela 1

Níveis de alfabetismo segundo escala INAF – comparativo antes e depois de revisão em 2015

Níveis de Alfabetismo		
Utilizados até 2011 (4 níveis)	**Grupos**	**Utilizados a partir de 2015 (5 níveis**
Analfabeto	Analfabetos funcionais	Analfabeto
Rudimentar		Rudimentar
Básico	Funcionalmente alfabetizados	Elementar
Pleno		Intermediário
		Proficiente

Fonte: INAF, 2018, p. 7.

Para detalhar cada uma das categorias, o relatório do Inaf apresenta o quadro apresentado na Figura 1.

Grupos	Escala especial para estudo Alfabetismo e mundo do trabalho
Analfabeto (0 < x ≤ 50)	▪ Corresponde à condição dos que não conseguem realizar tarefas simples que envolvem a leitura de palavras e frases ainda que uma parcela consiga ler números familiares (de telefone, preços etc.).
Rudimentar (50 < x ≤ 95)	▪ Localiza uma ou mais informações explícitas, expressas de forma literal, em textos muito simples (calendários, tabelas simples, cartazes informativos) compostos de sentenças ou palavras que exploram situações familiares do cotidiano doméstico. ▪ Compara, lê e escreve números familiares (horários, preços, cédulas/moedas, telefone) identificando o maior/menor valor. ▪ Resolve problemas simples do cotidiano envolvendo operações matemáticas elementares (com ou sem uso da calculadora) ou estabelecendo relações entre grandezas e unidades de medida. ▪ Reconhece sinais de pontuação (vírgula, exclamação, interrogação etc.) pelo nome ou função.
Elementar (95 < x ≤ 119)	▪ Seleciona uma ou mais unidades de informação, observando certas condições, em textos diversos de extensão média realizando pequenas inferências. ▪ Resolve problemas envolvendo operações básicas com números da ordem do milhar, que exigem certo grau de planejamento e controle (total de uma compra, troco, valor de prestações sem juros). ▪ Compara ou relaciona informações numéricas ou textuais expressas em gráficos ou tabelas simples, envolvendo situações de contexto cotidiano doméstico ou social. ▪ Reconhece significado de representação gráfica de direção e/ou sentido de uma grandeza (valores negativos, valores anteriores ou abaixo daquele tomado como referência).
Intermediário (119 < x ≤137)	▪ Localiza informação expressa de forma literal em textos diversos (jornalístico e/ou científico) realizando pequenas inferências. ▪ Resolve problemas envolvendo operações matemáticas mais complexas (cálculo de porcentagens e proporções) da ordem dos milhões, que exigem critérios de seleção de informações, elaboração e controle em situações diversas (valor total de compras, cálculos de juros simples, medidas de área e escalas); ▪ Interpreta e elabora síntese de textos diversos (narrativos, jornalísticos, científicos), relacionando regras com casos particulares com o reconhecimento de evidências e argumentos e confrontando a moral da história com sua própria opinião ou senso comum. ▪ Reconhece o efeito de sentido ou estético de escolhas lexicais ou sintáticas, de figuras de linguagem ou sinais de pontuação.
Proficiente (>137)	▪ Elabora textos de maior complexidade (mensagem, descrição, exposição ou argumentação) com base em elementos de um contexto dado e opina sobre o posicionamento ou estilo do autor do texto. ▪ Interpreta tabelas e gráficos envolvendo mais de duas variáveis, compreendendo elementos que caracterizam certos modos de representação de informação quantitativa (escolha do intervalo, escala, sistema de medidas ou padrões de comparação) reconhecendo efeitos de sentido (ênfases, distorções, tendências, projeções). ▪ Resolve situações-problema relativos a tarefas de contextos diversos, que envolvem diversas etapas de planejamento, controle e elaboração, que exigem retomada de resultados parciais e o uso de inferências.

Figura 1. Escala de proficiência.
Fonte: INAF (2018, p. 21).

Diante desse cenário, vamos refletir sobre o alfabetismo (letramento) estatístico e financeiro da população ou, em menor escala, da população escolar brasileira. Fazemos o recorte para a população escolar, uma vez que esta será a população crítica do futuro breve, e que deve exercer cidadania plena. Reforçamos assim nosso objetivo de estudar as interfaces entre o letramento estatístico e o letramento financeiro, ambos fundamentais para a construção dessa criticidade, de tal forma a percebê-las como ferramentas para o desenvolvimento dos alunos ainda em fase escolar. Mais adiante, no texto, definiremos o que assumimos como letramento financeiro e letramento estatístico para melhor discutir essas interfaces.

