VOLÚMEN 12
N°3
DICIEMBRE 2020

RECHIEM

REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

sochiem

ÍNDICE

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

sochiem

Sociedad Chilena de Educación Matemática
Revista Chilena de Educación Matemática
ISSN 2452-5448 Versión en línea
Chile

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

https://doi.org/110.46219/rechiem.v12i3.38

EL DESARROLLO DE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS, UNA MIRADA INTERNACIONAL[1]

THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICS EDUCATION RESEARCH, AN INTERNATIONAL PERSPECTIVE

Michèle Artigue, michele.artigue@univ-paris-diderot.fr
Université de Paris, Laboratoire de Didactique André Revuz, Paris, France

RESUMEN

Este artículo trata del desarrollo internacional de la investigación didáctica en matemáticas. Después de recordar la relación especial que existe entre las matemáticas y su enseñanza, evoca en primer lugar la emergencia de la didáctica de las matemáticas como un campo de investigación específico, en un contexto marcado por la reforma de las matemáticas modernas y la influencia de la epistemología piagetiana. A continuación, se examina la evolución de este campo de investigación, centrándose en algunas tendencias globales que trascienden su diversidad inherente, antes de abordar más específicamente la cuestión de las relaciones entre centros y periferias, y destacar la lenta pero real evolución hacia una didáctica de las matemáticas más auténticamente internacional.

PALABRAS CLAVE:
Didáctica de las matemáticas; Educación Matemática; desarrollo internacional de la investigación didáctica.

ABSTRACT

This article addresses the international development of research in mathematics education. After reviewing the special relationship existing between mathematics and mathematics education, this work first recalls the emergence of the didactics of mathematics as a specific field of research, in a context marked by the New Math reform and the influence of Piagetian epistemology. It then considers the evolution of this field of research, focusing on some global trends that transcend its inherent diversity, before addressing more specifically the question of the relationship between centers and peripheries in mathematics education, and highlighting the slow but real evolution towards more authentically international didactics of mathematics.

KEYWORDS:
Didactics of mathematics; Mathematics Education; international development of didactic research.

[1] *Este artículo se basa en el capítulo de libro (Artigue, 2018).*

Recibido: 20 de julio de 2020, Aceptado: 14 de septiembre de 2020

1. Matemáticas y Educación Matemática: unas relaciones específicas

Como han señalado varios historiadores de las matemáticas y de su enseñanza (véase, por ejemplo, Belhoste, 1998; Gispert, 2008), no cabe duda de que esta disciplina tiene una relación especial con su enseñanza. De hecho, más que otros campos del conocimiento humano, el desarrollo de las matemáticas como ciencia y su enseñanza han estado estrechamente ligados a lo largo de los siglos. Es común subrayar el papel que jugó el curso de Augustin Cauchy en la Escuela Politécnica en la reorganización y fundación del campo del análisis matemático a principios del siglo XIX, pero este es solo un ejemplo entre muchos. Hélène Gispert, en su estudio dedicado a las influencias cruzadas de las esferas social, escolar y académica entre 1860 y 1930 a través de tratados y libros de texto (Gispert, 2008), subraya por ejemplo el papel desempeñado por el curso de Ulysse Dini en la Universidad de Pisa y el primer tratado moderno sobre las funciones de una variable real que él publicó en 1878, en el desarrollo de este campo de investigación en Italia. También subraya el papel que desempeñó en Francia la colección de obras sobre la teoría de las funciones iniciada por las *Leçons sur la théorie des fonctions* (Lecciones sobre la teoría de las funciones) de Emile Borel a partir de su enseñanza en la Escuela Normal Superior. Esta colección, que se enriqueció con una veintena de volúmenes en unos quince años, basados en los cursos impartidos en el Collège de France o en la Sorbona por brillantes analistas, tanto franceses como extranjeros, puso al alcance de la comunidad matemática los más recientes desarrollos de la investigación en este campo. También contribuyó a legitimar e institucionalizar esta nueva investigación sobre las funciones basada en la teoría de los conjuntos en un momento en que, como también señala Gispert, seguía habiendo, por ejemplo, en Francia, cierta reticencia hacia ella.

Igualmente Belhoste, en su texto antes mencionado, utilizando varios ejemplos –Alemania, Francia, Italia– muestra que la constitución e institucionalización de una comunidad matemática en estos países ha estado estrechamente ligada al desarrollo de instituciones educativas para esta disciplina. En el capítulo dedicado a la tradición didáctica francesa del libro resultante del grupo temático del congreso ICME-13 (International Congress of Mathematics Education) (Artigue et al., 2019), también hemos destacado la participación histórica de algunos de los más eminentes matemáticos franceses en cuestiones de enseñanza, mencionando en particular el papel de Nicolás de Condorcet, quien presidió el Comité de Educación Pública en los primeros años de la Revolución francesa, y la implicación de matemáticos como Joseph-Louis Lagrange, Pierre-Simon de Laplace, Gaspard Monge y Adrien-Marie Legendre en ese momento. Luego, a principios del siglo XX, mencionamos la participación de matemáticos como Emile Borel, Gaston Darboux y Henri Poincaré en la importante reforma del liceo de 1902, con Darboux presidiendo la comisión encargada de la renovación curricular, y a mediados de la década de 1930, cuando jóvenes matemáticos crearon el famoso grupo Bourbaki, para renovar la enseñanza del cálculo diferencial e integral para la licenciatura en matemáticas.

Por lo tanto, no es sorprendente que fuera en matemáticas y con ocasión de un congreso internacional de matemáticos (el quinto, en 1908) que se creó la primera organización internacional, llamada entonces CIEM *(Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique)* en francés, dedicada a la enseñanza de una disciplina. Actualmente, esta organización se conoce por su acrónimo en inglés ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) modificado después de la Segunda Guerra Mundial. Esta creación fue, de hecho, el resultado de una propuesta de David Eugene Smith, historiador de las matemáticas y profesor de la Universidad de Columbia, documentada en 1905 en la nueva revista L'Enseignement Mathématique, fundada en 1899 por Henri Fehr y Charles-Ange Laisant, que se convertiría en el órgano oficial de la CIEM (Coray, Furinghetti, Gispert, Hodgson y Schubring, 2003). La misión encomendada a la CIEM, cuya presidencia fue confiada al matemático alemán Felix Klein, él mismo muy implicado en cuestiones de educación y formación de profesores (véase Weigand, McCallum, Menghini, Neubrand y Schubring, 2019), hizo un estudio global del progreso de la Educación Matemática en las diferentes naciones. En respuesta a ello, se establecieron comités nacionales en los 18 países miembros y 15 países asociados, entre los que figuraban, para América Latina, Argentina, Brasil, Chile, México y Perú. En unos pocos años, antes de que la Primera Guerra Mundial y sus secuelas la dejaran en suspenso, la CIEM elaboró más de 300 informes sobre una amplia variedad de temas que iban desde la enseñanza de áreas matemáticas específicas, como el cálculo diferencial e integral, que entonces se estaba generalizando en el nivel secundario, hasta la formación de profesores o futuros ingenieros (Schubring, 2008). Sin embargo, no se trataba de investigación didáctica como la entendemos hoy en día. Aunque existieron muchos trabajos precursores como los mencionados en Kilpatrick (2020), no fue hasta después de la Segunda Guerra Mundial y el período de las matemáticas modernas que el campo de la Educación Matemática se convirtió en un verdadero campo de investigación científica. La segunda sección se dedicará a la emergencia de este campo de investigación.

2. La emergencia de un campo de investigación específico

La emergencia de este campo de investigación está bien documentada (véase, por ejemplo, Kilpatrick, 1992, 2020, o Dorier, 2018 para la didáctica francófona). Me limitaré aquí a recordar algunos elementos claves del contexto de su aparición y algunas características de este nuevo campo de investigación. En primer lugar, el contexto es el de la posguerra, con la competición científica que tiene lugar entre los bloques del Oeste y del Este; la necesidad que se siente de una profunda renovación de los contenidos y las prácticas de la enseñanza de las matemáticas y, más en general, de la enseñanza de las ciencias; el desarrollo de la epistemología genética de Jean Piaget y la visión constructivista del aprendizaje asociada y, más globalmente, la influencia del estructuralismo que afecta tanto a las ciencias duras como a las ciencias humanas. En este contexto, las limitaciones de los estudios y comparaciones como los que tradicionalmente realizaba la CIEM aparecen más y más evidentes. Como bien se explica en Menghini, Furinghetti, Giacardi y Arzarello (2008), esto condujo en 1957 a la creación de una nueva organización internacional, la CIEAEM (*Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*), por iniciativa del psicólogo y educador Caleb Gattegno. Piaget es miembro fundador, al igual que los matemáticos André Lichnerowicz y Gustave Choquet, y los profesores Emma Castenuovo, Sofia Krigovska, Lucienne Felix y Tamás Varga. Luego, bajo el impulso de su presidente Hans Freudenthal, la ICMI también entró en acción, con la creación de la revista *Educational Studies in Mathematics* en 1968 y la organización del primer congreso ICME en Lyon en 1969. Posteriormente en 1976, después del ICME-3 se crearon los dos primeros grupos de estudio afiliados a la ICMI: HPM (Historia y Pedagogía de las Matemáticas) y PME (Psicología de la Educación Matemática). El segundo se dedica especialmente a la investigación y su nombre muestra la estrecha relación de la investigación de la época con el campo bien establecido de la psicología, una relación también claramente visible en las obras precursoras.

La investigación de la época se centraba principalmente en los alumnos y su aprendizaje. En los países que más contribuyeron a los intercambios internacionales en esa época, la visión del aprendizaje estuvo fuertemente influenciada por la epistemología piagetiana. La enseñanza se considera un proceso de adaptación ante situaciones problemáticas, y se hace hincapié en las rupturas y reestructuraciones cognitivas que requieren esas adaptaciones. Se expresa en los conceptos utilizados, ya sea la noción de obstáculo epistemológico, tomada del filósofo Gaston Bachelard, o las nociones de *misconception*, obstáculo o conflicto cognitivo. También, observamos la aparición temprana de taxonomías para dar cuenta de los desarrollos cognitivos, como la elaborada ya en 1958 por Pierre y Dina van Hiele que distinguía cinco niveles en el aprendizaje de la geometría, una taxonomía que se utiliza hasta hoy en día (Pegg, 2020). Además, surgen distinciones que expresan diferentes tipos de relación con el conocimiento matemático y ponen de relieve los límites de la enseñanza convencional, como la distinción hecha por Richard Skemp (1976) entre conocimiento instrumental y relacional. La investigación, en esta fase emergente, se está desarrollando particularmente a nivel de la escuela básica. Esto es claramente visible en Francia con el papel esencial que desempeñan las investigaciones llevadas a cabo por Guy Brousseau y sus colegas en la escuela primaria Michelet asociada al COREM, que es el Centro de Observación para la Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (Brousseau, 2008).

No obstante, a pesar de estas tendencias comunes, el campo de investigación en Educación Matemática ya es muy diverso en ese momento. Esta diversidad es incluso visible si uno se limita a países con contextos a priori similares. La investigación que llevamos a cabo como preparación para la jornada temática en el ICME-13 sobre las tradiciones didácticas alemana, francesa, italiana y holandesa, cuatro tradiciones que, como otras en Europa continental, utilizan el término didáctico para denominar este campo de investigación, lo demuestra claramente (Blum, Artigue, Mariotti, Strässer y Van den Heuvel-Panhuizen, 2019).

A continuación, me limitaré a mencionar brevemente el caso de las tradiciones francesa y holandesa, remitiendo al lector interesado al propio libro para obtener más detalles. Estas dos tradiciones tienen en común la característica de basarse en una profunda reflexión sobre las matemáticas y su epistemología. Comparten la visión de las matemáticas como una construcción humana elaborada para responder a problemas, tanto matemáticos como extramatemáticos. Comparten la visión de que la enseñanza tradicionalmente impartida corresponde a una inversión epistemológica, presentando el conocimiento en una forma quizás simplificada pero acabada, ocultando los caminos que históricamente lo han hecho emerger como respuesta a necesidades y problemas. Además, estas dos tradiciones se han desarrollado de manera particularmente coherente desde los años setenta, siendo esta coherencia aún más visible para la tradición holandesa. Esta última está anclada en la fenomenología didáctica de Freudenthal, mientras que la tradición francesa, inicialmente dominada por la teoría de las situaciones de Brousseau, se ha ido diversificando progresivamente sin dejar de estar fuertemente influenciada por esta teoría. En ambas tradiciones, también, el diseño didáctico juega un papel esencial. Sin embargo, estas dos tradiciones son sustancialmente diferentes. Desde el principio, la didáctica francesa se ha fijado la ambición de ser una ciencia fundamental y aplicada. Ha dado prioridad a la comprensión de los complejos y entrelazados procesos de enseñanza y aprendizaje, al funcionamiento y la ecología de los sistemas didácticos y la identificación de los fenómenos didácticos, considerándolo un requisito previo para la acción razonada sobre estos sistemas. La tradición holandesa, teorizada hoy en día en términos de *Realistic Mathematics Education* (RME), corresponde a una construcción diferente puesta muy pronto al servicio de la producción de teorías locales de aprendizaje en diversos dominios, y de recursos para la enseñanza. Las teorías locales y los recursos se desarrollan en estrecha interacción, de manera pragmática e iterativa. Se basan en un principio de reinvención guiada de las matemáticas por los alumnos y en un doble proceso de matematización, horizontal y vertical, a partir de situaciones radicadas en la realidad de los alumnos; esta realidad se va poblando progresivamente de objetos matemáticos. La propia teoría RME se presenta como un conjunto coordinado de principios de diseño y, por lo tanto, tiene una estructura muy diferente de la teoría de las situaciones y, más en general, de las construcciones teóricas de la didáctica francesa. Estas diferencias, por supuesto, influyen en los tipos de conocimiento que producen los investigadores que se refieren a una u otra de estas tradiciones, y las funciones que atribuyen a estos conocimientos. Sin embargo, dichas diferencias no impiden que se desarrollen colaboraciones fructíferas, como lo demuestra, por ejemplo, el trabajo conjunto de Luc Trouche y Paul Drijvers (2010) sobre la noción de orquestación instrumental.

3. Evoluciones convergentes y prometedoras

Tras destacar algunos rasgos del surgimiento de este campo de investigación y la diversidad que estuvo presente en él muy pronto pero que creció sin cesar a lo largo de los decenios, reflejando la diversidad de los sistemas de educación y de las culturas, y las historias particulares que les han dado forma, mencionaré en esta sección algunas evoluciones convergentes y prometedoras.

3.1 La creciente atención prestada a las dimensiones sociales y culturales de la enseñanza y el aprendizaje

Esta evolución, ya muy avanzada en el siglo pasado, ha sido descrita a menudo como un "giro sociocultural" en referencia a Lerman (2000). Se ha caracterizado, en términos de referencias psicológicas, por un cambio de la referencia inicialmente dominante de la epistemología piagetiana a la obra de Vygotsky y sus sucesores. Según el contexto, se ha expresado mediante diversas construcciones teóricas, entre ellas, sin pretender ser exhaustivo, la teoría antropológica de la didáctica (TAD) (Chevallard, 2019), la teoría de la objetivación (Radford, 2019), la socioepistemología, actualmente de gran influencia en América Latina (Cantoral 2013), y las diversas variaciones desarrolladas a partir de la teoría de la actividad de Leontiev, por ejemplo, la *Cultural Historical Activity Theory* (CHAT) (Roth & Lee, 2007). También se caracterizó por una mayor atención a las cuestiones de equidad, desigualdad y justicia social. Así pues, el pensamiento del pedagogo brasileño Paolo Freire ha sido una fuente de inspiración para muchos investigadores y, en particular, ha inspirado el desarrollo del movimiento de educación matemática crítica (Skovsmose, 1994). Es también en América Latina donde surgió el campo de la etnomatemática, ahora plenamente reconocido, por iniciativa de Ubiratan d'Ambrosio, que recibió la Medalla Felix Klein de la ICMI por su obra de investigador y especialmente por su papel en este surgimiento (D'Ambrosio, 2008).

3.2 La creciente atención prestada a las dimensiones discursivas y semióticas de los procesos de enseñanza y aprendizaje

Esta creciente atención prestada a las dimensiones semióticas y discursivas de los procesos de enseñanza y aprendizaje es una segunda tendencia fuerte. La conciencia de la dimensión eminentemente social del aprendizaje de las matemáticas ha llevado necesariamente a prestar una mayor atención a los intercambios discursivos dentro del aula. Los investigadores han utilizado instrumentos de lingüística o semiótica social con ese fin, como, por ejemplo, en el caso de Candia Morgan (2006), o han elaborado enfoques específicos. Una construcción cada vez más influyente es la desarrollada por Anna Sfard conocida como "comognición" (2008), por la cual recibió la Medalla Hans Freudenthal de la ICMI. Como explica en la entrada asociada de la segunda edición de la *Encyclopedia of Mathematics Education* (Sfard, 2020), la comognición se basa en la idea de que el pensamiento puede modelarse útilmente como comunicación con sí mismo. En una visión no dualista de la cognición humana, las matemáticas se conciben como "a historically established discourse" y su aprendizaje como "becoming a participant in this special form of communication" (Sfard, 2020, p. 95).