Fazemos aqui uma comparação com os níveis de letramento propostos por Shamos (1995), para quem o nível mais completo, por ele denominado de "verdadeiro letramento científico", é aquele no qual o sujeito

> [...] está ciente de alguns dos principais esquemas conceituais (as teorias) que formam os fundamentos da ciência, como eles foram alcançados, e por que eles são amplamente aceitos [...]. Este indivíduo também aprecia os elementos da investigação científica, a importância do questionamento apropriado, do raciocínio analítico e dedutivo, dos processos de pensamento lógico e da confiança na evidência objetiva. (Shamos, 1995, p. 89)

Destacamos que Gal (2002) considera as categorias propostas por esse autor na construção do seu modelo de letramento estatístico.

2.2 Letramento Estatístico

O letramento estatístico é considerado um conjunto de habilidades que conduzem o sujeito a uma cidadania crítica. Alguns pesquisadores da área de Educação Estatística buscaram detalhar seus elementos. Nesse contexto, Sharma (2017) faz um mapeamento dos trabalhos publicados nesse tema, destacando as definições de Gal (2004, apud Sharma 2017) e Watson (2006, apud Sharma, 2017), destacando a convergência entre tais definições.

Para Gal (2004),

> letramento estatístico é definido como a capacidade das pessoas de interpretar e avaliar criticamente informações estatísticas, argumentos relacionados a dados ... para discutir ou comunicar suas reações a informações estatísticas, como sua compreensão do significado das informações, suas opiniões sobre implicações dessas informações, ou suas preocupações quanto à aceitabilidade de conclusões. (p. 49)

Sharma (2017) destaca que Watson (2006 apud Sharma 2017) vê esse letramento como o componente curricular que indica o ponto de encontro entre a consideração entre incerteza e dados e o mundo quotidiano. Sharma (2017) destaca ainda que Watson vê a alfabetização estatística onde os encontros citados

> envolvem contextos não ensaiados e tomada de decisão espontânea com base na capacidade de aplicar ferramentas estatísticas, conhecimento contextual geral e habilidades críticas de alfabetização'. (p. 11). (...) Para Watson (2006) e Gal (2004), questionar reivindicações em contextos sociais como divulgações de mídia é fundamental para o letramento estatístico. (p. 120)

Ainda citando ambos os pesquisadores, Sharma (2017) acrescenta que "a ênfase na habilidade cognitiva, compreensão contextual, disposições e pensamento crítico pode representar um desafio para o ensino e a avaliação" (p. 120).

Ao considerar o mapeamento realizado por Sharma (2017), podemos notar certa semelhança com o nível mais avançado da alfabetização funcional adotada pelo INAF (2018), sendo que as condições para o letramento estatístico são mais abrangentes e mais rígidas, ou seja, o indivíduo estatisticamente letrado pode ser considerado como alfabetizado funcional, mas nem sempre o contrário é válido.

Para identificar os elementos necessários ao letramento estatístico, consideramos o modelo anunciado em Gal (2004) e retomado em Gal (2019), que considera elementos cognitivos e elementos atitudinais: habilidades de letramento, conhecimento estatístico, conhecimento matemático, conhecimento de contexto e questões críticas, assim como crenças e atitudes e postura crítica. Novamente aqui destacamos a comparação entre este modelo e as categorias de alfabetização funcional propostas pelo relatório do INAF (2018), não sendo componente deste último o conhecimento estatístico. O relatório do INAF (2018) avalia conhecimentos matemáticos e de português por meio da leitura e compreensão de textos publicados na mídia, como propagandas etc. O conhecimento matemático de forma a que seja mobilizado na resolução de problemas estatísticos ou problemas matemáticos mais complexos não é considerado como exigência para a alfabetização funcional.

Mais adiante articularemos essas definições e modelos com a definição e modelo propostos para o letramento financeiro, de forma a discutir suas convergências e divergências, quando identificadas.

Quanto à formação escolar dos estudantes, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018) já orienta para a abordagem de conteúdos, sejam, entre outros, estatísticos, sejam de educação financeira, desde o primeiro ano do ensino fundamental, dando sequência a tal abordagem ao longo de todo o ensino fundamental (nove anos de escolaridade) e ensino médio (três anos de escolaridade).

Concentrando-nos apenas nas metas quanto à Estatística para o Ensino Fundamental (nove anos de escolaridade, idades de 6 a 14 anos, aproximadamente), podemos perceber os primeiros passos na construção do letramento estatístico e financeiro. Ambos já são citados no documento desde o 1º ano de escolaridade, ou seja, a criança tem contato com a Estatística e a Educação Financeira desde o início de sua alfabetização escolar, propiciando assim condições para a construção dos elementos necessários ao letramento, tanto no modelo proposto por Gal (2004) (letramento estatístico) como naquele apresentado em Sena (2017) para letramento financeiro.

Citamos aqui algumas das habilidades a serem construídas, no que se refere ao letramento estatístico. A notação para tais habilidades é AAXXMAYY, onde AA é o nível de escolaridade, nesse caso, ensino fundamental (EF). XX é o ano de escolaridade considerado. MA identifica as habilidades para a matemática e YY é o número da habilidade considerada quando se observa o total de habilidades anunciadas no documento.