La sensibilidad a la dimensión semiótica del aprendizaje no es en absoluto reciente, como lo demuestran, por ejemplo, las investigaciones desarrolladas por Raymond Duval desde los años ochenta (Duval, 1995). Sin embargo, esta sensibilidad ha crecido mucho a principios de este siglo, ejemplo de ello son los dos números especiales publicados por la revista *Educational Studies in Mathematics* (Radford, Schubring y Seeger, 2011; Saenz-Ludlow y Presmeg, 2006). Este crecimiento está impulsado en parte por los avances tecnológicos que han ampliado considerablemente el espacio de las representaciones disponibles para acceder a los objetos matemáticos, esencialmente abstractos, los medios de acción sobre estas representaciones, así como los medios de interacción dinámica entre estas. Basta pensar cómo programas informáticos ampliamente utilizados como GeoGebra permiten hoy en día trabajar con objetos funcionales, articulando representaciones a través de tablas de valores, representaciones gráficas, expresiones algebraicas, cálculo exacto y aproximado, y permitiendo visualizar dinámicamente, gracias a deslizadores, el efecto de la variación de parámetros sobre las funciones de una misma familia, polinómicas, sinusoidales o exponenciales.

La atención se ha ampliado también, más allá de los sistemas clásicos de representación, a los gestos que los medios tecnológicos permiten registrar y estudiar con gran sutileza, y más en general a la llamada dimensión "encarnada" de la cognición. Más allá de referencias bien establecidas, como las que tratan la teoría semiótica de Duval basada en la noción de registro de representación semiótica, los enfoques semióticos se han multiplicado y se han hecho multimodales, como lo demuestra, por ejemplo, el papel fundamental que desempeña la noción de *semiotic bundle* en el enfoque semiótico APC (Acción, Producción, Comunicación) desarrollado por Ferdinando Arzarello (2008).

Por supuesto, estos desarrollos no son independientes del mencionado en el apartado 3.1. Esto queda claro, por ejemplo, en la teoría de mediación semiótica desarrollada por Mariolina Bartolini Bussi y Maria Alessandra Mariotti (2008), que se basa en una visión de los artefactos como instrumentos de mediación semiótica inspirada directamente en la obra de Vygotsky, o en la teoría de la objetivación de Radford ya señalada, en la que la semiótica también ocupa un lugar central. Esto también queda claro cuando Marcelo Borba, para romper con la habitual visión dicotómica de la relación entre los humanos y la tecnología –inspirándose en las ideas de Tikhomirov y Lévy– introduce el concepto de "humanos-con-medios" (Borba y Villarreal, 2006, pp. 21-25). En este concepto se condensan varias ideas: el hecho de que la cognición no es algo individual sino una empresa social y que es inseparable de las tecnologías que la equipan, hoy como ayer, pero con la diferencia de que las tecnologías actuales están modificando profundamente estas interrelaciones.

Otro desarrollo convergente en la investigación sobre las tecnologías digitales es la creciente atención que se está prestando a las génesis instrumentales y la necesidad de atenderlas en la educación. Esta atención a las génesis instrumentales, que se ha nutrido de las investigaciones en ergonomía cognitiva de Pierre Vérillon y Pierre Rabardel (1995), también ha tomado diversas formas según los marcos teóricos en los que se ha insertado, como ha demostrado claramente el proyecto europeo ReMath (Kynigos y Lagrange, 2014; Artigue y Mariotti, 2014). Ha llevado, entre otras cosas, a la aparición de lo que ahora se conoce como el enfoque instrumental en didáctica de las matemáticas (véase Artigue, 2011, para una presentación en español y también la serie de videos[2] realizada como parte del proyecto AMOR de la ICMI [*Awardees Multimedia Online Resources*] que traza su surgimiento y desarrollo).

3.3 La descentralización de la investigación del alumno al docente

Otra evolución importante que comenzó en el decenio de 1990 es el cambio de orientación de la investigación del alumno al docente. Las primeras investigaciones didácticas se centraron principalmente en los alumnos, las dificultades que probablemente encontrarían en su aprendizaje y la búsqueda de medios para superarlas. Se esperaba que los docentes, a través de su formación inicial y continua, fueran informados de los conocimientos y recursos producidos por la investigación didáctica, para que pudieran utilizarlos en su enseñanza. Sin embargo, esta explotación pronto resultó más difícil de lo previsto, lo que motivó un interés creciente en los propios docentes, sus conocimientos y creencias, sus prácticas y los factores determinantes

[2] *https://icmiamor.org/awardee-units/michele-artigue-unit*

de esas prácticas, su formación inicial y su desarrollo profesional. La encuesta que Jill Adler piloteó para el congreso ICME-10 en 2004, ha mostrado que, ya a principios de este siglo una proporción importante de la investigación se centraba en los docentes, revelando así un cambio en la orientación de la investigación (Adler, 2008). Asimismo, en esta área de investigación se nota una gran diversidad de aproximaciones, como lo demuestra claramente el 15.º estudio de la ICMI dedicado a este tema (Even y Ball, 2009).

En el contexto internacional, sin embargo, se observa la fuerte influencia del modelo desarrollado por Deborah Ball y sus colegas (Ball y Bass, 2000), derivada de la distinción introducida por Shulman entre *content knowledge, pedagogical knowledge y pedagogical content knowledge.* Conocido como MKT (*Mathematical Knowledge for Teaching*), este modelo también se utilizó en el primer estudio internacional TEDS-M (Teacher Education and Development Study in Mathematics) que, al igual que las principales evaluaciones internacionales de alumnos, tenía por objeto reunir datos sobre la formación inicial de los maestros de enseñanza básica y evaluar los conocimientos matemáticos y profesionales adquiridos por los maestros después de esta formación.

En la didáctica francesa, la investigación sobre las prácticas docentes ha dado lugar, en particular, a un enfoque específico, inspirado en la teoría de la actividad. Se trata del doble enfoque didáctico y ergonómico de las prácticas de enseñanza iniciado por Aline Robert y Janine Rogalski (2002), al que contribuyen ahora varios investigadores (véase Vandebrouck, 2013, por ejemplo). En este enfoque, las prácticas de enseñanza son vistas como objetos coherentes y estables, y son analizadas a través de cinco componentes. Los dos componentes principales son el componente cognitivo y el componente de mediación. El primero corresponde a la organización didáctica por el docente de las tareas propuestas a los alumnos, mientras que el segundo corresponde a su manejo en el aula, a las interacciones directas entre el profesor y los alumnos. En esta actividad didáctica y de mediación influyen diversas determinaciones que se tienen en cuenta en los otros tres componentes del modelo, el institucional, el social y el personal. El objetivo de la investigación es identificar las regularidades y variabilidades en las prácticas según los contextos, los dominios matemáticos, los niveles de enseñanza, los docentes, etc., para poder comprenderlas.

3.4 La evolución de las problemáticas: modelización y enfoques de investigación

Concluiré este panorama de evoluciones convergentes mencionando otros desarrollos más estrechamente vinculados a cuestionamientos sobre la naturaleza misma de la actividad matemática. Por supuesto, estas cuestiones siempre han estado presentes en la didáctica de las matemáticas y en el corazón del trabajo epistemológico de los didactas. Desde el comienzo de las investigaciones, en particular, el cuestionamiento sobre la especificidad de las formas de validación en matemáticas ha alimentado las numerosas investigaciones realizadas sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. La investigación en este campo sigue siendo extremadamente activa, como lo demuestra el volumen resultante del 19.º estudio de la ICMI recientemente dedicado a este dominio (Hanna y De Villiers, 2012). Sin embargo, otros cuestionamientos han ganado cada vez más importancia, en parte a causa de la evolución de las ciencias matemáticas y de las prácticas asociadas, de sus relaciones con otros campos científicos, ciencias de la naturaleza o ciencias económicas y sociales, y con la sociedad. El caso de la modelización es un buen ejemplo de esto. La modelización es esencial para las conexiones que las matemáticas mantienen con un número creciente de campos, y las herramientas de cálculo y simulación producidas por los avances tecnológicos renuevan las prácticas asociadas. Aunque la cuestión de la importancia que se debe dar a las aplicaciones de las matemáticas en la enseñanza de esta disciplina fue un tema de debate desde los primeros años de la CIEM, solo se abordaba en términos de aplicaciones la cuestión de la relación entre lo matemático y lo extramatemático en la enseñanza. Esta visión ha perdurado durante mucho tiempo, a pesar de los esfuerzos de pioneros como Henri Pollak y de la creación en 1983 de la serie de conferencias ICTMA (*International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications*), que en 1999 dio lugar al grupo internacional con la misma sigla (esta vez para designar la *International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications*), que actualmente es un grupo de estudio afiliado a la ICMI. Hoy en día, nadie pensaría solo en términos de aplicaciones la relación entre lo matemático y lo extramatemático (Blum, Galbraith, Henn y Niss, 2007). La elaboración de modelos se ha convertido en un componente reconocido de la actividad de muchos matemáticos, una actividad que desarrollan en colaboración con investigadores de otras disciplinas. El desarrollo entre los estudiantes de la competencia o de competencias de modelización (véase Niss y Blum, 2020, para una discusión detallada de esta terminología) está pasando a formar parte cada vez más de los planes de estudio de matemáticas, y la investigación didáctica en esta área está creciendo (véase, por ejemplo, la síntesis realizada por Blum, 2015). Estos trabajos muestran claramente la distancia que separa una visión en términos de modelización de la visión en términos de aplicación que es familiar para los profesores de Matemáticas. Ofrecen numerosos ejemplos de experiencias exitosas tanto en lo que se refiere a la enseñanza de los alumnos en todos los niveles de escolaridad como en la formación de los profesores. Nos ayudan a identificar las numerosas dificultades que hay que superar para dar vida a la modelización en el aula, construir progresiones de aprendizaje en este campo y articularlas con los contenidos de enseñanza. Estas dificultades explican por qué las prácticas de modelización, incluso cuando son promovidas por la institución escolar, siguen siendo, generalmente, ocasionales y marginales.