> (EF01MA21) Ler dados expressos em tabelas e em gráficos de colunas simples. (p. 281)
>
> (EF02MA22) Comparar informações de pesquisas apresentadas por meio de tabelas de dupla entrada e em gráficos de colunas simples ou barras, para melhor compreender aspectos da realidade próxima. (p. 285)
> (EF03MA27) Ler, interpretar e comparar dados apresentados em tabelas de dupla entrada, gráficos de barras ou de colunas, envolvendo

resultados de pesquisas significativas, utilizando termos como maior e menor frequência, apropriando-se desse tipo de linguagem para compreender aspectos da realidade sociocultural significativos. (p. 289)

(EF04MA27) Analisar dados apresentados em tabelas simples ou de dupla entrada e em gráficos de colunas ou pictóricos, com base em informações das diferentes áreas do conhecimento, e produzir texto com a síntese de sua análise. (p. 293)

(EF05MA24) Interpretar dados estatísticos apresentados em textos, tabelas e gráficos (colunas ou linhas) referentes a outras áreas do conhecimento ou a outros contextos, como saúde e trânsito, e produzir textos com o objetivo de sintetizar conclusões. (p. 297)

(EF06MA32) Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, consumo responsável, entre outros, apresentadas pela mídia em tabelas e em diferentes tipos de gráficos, e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões. (p. 305)

(EF07MA36) Planejar e realizar pesquisa envolvendo tema da realidade social, identificando a necessidade de ser censitária ou de usar amostra, e interpretar os dados para comunicá-los por meio de relatório escrito, tabelas e gráficos, com o apoio de planilhas eletrônicas. (p. 311)

(EF07MA37) Interpretar e analisar dados apresentados em gráfico de setores divulgados pela mídia e compreender quando é possível ou conveniente sua utilização. (p. 311)

(EF08MA26) Selecionar razões, de diferentes naturezas (física, ética ou econômica), que justificam a realização de pesquisas amostrais e não censitárias, e reconhecer que a seleção da amostra pode ser feita de diferentes maneiras (amostra casual simples, sistemática e estratificada). (p. 315)

(EF09MA21) Analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, a erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros. (p. 319)

(EF09MA23) Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas. (p. 319)

(Brasil, 2018)

Percebe-se assim a preocupação com elementos que permitem a construção de postura crítica (elementos atitudinais), além dos conhecimentos cognitivos anunciados em Gal (2002, 2019). Destacamos que no texto de apresentação da área de Matemática, ao estabelecer as competências específicas para os nove anos do ensino fundamental, podemos perceber algumas que favorecem a construção de atitudes críticas, aqui olhando em um panorama mais geral, que é a construção da Matemática Crítica. Entre outros (Brasil, 2018):

> Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
> (...)
> Enfrentar situações-problemas em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
>
> Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza. (p. 263)

Ainda que nas metas o documento fale de formação crítica, observa-se que para a estatística, a construção de tal postura depende da abordagem realizada em sala de aula, correndo-se o risco de uma abordagem procedimental, desfavorecendo o desenvolvimento do letramento estatístico pelos alunos. Nesse sentido, a abordagem crítica pode ser favorecida pela presença de habilidades que demandam a análise de dados obtidos em contextos ambientais, de sustentabilidade, de consumo responsável, entre outros, tal como observado no 6º ano, na habilidade EF06MA32. Vale destacar que a mesma observação pode ser feita quanto às habilidades para a Educação Financeira, como discutiremos na sequência.

2.3 Letramento Financeiro

Coutinho e Campos (2018), em artigo que discute os diferentes tipos de letramento com objetivo de comparar o letramento estatístico e o letramento financeiro, destacam que

> Tomando a definição de matemacia e as referentes a letramento estatístico apresentadas nas sessões anteriores (do texto dos autores), observamos um ponto comum com a definição assumida

> por Sena (2017), bastante evidente, que é o desenvolvimento da criticidade, das habilidades para análise crítica e tomada de decisão com base nos dados, habilidades de leitura e conhecimento da linguagem. (p. 170)

Em um contexto mais abrangente, mas já visando uma abordagem na educação básica, Coutinho e Teixeira (2015) definem a educação financeira como "a busca de melhor qualidade de vida tanto hoje quanto no futuro, sendo que não se limita aos aspectos de aprender a economizar e acumular dinheiro" (p. 3).

Considerando que a construção e desenvolvimento do letramento financeiro deve começar desde o início da escolaridade, ou seja, com crianças a partir dos 6 anos de idade, tomemos também a definição de Silva e Powell (2013, p. 13).

> A Educação Financeira Escolar constitui-se de um conjunto de informações através do qual os estudantes são introduzidos no universo do dinheiro e estimulados a produzir uma compreensão sobre finanças e economia, através de um processo de ensino, que os torne aptos a analisar, fazer julgamentos fundamentados, tomar decisões e ter posições críticas sobre questões financeiras que envolvam sua vida pessoal, familiar e da sociedade em que vivem.

Sobre tal formação inicial, a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018) anuncia habilidades a serem alcançadas ano a ano durante a escolaridade básica. Em suas considerações por área de conhecimento, anuncia que em Matemática é importante discutir assuntos como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras e impostos, favorecendo um estudo interdisciplinar sobre questões de consumo, trabalho e dinheiro.

Citamos aqui as habilidades para os quatro primeiros anos de escolaridade, segundo a BNCC (Brasil, 2018), que coadunam com as considerações feitas na abertura da área de Matemática:

> (EF01MA19) Reconhecer e relacionar valores de moedas e cédulas do sistema monetário brasileiro para resolver situações simples do cotidiano do estudante. (p. 277)
>
> (EF02MA20) Estabelecer a equivalência de valores entre moedas e cédulas do sistema monetário brasileiro para resolver situações cotidianas. (p. 281)
>
> (EF03MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam a comparação e a equivalência de valores monetários do sistema brasileiro em situações de compra, venda e troca. (p. 285)
>
> (EF04MA25) Resolver e elaborar problemas que envolvam situações de compra e venda e formas de pagamento, utilizando termos como troco e desconto, enfatizando o consumo ético, consciente e responsável. (p. 289)

Observamos que essas habilidades podem ser consideradas à luz da definição de educação financeira escolar, que devem ser trabalhadas também na formação de professores, para que estes possam fazer as abordagens adequadas para tal desenvolvimento dos seus alunos.

Já no ensino médio, as habilidades encontram-se organizadas por Competências e não mais por ano escolar. Em seu texto introdutório para a área de Matemática e suas Tecnologias, entre outros, aborda a visão integrada da Matemática aplicada à realidade em diferentes contextos. Nesse cenário, os conteúdos relativos à Estatística e à Educação Financeira são propícios para esse tipo de visão, favorecendo o desenvolvimento de uma postura crítica para que se exerça a cidadania de forma consciente.

Algumas das habilidades que trazemos:

> (EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
>
> (EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos. (Brasil, 2018, pp. 532-533)
>
> (EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
>
> (EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros) para tomar decisões. (Brasil, 2018, p. 534)
>
> (EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
>
> (EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas,

> em diferentes contextos, que envolvam cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão). (Brasil, 2018, pp. 535-537)
>
> (EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
>
> (EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa – box-plot–, de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise. (Brasil, 2019, pp. 538-539).

Ao considerar as práticas sociais como elementos importantes para a educação financeira e, consequentemente, para o letramento financeiro, Coutinho e Almouloud (2020) destacam que se trata de práticas sociais mais complexas a serem construídas ao longo da vida, não apenas escolar, com um viés de criticidade.

Avançando na discussão sobre o letramento financeiro, Sena (2017) propõe um modelo construído à luz das discussões sobre letramento estatístico, e que coaduna com o modelo de letramento estatístico proposto por Gal (2004, 2019):

- Habilidade de ler, analisar e interpretar situações financeiras.
- Conhecimento de elementos básicos e necessários à Matemática Financeira pertinente ao contexto dos sujeitos.
- Capacidade de assumir postura crítica fundamentada.
- Capacidade de considerar variáveis e implicações de suas ações.
- Tomada de decisões conscientes que visem o bem-estar financeiro individual e social.

Tal como discutido na sessão anterior, percebemos aqui uma convergência para as categorias de alfabetização funcional propostas pelo relatório do INAF (2018), observando que o sujeito letrado financeiramente é considerado alfabetizado funcional, mas não vale a recíproca. Ou seja, mesmo satisfazendo as condições para a alfabetização funcional, não significa que satisfaz as condições para o letramento financeiro.

3. Exame Nacional do Ensino Médio

Visando aprofundar a discussão sobre a construção do letramento financeiro ao longo da escolaridade e suas relações com o letramento estatístico, tomamos como exemplo algumas questões propostas no Exame Nacional para o Ensino Médio - ENEM (Brasil, 2019). Tal exame é realizado anualmente e é oferecido a todos os alunos egressos do Ensino Médio como forma de ingresso ao ensino superior de universidades públicas e de algumas universidades privadas, assim como instituições portuguesas. Colabora também para o acesso a financiamento e apoio estudantil na universidade, realização de autoavaliação do conhecimento e para o desenvolvimento de estudos e indicadores educacionais.