Los avances tecnológicos también han contribuido a poner de relieve el componente experimental de la actividad matemática, lo han dotado de nuevos y cada vez más potentes instrumentos y han facilitado el acceso a esta forma de actividad y a los resultados que produce, como lo muestra por ejemplo la creación en 1992 de la revista *Experimental Mathematics*. Aunque las ciencias matemáticas tienen especificidades innegables, el hecho de destacar su dimensión experimental las acerca a otras ciencias y a sus propios enfoques de investigación. Por lo tanto, no es casualidad que, en el último decenio, expresiones como "enfoque de indagación", IBL *(Inquiry Based Learning*), IBE (*Inquiry Based Education*), que se han utilizado durante mucho tiempo en los trabajos relativos a la enseñanza de las ciencias, hayan migrado a la enseñanza de las matemáticas. La trayectoria europea es interesante desde este punto de vista. Tras la publicación del informe conocido como el Informe Rocard (Rocard et al., 2007), en el que se expresaba la preocupación por el decreciente atractivo de las carreras científicas en Europa y se consideraba que una fuente importante de este se encontraba en las prácticas de enseñanza de las matemáticas y las ciencias excesivamente deductivas y formales, la Comisión Europea decidió financiar sustancialmente proyectos innovadores dirigidos a posibilitar la difusión del IBL y de la IBE en la enseñanza de las matemáticas y las ciencias. El número de proyectos se ha multiplicado, como se muestra, por ejemplo, en el sitio web Scientix[3]. Desde 2009, he participado personalmente como experta científica en cinco de esos proyectos, cada uno de ellos movilizando investigadores de varios países y abarcando simultáneamente matemáticas y ciencias. Como señalamos en (Artigue y Blomhøj (2013), desde su aparición, la investigación didáctica ha desarrollado múltiples construcciones teóricas que pueden vincularse a los conceptos de IBL y IBE, y múltiples recursos para la enseñanza y la formación de docentes en consonancia con estas construcciones, pero no se ha logrado que estas construcciones y recursos influyan en la enseñanza de las matemáticas a gran escala. Estos proyectos europeos han dependido en gran medida de estas construcciones y recursos para su realización, pero al mismo tiempo, dada su especificidad y escala, les dan una nueva extensión. También nos obligan a cuestionar las proximidades, diferencias y complementariedades entre estas diferentes construcciones teóricas para llegar a visiones suficientemente compartidas del IBL y de la IBE que permitan el trabajo de colaboración que se espera de los diferentes participantes, tal como lo muestra Katja Maass en Artigue et al. (2020). Este cuestionamiento está vinculado, de hecho, a otro cuestionamiento que también se ha desarrollado en el último decenio, basado en la observación de la diversidad teórica exponencialmente creciente del campo didáctico y el consiguiente riesgo de fragmentación. Esta es la empresa que ahora se conoce como *Networking of theories* (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2014).

Estos ejemplos de la evolución de las problemáticas de investigación son solo dos de los muchos ejemplos que podrían citarse y que son ampliamente compartidos. La conferencia asociada al estudio ICMI-24 sobre los recientes desarrollos curriculares mostró claramente la importancia tomada por el concepto de competencia(s) y, por supuesto, por las investigaciones relacionadas (Shimizu y Vithal, 2018). La nueva versión de la *Encyclopedia of Mathematics Education* muestra, por otra parte, el desarrollo de la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario, con 10 nuevas entradas dedicadas a este tema. Esta evolución también se pone de manifiesto en la creación en 2015 de INDRUM (*International Network for Didactic Research in University Mathematics*) y de IJRUME (*International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*). En este texto, como en la conferencia de la que surgió, no me pronunciaré más en estos desarrollos convergentes, para considerar otra cuestión igualmente esencial, la de las relaciones entre centros y periferias.

[3] *http://www.scientix.eu/*

4. Centros y periferias

Voy a abordar este tema de las relaciones centros-periferias usando el filtro de la CIEM-ICMI. Como señalé en la primera sección de este texto, desde principios del siglo XX, con la creación de la CIEM, se desarrollaron intercambios internacionales sobre la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, aunque más de 30 países eran miembros o miembros asociados de esta organización, la CIEM fue, en sus inicios, una organización dominada por los europeos. De los 18 países miembros (con derecho a voto en contraposición a los miembros asociados), todos eran países europeos, excepto los Estados Unidos y Rusia, y hasta la Segunda Guerra Mundial, todos los miembros de los comités ejecutivos fueron de Europa o de los Estados Unidos. La situación mejoró con la refundación de la Comisión en 1952, que convirtió a la ICMI en una subcomisión permanente de la IMU (International Mathematical Union). En ese momento, la ICMI tenía 27 miembros de pleno derecho. El Comité Ejecutivo comenzó a incluir a matemáticos de nuevos países, primero con la elección en 1954 de Ram Behari (India), y luego en 1958 de Yasuo Akizuki (Japón) y Aleksandr Danilovic Aleksandrov (URSS). Pero no fue hasta 1979 que América Latina estuvo representada, con la elección de Ubiratan d'Ambrosio. Para África sólo sucedió en 2003, con la elección de Jill Adler, quien fue luego elegida presidenta de la ICMI en 2017. Sin embargo, fue con países latinoamericanos que se creó la primera red regional de la ICMI: el Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) en 1962, por iniciativa del entonces presidente de la ICMI, Marshall H. Stone, y de matemáticos latinoamericanos comprometidos con cuestiones educativas, después de una conferencia en Bogotá en 1961. Los vínculos establecidos en este momento con la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO) también contribuyeron al fortalecimiento de los intercambios internacionales y al examen de cuestiones especialmente sensibles en los países de la periferia. La UNESCO en particular apoyó las acciones del CIAEM, como se destacó cuando fue otorgada la primera Medalla Luis Santaló a Ed Jacobsen quien estuvo a cargo de las matemáticas en la UNESCO durante mucho tiempo. La ICMI y la UNESCO también organizaron conjuntamente dos reuniones en África en esa época, la primera en Nairobi en 1974, *Language and Mathematics Teaching*, y la segunda en Jartum en 1978, *Developing Mathematics in Third World Countries*.

Sin embargo, la evolución de la ICMI hacia una verdadera internacionalización ha sido lenta y, como se puso de relieve en el Simposio que celebró el centenario de la Comisión en 2008, las acciones llevadas a cabo no siempre han podido evitar los clásicos tropiezos de las relaciones entre centros y periferias, la dominación y la indiscutida exportación de perspectivas y obras de los países desarrollados de Occidente. Sin embargo, ya en 1959, el matemático japonés Yasuo Akizuki, que había sido elegido miembro del Comité Ejecutivo en 1958, escribía:

> Oriental philosophies and religions are of a very different kind from those of the West. I can therefore imagine that there might also exist different modes of thinking even in mathematics. Thus I think that we should not limit ourselves to applying directly the methods which are currently considered in Europe and America to be the best, but should study mathematical instruction in Asia properly. Such a study might prove to be of interest and value for the West as well as for the East. (Akizuki, 1960, p. 288)

Pero solo décadas después, cuando el éxito de los países asiáticos en las evaluaciones internacionales TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study) atrajo la atención de la comunidad internacional, se abordó realmente esta cuestión. La ICMI contribuyó a ello dedicando su 13° estudio a la comparación de las culturas de enseñanza de las matemáticas de los países del Asia sudoriental de tradición confuciana con las de Occidente (Leung, Graf y Lopez-Real, 2006).

Como también se señaló en el Simposio de 2008 (Menghini et al., 2008), en el cambio de siglo, este movimiento hacia una verdadera internacionalización de la ICMI se convirtió en una prioridad (véase también Hodgson y Niss, 2018). Esto ha resultado notablemente en:

- La inclusión de nuevos países, más allá de los miembros de la IMU una inclusión que también se vio favorecida por la decisión adoptada por la IMU de crear la categoría de miembro asociado más inclusiva.

- Los esfuerzos sistemáticos realizados para asegurar un mejor equilibrio en la composición de los diversos comités ICMI (comités de los congresos ICME y de los estudios ICMI) y favorecer la contribución de participantes de países de la periferia en las actividades asociadas.

- La creación de dos nuevas redes regionales en las que participa África en particular, la red AFRICME, creada en 2005, cuyas actividades federan principalmente a los países anglófonos de África, y la red EMF (*Espace Mathématique*

Francophone), primera red regional de la ICMI organizada en torno a una unidad lingüística y cuyas conferencias se celebran alternativamente en un país del Norte y en un país del Sur, siendo este siempre un país africano francófono.

• La elección de los temas para los estudios ICMI, especialmente con el estudio ICMI-21 sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en contextos multilingüísticos, el primer estudio ICMI cuyos dos líderes, Maria do Carmo y Mamokgethi Setati, fueron de países del Sur, Brasil y Sudáfrica respectivamente, una elección que refleja el papel esencial y pionero que desempeñaron los investigadores del Sur en el estudio de estas cuestiones de multilingüismo (Barwell et al., 2016).

• La elección de los sitios de las conferencias asociadas a los estudios ICMI, y también, de manera particularmente simbólica, la organización por primera vez de un congreso ICME en un país emergente, México, en 2008.

• Por último, la puesta en marcha del programa CANP (Capacity and Networking Project) en 2010, en asociación con la UNESCO y con el apoyo de la IMU. Este programa se centra en el desarrollo de la capacidad de formación y en la creación de sinergias entre los diferentes agentes que participan en la formación de profesores de Matemáticas, en el marco de nuevas redes regionales en las que participan países cercanos, todavía poco conectados a las redes existentes y a la comunidad internacional reunida por la ICMI. Durante la última década, se ha convertido en un programa emblemático de la ICMI y de las cinco realizaciones asociadas, dos han sido organizadas en América Latina, la primera en 2012 en Costa Rica para países de América Central y del Caribe, que condujo a la creación de la red REDUMATE (Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe), y la segunda en 2016 en Lima, para los países andinos y el Paraguay, que condujo a la creación de la red CEMAS (Comunidad de Educación Matemática de América del Sur).

Mirando la situación actual, incluso más allá de la ICMI, la evolución es evidente. Conferencias en el campo de la Educación Matemática se están multiplicando en todas las regiones del mundo. En todas partes también se desarrollan programas de maestría y doctorado, como el que celebró su décimo aniversario en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, cuando presenté la conferencia de la que se deriva este texto. También se han elaborado nuevos estudios comparativos, atentos al respeto de la diversidad cultural, tanto en su conceptualización como en su metodología, como el estudio *The Learner's Perspective Study*, iniciado por el australiano David Clarke (Clarke, Keitel y Shimizu, 2006), con quien tuve la oportunidad de colaborar en los últimos cinco años en el proyecto internacional Lexicon (Mesiti, Artigue, Hollingsworth, Cao y Clarke, en prensa), y que lamentablemente falleció a principios de este año. Además, se observa la creciente influencia de investigaciones, teorías y prácticas no originadas en los países y culturas tradicionalmente dominantes. La multiplicación internacional de las investigaciones y realizaciones en torno al concepto de Lesson Study es un excelente ejemplo de ello (Huang, Takahashi y Da Ponte, 2019). Se puede también mencionar el lugar tomado en América Latina por la socioepistemología, los coloquios RELME (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa) y la revista RELIME (*Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*), y el reconocimiento internacional de este enfoque atestiguado, en particular, por la existencia de una entrada asociada en la nueva versión de la *Encyclopedia of Mathematics Education* (Cantoral, 2020).

Sin embargo, queda mucho por hacer para que el campo de la Educación Matemática se beneficie plenamente de la riqueza que ofrece su diversidad cultural, y se libere de relaciones de dominación heredadas de la historia. Cada uno de nosotros puede contribuir a esto.

5. Conclusión

En este texto, al igual que en la conferencia de la que surgió, he tratado de trazar, en sus grandes líneas, la historia del campo de investigación que hoy llamamos, según el país, Didáctica de las Matemáticas, Educación Matemática o Matemática Educativa. Esta descripción es necesariamente esquemática; es también parcial y no objetiva, marcada por la cultura didáctica en la que me construí como investigadora, las experiencias que viví como docente, formadora, investigadora, pero también la forma en que mi intensa participación en las actividades de la ICMI durante catorce años, como miembro de su Comité Ejecutivo, influyó en mi visión de la Educación Matemática, en el sentido amplio del término. Espero que este relato, a pesar de sus evidentes limitaciones, logre comunicar, de manera suficientemente argumentada, mi convicción de que este campo de investigación es hoy en día un campo cada vez más reconocido, legitimado e institucionalizado en el mundo entero; un campo de investigación vivo cuyas problemáticas y herramientas, tanto conceptuales como metodológicas, evolucionan constantemente; un campo de investigación que ha producido a lo largo de los decenios muchos conocimientos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; un campo de investigación que ha alimentado un gran número de realizaciones para mejorar la enseñanza y la formación de los docentes, y ha influido notablemente en los planes de estudio; y también un campo de investigación particularmente diverso en todos sus aspectos y cada vez más sensible a la riqueza potencial que constituye esa diversidad, pero también a los esfuerzos que hay que hacer para que esa riqueza pueda expresarse y explotarse. Sin embargo, también hay que reconocer que este campo de investigación se enfrenta a muchos desafíos, entre ellos, el desafío de la relación entre la investigación fundamental y la acción didáctica y, asociado a este, el desafío de los cambios de escala; de conciliar el tiempo prolongado de las investigaciones con el tiempo de los cambios, incluso los trastornos, en el mundo que nos rodea. Mientras escribo estas líneas, en medio de la pandemia del virus covid, en un momento en que las escuelas y universidades deben encontrar repentinamente nuevas formas de operar y evitar un crecimiento de desigualdades educativas ya insoportables, este desafío es particularmente obvio.

Referencias

Adler, J. (Coord.) (2008). Mirror images of an emerging field: Researching mathematics teacher education. En E. Emborg, y M. Niss (Eds.), *Proceedings of the 10th International Congress of Mathematics Education* (pp. 123-139). Copenhaguen: Roskilde University.

Akizuki, Y. (1960). Proposal to ICMI. *L'Enseignement Mathématique*, t. V, fasc.*5*, 288-289.

Arzarello, F. (2008). Mathematical landscapes and their inhabitants: Perceptions, languages, theories. En E. Emborg, y M. Niss (Eds.), *Proceedings of the 10th International Congress of Mathematics Education* (pp. 158-181). Copenhaguen: Roskilde University.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning,* 7, 245-274.

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación en Educación Matemática*, 8, 13-33.

Artigue, M. (2018). Les recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à l'étranger. En J.-L. Dorier, G. Gueudet, M.-L. Peltier, A. Robert, y E. Roditi (Eds.), *Enseigner les mathématiques. Didactique et enjeux d'apprentissage* (pp. 408-420). Paris: Editions Belin.

Artigue, M., y Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. ZDM – *The International Journal on Mathematics Education, 45*(6), *797- 810.*

Artigue, M., y Mariotti, M.A. (2014). Networking theoretical frames: the ReMath enterprise. *Educational Studies in Mathematics, 85*(3), 329-356.

Artigue, M. et al. (2019). The French didactic tradition. En B. Werner, M. Artigue, M. A. Mariotti, R. Strä er, y M. Van den Heuvel-Panhuizen (Eds.), *European Traditions in Didactics of Mathematics* (pp. 11-56). New-York: Springer Open.

Artigue, M., Bosch, M., Doorman, M., Juhász, P., Kvasz, L., y Maass, K. (2020). Inquiry based mathematics education and the development of learning trajectories. *Teaching Mathematics and Computer Science. 18/*3, 63-89.

Ball, D. L., y Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: knowing and using mathematics. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (pp. 83-104). Westport: Ablex.