As provas desse exame são apresentadas com diferenças na ordem das questões e identificadas por cores nas folhas de questões. Analisamos aqui as questões da prova azul, aplicada no segundo dia de exame, abrangendo questões de Ciências da Natureza e suas tecnologias, e prova de Matemática e suas tecnologias, selecionando aquelas que abordam a educação financeira ou a Matemática Financeira. Entendemos aqui como Matemática Financeira o estudo do valor do dinheiro no tempo, enquanto a educação financeira é o conjunto de habilidades que permitem ao sujeito a tomada de decisões conscientes quanto à sua vida financeira, exercendo assim a cidadania crítica. Nosso objetivo é observar a contribuição do letramento estatístico no desenvolvimento de estratégias para a resolução do problema proposto, estabelecendo assim a articulação entre este e o letramento financeiro.

O recurso de análise de questões do ENEM é escolhido porque essas questões devem observar as orientações da BNCC para a Matemática da escola básica. Buscamos identificar qual a demanda cognitiva e crítica é feita nas questões, de forma a destacar os elementos do letramento financeiro, tal como proposto por Sena (2017).

> Questão 138: uma pessoa que perdeu um objeto pessoal quando visitou uma cidade pretende divulgar nos meios de comunicação informações a respeito da perda desse objeto e seu contato para eventual devolução. No entanto, ela lembra que, de acordo com o Art.1234 do Código Civil, poderá ter que pagar pelas despesas de transporte desse objeto até sua cidade e poderá ter que recompensar a pessoa que lhe restituir o objeto em, pelo menos, 5% do valor do objeto.
>
> Ela sabe que o custo com transporte será de um quinto do valor atual do objeto e, como tem muito interesse em reavê-lo, pretende ofertar o maior percentual possível de recompensa, desde que o gasto total com as despesas não ultrapasse o valor atual do objeto.
>
> Nessas condições, o percentual sobre o valor do objeto, dado como recompensa, que ela deverá ofertar é igual a
>
> (a) 20% (b) 25% (c) 40%
> (d) 60% (e) 80%

A demanda cognitiva é o cálculo do percentual do valor do objeto a ser pago como recompensa. Tal demanda é satisfeita pela mobilização de conhecimentos sobre porcentagem e sobre equações e inequações do 1ºgrau, considerando o valor do objeto (x), o valor a ser pago no transporte do objeto (0,2x) e o valor da recompensa (kx), sendo que $x \geq 0,2x + kx$.

Note-se que na demanda do problema não se questiona a análise crítica da situação, mantendo seu contexto de Matemática Financeira. Nesse caso, a abordagem em sala de aula para que se observe o desenvolvimento do letramento financeiro deve buscar capacidade de considerar variáveis e implicações de suas ações. A postura crítica fundamentada também não é explorada, uma vez que o problema determina uma condicionante matemática: o valor da recompensa deve ser menor que o valor atual do objeto. Dessa forma, apesar de termos aqui as condições para o letramento funcional proposto pelo relatório do INAF (2018), observamos que o letramento estatístico (segundo o modelo proposto por Gal (2004, 2019)) contribui para a resolução do problema pela exigência da mobilização de conhecimento matemático, conhecimento de contexto (problema de Matemática Financeira ao invés de problema de educação financeira). Por outro lado, observamos a necessidade de caracterizar um problema como sendo de educação financeira, o que depende dos elementos de postura crítica fundamentada (ausente no problema) e decisão e tomada de decisão consciente que visem o bem-estar financeiro individual e social (decisão do valor a ser pago como recompensa). Nesse caso, os elementos atitudinais do modelo de letramento estatístico contribuiriam para a compreensão completa do contexto e das decisões a serem tomadas, incluindo aí a mobilização de crenças e atitudes a serem tomadas em contexto de situações de pagamento de recompensas por determinado objeto pessoal.

Um complemento possível a ser feito em sala de aula quando da discussão com os alunos do Ensino Médio da questão sobre a relação entre recompensa e valor pessoal do objeto poderia exigir posicionamento crítico, uma vez que a legislação orienta valor mínimo de recompensa a partir do qual o proprietário do objeto estabelece o valor a ser pago. O objeto poderia ter pouco valor de mercado (sobre o qual incidiria o valor do transporte e o valor da recompensa, se tratada apenas como porcentagem do valor de mercado), mas alto valor pessoal, emocional, para o proprietário, o que justificaria a decisão por desencadear todo o processo para sua restituição.