Bartolini Bussi, M. G., y Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. En L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, y D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd edition, revised, pp. 746-805). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Barwell, R., Clarkson, P., Halai, A., Kazima, M., Moschkovich, J., Planas, N.,… y Ubillús, M. V. (Eds.). (2016). *Mathematics Education and Language Diversity. The 21st ICMI Study.* New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-14511-2

Belhoste, B. (1998). Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques. *Revue d'histoire des mathématiques*, 4, 289-304. Recuperado desde http://www.numdam.org/article/RHM_1998__4_2_289_0.pdf

Bikner-Ahsbahs, A., y Prediger, S. (Eds.) (2014). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education.* New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? En S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73-96). New York: Springer Open. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3

Blum, W., Galbraith, P. Henn, H.-W., y Niss, M. (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study.* New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1

Blum, W., Artigue, M., Mariotti, M. A., Strä er, R., y Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Eds.) (2019). *European Traditions in Didactics of Mathematics*. New York: Springer Open. https://doi.org/10.1007/978-3-030-05514-1

Borba, M. C., y Villarreal, M. E. (2006). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking.* New York: Springer. https://doi.org/10.1007/b105001

Brousseau, G. (2008). Research in mathematics education. En E. Emborg, y M. Niss (Eds.), *Proceedings of the 10th International Congress of Mathematics*

Education (pp. 244-254). Copenhaguen: Roskilde University.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. México: Gedisa editorial. Recuperado desde https://www.researchgate.net/profile/Ricardo_Cantoral/publication/261363815_Teoria_Socioepistemologica_de_la_Matematica_Educativa_Estudios_sobre_la_construccion_social_del_conocimiento/links/0a85e5398a4c0323d5000000.pdf

Cantoral, R. (2020). *Socioepistemology in mathematics education*. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2nd edition, pp. 790-797). New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0

Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: an attempt at a principled approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, *12*, 71-114. Recuperado desde https://www.jasme.jp/hjme/download/05_Yves%20Chevallard.pdf

Clarke, D. J., Keitel, C., y Shimizu, Y. (Eds.) (2006). *Mathematics classrooms in twelve countries: The insider's perspective.* Rotterdam: Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087901622

Coray, D., Furinghetti, S., Gispert, H., Hodgson, B., y Schubring, G. (Eds.) (2003). *One hundred years of L'Enseignement Mathématique.* Genève: L'Enseignement Mathématique. Recuperado desde https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Digital_Library/Other_ICMI_Conferences_Proceedings/Proc_EM_ICMI_Symp_01.pdf

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática. Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. México: Limusa.

Dorier, J.-L. (2018). Aperçu de l'histoire de la didactique des mathématiques francophone. En J.-L. Dorier, G. Gueudet, M.-L. Peltier, A. Robert, y E. Roditi (Eds.), *Enseigner les mathématiques. Didactique et enjeux d'apprentissage* (pp. 74-88). Paris: Editions Belin.

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*. Berne: Peter Lang.

Even, R., y Ball, D. L. (Eds.) (2009). *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. The 15th ICMI Study.* New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09601-8

Gispert, H. (2008). Traités et manuels: influences croisées des sphères sociales, scolaires et académiques dans les sciences. En L. Viennot (Ed.), *Didactique, épistémologie et histoire des sciences-Penser l'enseignement* (pp. 257-279). Paris: PUF. https://doi.org/10.3917/puf.vienn.2008.01.0257

Hanna, G., y De Villiers, M. (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study.* New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6

Hodgson, B., y Niss, M. (2018). ICMI 1966-2016: A Double Insiders' View of the Latest Half Century of the International Commission on Mathematical Instruction. En G. Kaiser (Ed.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 229-247). New York: Springer Open. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72170-5

Huang, R., Takahashi, A., y Da Ponte, J. P. (Eds.) (2019). *Theory and Practice of Lesson Study in Mathematics. An International Perspective.* New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04031-4

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 3-38). New York: Macmillan.

Kilpatrick, J. (2020). History of research in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2nd edition, pp. 349-354). New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0

Kynigos, C., y Lagrange, J. B. (Eds.) (2014). Special issue: Representing mathematics with digital media: Working across theoretical and contextual boundaries. *Educational Studies in Mathematics, 85*(3). https://www.jstor.org/stable/i40143011

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning.* Westport: Ablex. https://doi.org/10.2307/749752

Leung, F. K. S., Graf, K.-D., y Lopez-Real, F. J. (Eds.) (2006). *Mathematics education in different cultural traditions: A comparative study of East Asia and the West. The 13th ICMI Study.* New York: Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-29723-5

Menghini, M., Furinghetti, F., Giacardi, L., y Arzarello, F. (Eds.) (2008). *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education.* Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana.

Mesiti, C., Artigue, M., Hollingsworth, H., Cao, Y., y Clarke, D. J. (Eds.). (en prensa). *Teachers talking about their classrooms: Learning from the professional lexicons of mathematics teachers around the world.* Routledge.

Morgan, C. (2006). What does social semiotics have to offer to mathematics education research? *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 219-245. https://doi.org/10.1007/s10649-006-5477-x

Niss, M., y Blum, W. (2020). *The Learning and Teaching of Mathematical Modelling.* New York: Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315189314

Pegg, J. (2020). The van Hiele theory. En S. Lermann (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2nd edition, pp. 896-899). New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0

Radford, L. (2019). On the epistemology of the Theory of Objectification. *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht University. Recuperado desde https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02417416/document

Radford, L., Schubring, G., y Seeger, F. (Eds.) (2011). Signifying and meaning-making in mathematical thinking, teaching and learning: Semiotic perspectives. Special issue. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2-3). https://doi.org/10.1007/s10649-011-9322-5

Robert, A., y Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education 2*(4), 505-528. https://doi.org/10.1080/14926150209556538

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H., y Hemmo, V. (2007). *L'enseignement scientifique aujourd'hui: une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe.* Bruxelles: Commission Européenne, Direction générale de la recherche, science, économie et société.

Roth, W. -M., & Lee, Y. -J. (2007). *"Vygotsky's neglected legacy"*: Cultural-historical activity theory. Review of Educational Research, *77*(2), 186-232.

Sáenz-Ludlow, A., y Presmeg, N. (Eds.) (2006). Semiotic perspectives in mathematics education. Special issue. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2). https://doi.org/10.1007/s10649-005-9001-5

Schubring, G. (2008). The origins and early incarnations of ICMI. In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, y F. Arzarello (Eds.) (2008). *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008)*. *Reflecting and shaping the world of mathematics education* (pp. 113-130). Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating.* Cambridge: Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511499944

Sfard, A. (2020). Commognition. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2nd edition, pp. 95-101). New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0

Shimizu, Y., y Vithal, R. (Eds.) (2018). *School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities. Proceedings of the ICMI-24 Study Conference.* University of Tsukuba & ICMI, Tsukuba, Japan. Recuperado desde https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/ICMI%20studies/ICMI%20Study%2024/ICMI%20Study%2024%20Proceedings.pdf

Skemp, R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26 Recuperado desde .http://www.davidtall.com/skemp/pdfs/instrumental-relational.pdf

Skovsmose, O. (1994). *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3556-8
Trouche, L, y Drijvers, P. (2010). Handled technology: Flashback into the future. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 42*(7), 667-681. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0269-2

Vandebrouck, F. (2013). *Mathematics Classrooms: Students' Activities and Teachers' Practices*. Rotterdam: Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6209-281-5

Vérillon, P., y Rabardel, P. (1995). Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Though in Relation to Instrumented Activity. *European Journal of Psychology of Education, 10*(1), 77-101. https://doi.org/10.1007/BF03172796

Weigand, H.-G., McCallum, W., Menghini, M., Neubrand, M., y Schubring, G. (Eds.) (2019). *The legacy of Felix Klein.* New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99386-7

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

https://doi.org/110.46219/rechiem.v12i3.33

MEDIACIÓN SEMIÓTICA POTENCIAL Y REAL DEL ENUNCIADO DE TAREAS GEOMÉTRICAS

POTENTIAL AND REAL SEMIOTIC MEDIATION OF GEOMETRIC TASK STATEMENTS

Patricia Perry, pperryc@yahoo.com.mx
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia

Leonor Camargo, lcamargo@pedagogica.edu.co
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia

Carmen Samper, csamper@pedagogica.edu.co
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia

RESUMEN

El artículo tiene como objetivo presentar el análisis de la mediación semiótica que los enunciados de dos tareas “ejercieron” sobre la construcción de significado en la que se involucró un estudiante al resolver las tareas con la mínima ayuda interpretativa del profesor. El análisis, realizado con la estrategia de “entrevista basada en tareas”, se hace desde la perspectiva semiótica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que desarrollan Sáenz-Ludlow y Zellweger, basándose en la teoría del signo triádico de Charles Sanders Peirce. A manera de reflexión final, alertamos sobre la importancia de formular cuidadosamente los enunciados en el diseño de tareas y sugerimos que es posible apoyarse en estos para lograr un aprendizaje significativo.

PALABRAS CLAVE:
Enunciado de tarea; mediación semiótica; geometría.