> Questão 151: três sócios resolveram fundar uma fábrica. O investimento inicial foi de R$ 1 000 000,00. E, independentemente do valor que cada um investiu nesse primeiro momento, resolveram considerar que cada um deles contribuiu com um terço do investimento inicial. Algum tempo depois, um quarto sócio entrou para a sociedade, e os quatro, juntos, investiram mais R$ 800 000,00 na fábrica. Cada um deles contribuiu com um quarto desse valor. Quando venderam a fábrica, nenhum outro investimento havia sido feito. Os sócios decidiram então dividir o montante de R$ 1 800 000,00 obtido com a venda, de modo proporcional à quantia total investida por cada sócio.
>
> Quais os valores mais próximos, em porcentagens, correspondentes às parcelas financeiras que cada um dos três sócios iniciais e o quarto sócio, respectivamente, receberam?
>
> (a) 29,60 e 11,11 (b) 28,70 e 13,89
> (c) 25,00 e 25,00 (d) 18,52 e 11,11
> (e) 12,96 e 13,89

Observamos nesse problema, tal qual discutido anteriormente, que o questionamento crítico pode emergir em discussões em sala de aula sobre as condições de constituição da sociedade e da venda da fábrica. Por exemplo, a desconsideração do investimento pessoal e das melhorias realizadas no tempo de duração da sociedade, já que o valor de venda é exatamente a soma dos valores investidos. Espírito crítico também é exigido ao se questionar a validade dos resultados. Este também é um elemento do letramento estatístico, que pode, portanto, contribuir com a construção do letramento financeiro por meio do conhecimento e reconhecimento do contexto no qual o problema foi proposto.

Dessa forma, limita-se a um problema de proporcionalidade, que poderia ser mais bem explorado na perspectiva da educação financeira escolar, nos termos de Silva e Powell (2013). Como na questão 138, a contribuição do letramento estatístico (interfaces com o letramento financeiro) viria das habilidades cognitivas e compreensão contextual. Observamos a necessidade de se proporcionar o estímulo para interpretação e avaliação crítica, nos termos de Gal (2004, 2019). Quanto ao letramento financeiro, destacamos a não avaliação tal como enunciado por Coutinho e Almouloud (2020), e apenas os primeiros itens do modelo proposto por Sena (2017) podem ser avaliados.

> Questão 180: um casal planejou uma viagem e definiu como teto para o gasto diário um valor de até R$ 1 000,00. Antes de decidir o destino da viagem, fizeram uma pesquisa sobre a taxa de câmbio vigente para as moedas de cinco países que desejavam visitar e também sobre as estimativas de gasto diário de cada um, com o objetivo de escolher o destino que apresentasse o menor curso diário em real.
>
> O quadro mostra os resultados obtidos com a pesquisa realizada.

País de destino	Moeda local	Taxa de câmbio	Gasto diário
França	Euro (€)	R$ 3,14	315,00 €
EUA	Dólar (US$)	R$ 2,78	US$ 390,00
Austrália	Dólar australiano (A$)	R$ 2,14	A$ 400,00
Canadá	Dólar canadense (C$)	R$ 2,10	C$ 410,00
Reino Unido	Libra esterlina (£)	R$ 4,24	£ 290,00

> Nessas condições, qual será o destino escolhido para a viagem?
>
> (a) Austrália (b) Canadá (c) EUA
> (d) França (e) Reino Unido

Este problema aborda a organização orçamentária do casal e planejamento financeiro. A necessidade de assumir postura crítica para a coerência das respostas de câmbio e de gasto diário por país é aqui parte da estratégia de resolução. São observados também os demais itens do modelo proposto por Sena (2017). Quanto às contribuições do letramento estatístico, temos a preponderância da leitura de tabelas, além de postura crítica e conhecimento de contexto, além dos outros elementos cognitivos, segundo o modelo proposto por Gal (2004) e destacado em Sharma (2017). Ou seja, a estratégia de resolução para esse problema se constrói de maneira mais eficaz para o aluno que tenha desenvolvido o letramento estatístico, o que contribui para o desenvolvimento do letramento financeiro.

Seguimos com uma atividade de Educação Financeira, elaborada em Ferreira (2019), para finalizarmos essa análise do papel dos letramentos estatístico e financeiro na construção de estratégias de resolução. Esta atividade é a primeira de uma série de três que foram aplicadas a uma turma de alunos de um curso de Licenciatura em Matemática. Julgamos sua adequação diante do fato de que eles serão os futuros professores que abordarão a educação financeira e a estatística com seus alunos da escola básica brasileira.