ABSTRACT

The article aims at presenting the analysis of the semiotic mediation that the statements of two tasks exerted upon meaning-making when a student was involved in solving the tasks with the minimum interpretive help from the teacher. A “task-based interview” strategy was used for the analysis which is done from the semiotic perspective for teaching and learning mathematics developed by Sáenz-Ludlow and Zellweger, based on Charles Sanders Peirce’s triadic sign theory. As a final statement, we stress the importance of carefully formulating the statements when designing tasks and suggest that it is possible to take advantage of these to achieve meaningful learning.

KEYWORDS:
Task statement; semiotic mediation; geometry.

Recibido: 1 de junio de 2020, Aceptado: 6 de agosto de 2020

1. Introducción

Uno de los intereses del grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), desde hace más de quince años, es determinar rasgos característicos de ambientes de aprendizaje para la geometría escolar mediados por artefactos, que propicien el razonamiento y la construcción de significado, meta de los currículos actuales de diversos países. En 2015, adelantamos un proyecto[1] de desarrollo e investigación en un colegio rural del cual no éramos profesoras. En las clases de geometría de séptimo grado implementamos un currículo diseñado por nosotras y apoyado en el uso de un *software* de geometría dinámica. Además de preparar un conjunto de tareas encaminadas a promover la construcción de significado del objeto geométrico punto medio y favorecer el desarrollo del razonamiento, observamos el proceso de las tareas por parte de los estudiantes y acompañamos a los profesores en la gestión de las clases.

El diseño de las tareas estuvo orientado principalmente por una perspectiva semiótica del aprendizaje, que destaca el papel de la interpretación de quienes participan en el acto comunicativo. Desde nuestro punto de vista, en la construcción discursiva que los estudiantes tenían que hacer era fundamental que tuvieran disponibles los enunciados de las tareas y pudieran recurrir a ellos a voluntad. Optamos entonces por entregarles los enunciados por escrito, de tal modo que los estudiantes tuvieran que hacer una interpretación inicialmente libre de la influencia de la comunicación con el profesor. Consideramos que contar con la propia interpretación del estudiante sobre la situación planteada y lo que se pregunta o solicita, en la medida en que aquella hace parte de una construcción interactiva de significado, es fundamental para el trabajo del estudiante y para entender su producción. En la elaboración de los enunciados subyace una hipótesis sobre cómo suponíamos que estos promoverían la interpretación y contribuirían a la construcción de significado.

La evidente diferencia entre las interpretaciones previstas y las provisionales, que cada estudiante construyó al enfrentar la lectura del enunciado de las tareas, llamó nuestra atención sobre la complejidad inherente a la formulación de los enunciados de las tareas para la interpretación que pretendíamos. Esta situación se constituyó en el problema que abordamos en este artículo. Aunque éramos conscientes de la obvia imposibilidad de lograr que las tareas tuvieran el mismo efecto de mediación semiótica en todos los estudiantes y que este fuera el previsto, no anticipamos varios de los elementos que podrían influir las interpretaciones de los estudiantes.

Nuestro objetivo en este artículo es analizar la mediación semiótica que los enunciados de dos tareas "ejercieron" sobre la construcción de significado en la que se involucró un estudiante al resolver las tareas con la mínima ayuda interpretativa del profesor, en contraste con la respectiva mediación semiótica prevista. No queremos sugerir que exista la formulación "perfecta" de enunciados que garantice la interpretación pretendida por el profesor. Nuestra finalidad comunicativa es alertar sobre la necesidad de tomar decisiones informadas respecto a los enunciados de las tareas, decisiones que consideren la viabilidad de la generación de interpretaciones útiles para la interacción del estudiante con el profesor y sus compañeros y, por tanto, eviten trabas innecesarias que podrían obstaculizar la construcción colectiva de significado.

Para profundizar en el papel mediador de las tareas se han empleado diversas aproximaciones pedagógicas, cognitivas y comunicacionales. Por ejemplo, Sullivan, Clarke y Clarke (2009) se enfocan en el papel de la tarea en la relación pedagógica enseñanza-aprendizaje; Camelo (2010) analiza las características de los enunciados que orientan a los estudiantes hacia la meta de la tarea; Özgeldi y Esen (2010) estudian las oportunidades que brindan las tareas para pensar; y Morgan, Tang y Sfard (2011) se centran en la estructura y el lenguaje de los enunciados y su relación con las dificultades que tienen los estudiantes para comprender las tareas. En tales estudios se destaca el innegable papel de las tareas en la construcción de significado. No obstante, en la investigación en Educación Matemática sobre las tareas, parece haber un vacío relativo a los rasgos textuales del enunciado que influyen en la posibilidad de que este medie semióticamente de manera útil las interpretaciones de los estudiantes, para que ellos puedan dilucidar los aspectos del objeto matemático de aprendizaje que la tarea pretende sacar a la luz, y así puedan ir construyendo significados personales del objeto, encaminados hacia los significados que son meta de la enseñanza.

[1] *Geometría: vía al razonamiento científico (DMA-399-2015), proyecto financiado por el Centro de Investigación de la Universidad Pedagógica Nacional.*

2. Fundamentos teóricos

2.1 Aprendizaje y perspectiva semiótica

Fundamenta nuestra propuesta la idea de aprendizaje de las matemáticas como construcción[2] de significado de objetos matemáticos, producto de la interacción comunicativa. En la Educación Matemática, autores como Godino y Batanero (1994), Radford (2000) y Contreras y García (2011) coinciden en que el propósito de la construcción de significado es la búsqueda de compatibilidad entre las interpretaciones personales de los hechos (significado personal) y las de la comunidad cultural de referencia (significado institucional).
Además de aceptar que la convergencia del significado personal hacia el institucional debe guiar la construcción de significado en el aula, entendemos que el significado institucional de un objeto matemático integra consensos de interpretaciones sobre el objeto construidas histórica y culturalmente a través de la actividad intelectual de profesionales del discurso matemático, entendido este de acuerdo con Sfard (2008a). En cambio, el respectivo significado personal es la integración subjetiva, parcial y provisional de interpretaciones que el individuo va construyendo durante su experiencia escolar –en la interacción académica y social con sus compañeros y con la mediación semiótica de las tareas matemáticas y del profesor– pero también fuera de su vida escolar. Este planteamiento nos sugiere que para rastrear el proceso de construcción de significado en el aula es pertinente una perspectiva semiótica que destaque el papel de la interpretación de quienes participan en el acto comunicativo. Por esta razón recurrimos a la perspectiva que desarrollan Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012) basándose en la teoría del signo triádico de Peirce, quien considera la semiosis como una actividad de comunicación o de pensamiento en la que se crean, interpretan y recrean signos.

En la comunicación verbal (oral o escrita) no hay un paso directo de las ideas emitidas a través de signos a los mensajes recibidos e interpretados mediante los signos del receptor, ni de estos al mensaje que se emite en respuesta. El acto comunicativo pasa por la interpretación de quienes participan en el mismo, y es en esta donde cada uno construye y refina sus significados personales. En una cadena de actividad semiótica de producción e interpretación de signos, emisor y receptor construyen significados a través de sus propios procesos de interpretación (Sáenz-Ludlow y Kadunz, 2016). Por tanto, el significado no es independiente de la mente (i. e., no reside en los signos) y el aprendiz no es un receptor pasivo sino un constructor autónomo de significado (Sfard, 2001). El aporte distintivo de Peirce a la tradicional noción de signo, visto como la relación entre una representación y un significado único de esta, está en la inclusión de la mente que interpreta. Esta inclusión destaca que la comunicación no es un proceso in-mediato, que permita pasar directamente un determinado mensaje de una persona a otra con significados supuestamente “objetivos” y asociados a aquellos hechos en los que se enfocan los signos. Por el contrario, en la comunicación las personas ponen en juego su subjetividad al ir construyendo su significado personal de los signos que perciben.

De acuerdo con la perspectiva descrita, concretamos nuestra visión de construcción de significado en el aula de clase formulándola como un proceso de interpretación intra e interpersonal mediado semióticamente, que busca la convergencia de los significados personales de los estudiantes, evidenciados en la comunicación, hacia significados institucionales pretendidos. Las interpretaciones se van transformando en el curso de un proceso semiótico que podría no terminar en la medida que el estudiante siga trabajando al respecto.

2.2. Mediación semiótica del enunciado de una tarea

En este artículo, y en el marco de la realización de tareas asignadas a los estudiantes, definimos[3] *mediación semiótica ejercida por el enunciado de una tarea escolar* (desde ahora, mediación semiótica del enunciado) como los rasgos textuales particulares del enunciado de la tarea que viabilizan la interpretación de los objetos matemáticos, que son la meta de la enseñanza, por parte de los estudiantes y que, desde la perspectiva de quien diseña la tarea, fomentan la convergencia de los significados personales hacia los institucionales, es decir, la construcción de significado.