> Escolha de um imóvel para compra (aplicado para estudantes de curso de Licenciatura em Matemática)
> Com o objetivo de escolher um imóvel para compra, vamos criar um modelo matemático para auxiliar nessa tomada de decisão. Para isso, serão utilizados anúncios imobiliários que estão disponíveis na internet.
>
> Restrições:
>
> - Tipo de imóvel – Apartamento.
> - Que os imóveis pertençam à mesma região.
> - Imóveis de 45 (m2) a 110 (m2)
> - Que sejam imóveis de no máximo dois dormitórios e que possuam uma única vaga de garagem.
>
> 1. Construa uma tabela no Excel (Figura 2) com as seguintes características.
>
> 2. Escolha um site de compra e venda de imóveis de sua preferência, faça uma pesquisa e preencha a tabela no Excel com 30 anúncios, obedecendo as restrições iniciais.
>
> 3. Com os recursos do Excel, construa um gráfico de dispersão da tabela dos anúncios selecionados
>
> 4. O que o grupo pode concluir a partir da observação/análise do gráfico de dispersão de pontos?
>
> 5. Com os recursos do Excel, calcule o coeficiente de correlação das variáveis metragem e valor de venda dos imóveis selecionados.
>
> 6. O que o grupo pode concluir a partir da observação/análise do coeficiente de correlação?
>
> 7. Com os recursos do Excel, plote a linha de tendência linear e calcule seu R-quadrado
>
> 8. Com os recursos do Excel, plote a linha de tendência exponencial e calcule seu R-quadrado
>
> 9. Com os recursos do Excel, plote a linha de tendência logarítmica e calcule seu R-quadrado
>
> 10. Com os recursos do Excel, plote a linha de tendência polinomial e calcule seu R-quadrado
>
> 11. O que o grupo pode concluir a partir da observação/análise das linhas de tendências do gráfico plotado?
>
> 12. Escolha uma das linhas de tendências plotadas e formate, de forma que apareça a função que a representa.
>
> 13. Identifique e nomeie as variáveis envolvidas na função da linha de tendência. (Ferreira, 2019, p. 232-233)

Modelo para o registro dos dados coletados na etapa (ETA1)

Região escolhida:		
Grupo:		
Número	Área do apto (m²)	valor R$
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
...		
30		

Figura 2. Tabela Excel a ser utilizada pelos participantes da atividade. Fonte: Ferreira (2019, p. 129).

Destacamos que as questões relativas aos conteúdos do ensino médio são as numeradas de 1 a 4. As demais se relacionam a conteúdos abordados no curso de Licenciatura dos alunos participantes.

Por não ser uma questão fechada, permite a discussão mais ampla dos aspectos da educação financeira, atendendo a todos os elementos do modelo proposto por Sena (2017). A postura crítica aqui vai além da análise da coerência dos resultados, mas também da análise do contexto em que são discutidos no enunciado (valores e metragem para o apartamento) e mesmo como base para uma discussão bastante crítica a ser proposta pelo professor. Estamos aqui tratando do desenvolvimento da capacidade crítica.

Nesta atividade temos também, além dos elementos cognitivos presentes no modelo proposto por Gal (2004), a influência dos elementos disposicionais, tal como citado na Tabela 2. Ou seja, a atividade ilustra de forma mais completa as contribuições possíveis do letramento estatístico no desenvolvimento do letramento financeiro. Destacamos também a necessidade do letramento funcional, nos termos do relatório do INAF (2018), para a mobilização dos letramentos estatístico e financeiro nesta atividade.

Tabela 2

Comparação entre letramento estatístico (Gal, 2004) e letramento financeiro (Sena, 2017)

Letramento Estatístico (Gal, 2004)	Letramento Financeiro (Sena, 2017)
• habilidades de letramento (1) • conhecimento estatístico • conhecimento matemático (2) • conhecimento de contexto (2) • questões críticas (4) • crenças e atitudes (5) • postura crítica (3)	• Habilidade de ler, analisar e interpretar (1) situações financeiras • Conhecimento de elementos básicos e necessários à Matemática Financeira pertinente ao contexto dos sujeitos (2) • Capacidade de assumir postura crítica fundamentada (3) • Capacidade de considerar variáveis e implicações de suas ações (4) • Tomada de decisões conscientes que visem o bem-estar financeiro individual e social (5)

Fonte: a autora

4. Discussão e algumas considerações

Embora o desenvolvimento de questões relativas à educação financeira seja proposto em materiais didáticos específicos na forma de histórias, por meio das quais o aluno questiona situações e atitudes, em um exame de larga escala isso não é possível. Tal constatação nos permite indicar que a discussão que conduz à posição crítica deve ser feita pelo professor em sala de aula, ao abordar as questões em momentos de revisão das questões de vestibulares e de exames como o ENEM. Também observamos esta mesma situação nos dois trabalhos citados sobre o tema (a dissertação Sena, 2017, e a tese de Ferreira, 2019), uma vez que as questões típicas para educação financeira dependem de respostas abertas para destacar o posicionamento crítico dos alunos, que vai além da análise de coerência das respostas obtidas em um problema clássico de exames de larga escala ou mesmo de livros didáticos. No entanto, se o aluno for letrado financeiramente, responderá às questões propostas no ENEM com seu conhecimento matemático, e mobilizará suas habilidades de letramento para a elaboração de estratégias e avaliação de seus resultados. Assim, os elementos do modelo de letramento estatístico discutido neste texto permitem uma melhor mobilização do letramento financeiro, se tomarmos como ponto de referência o modelo proposto por Sena (2017).

As relações que podem ser estabelecidas entre os modelos de letramento aqui tratados e as categorias propostas pelo relatório do INAF (2018) são ilustradas na Figura 2, e nos permitem reforçar nossa tese de que o desenvolvimento do letramento estatístico contribui também para o desenvolvimento do letramento financeiro, ambos relacionados com as categorias de alfabetização funcional propostas pelo INAF (2018). A validação dessa tese fica agora como tema de nova pesquisa que conste da análise de dados multidimensionais com uma amostra suficientemente grande.

Ou seja, a partir da Figura 3, podemos discutir as influências do letramento estatístico no letramento financeiro e vice-e-versa, assim como as influências destes na constituição da capacidade crítica dos alunos, satisfazendo assim os princípios da Educação Matemática Crítica, nos termos de Skovsmose (2000).

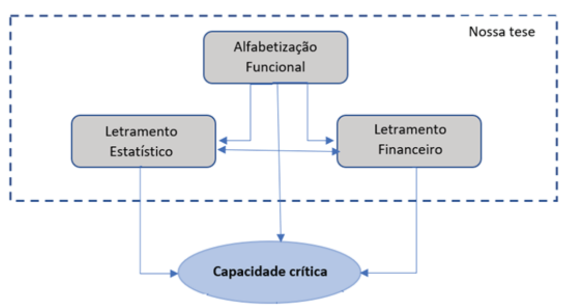

Figura 3. Relações entre letramentos.

Fonte: Adaptado de Coutinho e Campos (2018).

Para a abordagem desses temas de Educação Financeira e Estatística sugerida na BNCC percebe-se a intenção da visão integrada da Matemática aplicada à realidade em diferentes contextos. Nesse cenário, a abordagem com base em procedimentos mais técnicos e sem a necessária reflexão sobre o tema a partir de conteúdos ligados à Estatística e à Educação Financeira não é convergente ao assinalado pelo documento.

Segundo Ferreira (2018) o modelo para a abordagem da Educação Financeira é ainda:

> (...) conservador em que o objetivo principal nos exercícios é a prática de resoluções algébricas, muitas vezes sem reflexões sobre situações reais com dados reais, e que na maioria das vezes o objetivo da questão é trabalhar conceitos de outros objetos matemáticos, sem o viés da Educação Financeira, mesmo se tratando de capítulos destinados à Matemática Financeira. (p. 121)

Referências

Brasil. (2019). *Prova do Exame Nacional do Ensino Médio. Prova Azul*. http://portal.inep.gov.br/web/guest/provas-e-gabaritos

Brasil. Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular – BNCC. Educação é a Base: Ensino Médio.* MEC. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1997). *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.* MEC/SEF. http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf.

Coutinho, C. Q. S., y Almouloud, S. Ag. (2020). Letramento financeiro e o perfil de professores que ensinam matemática na escola básica. En C. R. Campos y C. Q. S. Coutinho (Org.), *Educação Financeira no contexto da Educação Matemática: pesquisas e reflexões* (pp. 77-106). Editora Akademy.

Coutinho, C. Q. S., y Campos, C. R. (2018). Perspectivas em didática e educação estatística e financeira: reflexões sobre convergências entre letramento matemático, matemacia, letramento estatístico e letramento financeiro. En G. P. Oliveira (Org.), *Educação Matemática: epistemologia, didática e tecnologia* (pp. 143-180). Livraria da Física.

Coutinho, C. Q. S., y Teixeira, J. (2015). Letramento Financeiro: Um Diagnóstico de Saberes Docentes. *REVEMAT, 10*(2) 1-22. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2015v10n2p1

Ferreira, V. D. T. (2019). *As contribuições de uma sequência didática elaborada à luz do Modelo Epistemológico de Referência (MER), na construção dos conhecimentos relativos à educação financeira* (Tese de Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/22327.

Gal, I. (2002). Adult´s statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x

Gal, I. (2004). Statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. En J. B. Garfield, y D. Ben-Zvi (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 47-78). Springer.

Gal, I. (2019). Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.* www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Indicador de Alfabetismo Funcional. (2018). *Relatório do Índice Nacional de Alfabetização Funcional.* https://acaoeducativa.org.br/wp-content/uploads/2018/08/Inaf2018_Relat%C3%B3rio-Resultados-Preliminares_v08Ago2018.pdf

Sena, F. D. L. (2017). *Educação financeira e estatística: estudo de estruturas de letramento e pensamento* (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/20154

Shamos, M. H. (1995). *The myth of scientific literacy.* Rutgers University Press.

Sharma, S. (2017). Definitions and models of statistical literacy: a literature review. *Open Review of Educational Research, 4*(1), 118-133. https://doi.org/10.1080/23265507.2017.1354313

Silva, A. M., y Powell, A. B. (2013). Um programa de educação financeira para a matemática escolar da educação básica. *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática* – ISSN 2178-034X. Curitiba. http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/2675_2166_ID.pdf

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *BOLEMA – Boletim de Educação Matemática, 14*, 66-91. http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/view/693

VOLÚMEN 13
N°1
ABRIL 2021

REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

RECHIEM

sochiem