En el momento de planear la enseñanza y crear o seleccionar y adaptar tareas para promover la construcción de significado, el profesor tiene la oportunidad de prever la mediación semiótica de los enunciados de las tareas, identificando qué efecto podrían tener en las interpretaciones que hagan los estudiantes. Y cuando los estudiantes resuelvan la tarea, puede estudiar el efecto logrado por el enunciado y apoyarlos semióticamente al

[2] *Para una descripción detallada del proceso de construcción de significado, consultar Camargo, Perry, Samper y Molina (2015).*
[3] *Esta definición se corresponde con la que formulamos para mediación semiótica del profesor en Camargo et al. (2015).*

interactuar con ellos. En ese sentido, relativos a las tareas, distinguimos y conceptualizamos dos tipos de mediación semiótica:

- **Mediación potencial del enunciado de una tarea:** refiere a rasgos textuales del enunciado de una tarea, respecto a los cuales se conjetura un efecto relevante en la semiosis de los estudiantes relacionada con el significado, cuya construcción pretende el profesor. Cuando el profesor estudia el enunciado, imagina cómo puede ser interpretado por sus estudiantes y anticipa de qué manera rasgos textuales particulares del enunciado pueden promover la evolución de significado.

- **Mediación real del enunciado de una tarea:** refiere a rasgos textuales del enunciado de una tarea que tienen un efecto relevante en la semiosis de los estudiantes relacionada con el significado, cuya construcción pretende el profesor. Junto con la mediación semiótica del profesor, genera cambios en las sucesivas interpretaciones y, en últimas, una evolución de estas hacia los significados institucionales pretendidos.

La diferencia entre lo que el profesor interpreta y cree que los estudiantes interpretarán y lo que ellos interpretan es discutida por Johnson, Coles y Clarke (2017), pero no desde el punto de vista semiótico sino pedagógico. En este artículo nos enfocamos en la mediación semiótica potencial y real de los enunciados de las tareas, en el contexto de tareas que buscan promover el razonamiento científico de estudiantes de nivel escolar. En ese caso, las tareas posibilitan la enunciación de un hecho, su aceptación como resultado de una exploración empírica y el uso del hecho en la justificación de una conjetura.

3. Metodología

Con una perspectiva interpretativa de investigación cualitativa, y empleando una estrategia de "entrevista basada en tareas" (Goldin, 2000), presentamos en este artículo inicialmente un análisis preliminar de la mediación semiótica potencial de los enunciados de dos tareas específicas, articuladas en una secuencia didáctica. Luego, nos centramos en la mediación semiótica real de ambos enunciados, identificada mediante el estudio de un caso. Para ello rastreamos, en el proceso de resolución de las dos tareas por parte de un estudiante (Andrew), las interpretaciones que él hace de los enunciados en presencia de una profesora-investigadora (PI) y establecemos una relación con los significados pretendidos. A continuación, presentamos tres momentos de la estrategia investigativa implementada:

Momento 1: Diseñamos y caracterizamos la secuencia didáctica en la que se incluyen las dos tareas cuyos enunciados analizamos en este artículo. La secuencia fue discutida con la profesora titular del curso y el equipo de profesores de matemáticas de la institución. Dado que la institución había sido dotada con tabletas que tenían instalado el programa GeoGebra, cada estudiante podía disponer de una en las clases de geometría. Como la profesora no tenía experiencia en su uso, consideró oportuno que el equipo de investigación diseñara la secuencia.

Momento 2: Analizamos la mediación semiótica potencial del enunciado de las tareas. Para ello, como herramienta analítica, nos basamos en tres elementos del marco de referencia sugerido por Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012), descritos en la Tabla 1. El enunciado de cada tarea se constituyó en la unidad de análisis. En cada uno identificamos, no necesariamente en este orden: (i) el *Objeto Real Matemático* implícito en el intercambio comunicativo, cuya construcción discursiva era la pretendida, (ii) los aspectos específicos sobre los que se buscaba que el enunciado mediara, *objetos inmediatos*, y que se codificaron en *signos vehículos* y (iii) los *signos vehículos* presentes en cada enunciado. Cada uno de los elementos señalados fue caracterizado en términos de rasgos textuales del enunciado que consideramos que influyen en la posibilidad de que este medie semióticamente, tales como la generalidad del contexto matemático al que alude, elementos centrales de la relación que se espera que descubran los estudiantes y aspectos icónicos y simbólicos que intervienen. También explicitamos lo que consideramos que podrían ser interpretaciones de los estudiantes y de su actividad matemática.

Tabla 1

Herramienta analítica para el análisis de enunciados de tareas

Categoría	Descripción	Código
Objeto Real Matemático	Construcción social, cultural e histórica asumida por la comunidad profesional del discurso matemático (i. e., conocimiento procedimental, conceptual y actitudinal).	ORM
Signo vehículo	Gesto, palabra, gráfico, imagen que explicita lo que se quiere comunicar.	sv
Objeto inmediato	Aspecto específico del Objeto Real Matemático codificado y expresado en un signo vehículo.	oi

Fuente: Elaboración propia.

Momento 3: Rastreamos la mediación semiótica real de los enunciados, en el proceso de resolución de las tareas hechas en clase por parte de algunos estudiantes, cuando enfrentaron la tarea individualmente. Los estudiantes observados se seleccionaron al azar y no tenían una condición particular especial. Los miembros del equipo de investigación, que actuaron como observadores participantes, optaron por interactuar con quien estuviera cerca durante la realización de la tarea. Una de las investigadoras era observadora (participante) del estudiante Andrew, el caso que reportamos aquí, durante el trabajo individual. Andrew era un estudiante que participaba con regularidad en la clase, estaba dispuesto a interactuar con sus compañeros y a explicarles cuando veía la necesidad de hacerlo. Las condiciones de espacio y tiempo del trabajo de Andrew fueron las mismas que las de sus compañeros. Por falta de espacio no podemos reportar la resolución de la tarea de todos los estudiantes observados. De aquí que optamos por reportar el trabajo de Andrew, por considerar que es ilustrativo de las ideas que queremos señalar.

Para hacer el análisis nos valimos de la videograbación de la interacción de la investigadora con Andrew, la cual transcribimos en su totalidad, y acompañamos con información obtenida por la observadora y con la producción escrita de Andrew. En el ejercicio, empleamos nuevamente las categorías indicadas en la Tabla 1. Cabe aclarar que el análisis de la mediación semiótica real de los enunciados corresponde solo al momento cuando Andrew enfrenta la tarea individualmente, razón por la cual solo informamos sobre la resolución de la tarea.

4. Análisis y resultados

4. 1. Tareas

En la Tabla 2 presentamos las tareas previstas para propiciar el razonamiento científico. Están articuladas en la medida que la primera posibilita llegar a la enunciación de un hecho geométrico que se aceptará como resultado de una exploración empírica en GeoGebra, pero sin una justificación teórica por no contar con el contenido geométrico para hacerla, mientras que la segunda propende por generar una conjetura y justificarla deductivamente, usando el hecho geométrico descubierto y enunciado en la primera tarea.

Tabla 2

Tareas previstas para propiciar el razonamiento científico

1) Con GeoGebra

a) Representa cualquier ΔABC. Sea D punto medio del $\overline{\mathrm{AB}}$ y E punto medio del $\overline{\mathrm{AC}}$. Construye el $\overline{\mathrm{DE}}$.

b) Busca una relación especial entre DE[4] y BC. Describe cómo la encontraste.

c) Escribe cuál es la relación que existe.

2) ¿Existe un punto F en $\overline{\mathrm{BC}}$ tal que el perímetro del $\Delta\mathrm{DEF}$ sea la mitad del perímetro del ΔABC? Justifica tu respuesta.

Para responder la pregunta, recuerda:

Definición. El **perímetro de un triángulo** es la suma de las medidas de las longitudes de los lados del triángulo.

Fuente: Elaboración propia.

Después de tener la producción relativa a la primera tarea, la profesora promueve una revisión pública de los aspectos que considera relevantes en las producciones de los estudiantes e institucionaliza el Hecho Geométrico (*HG*) descubierto:

HG Puntos medios en triángulo. Si un segmento tiene extremos en los puntos medios de dos lados del triángulo, entonces su longitud es la mitad de la longitud del tercer lado.

La resolución de las dos tareas ofrece la posibilidad de vivir una experiencia de razonamiento científico enfocada principalmente en: (i) la enunciación del hecho geométrico descubierto en la primera tarea, y (ii) el uso de tal hecho en la justificación de la conjetura surgida al resolver la segunda tarea.

4.2. Mediación semiótica potencial del enunciado de las tareas

El siguiente es un análisis de la mediación semiótica potencial del enunciado de las tareas. En este, empleamos las categorías propuestas en la Tabla 1.

Tarea 1

El *ORM* (geométrico) implícito en la primera tarea es la propiedad que tienen los puntos medios de los lados de un triángulo (en términos de la longitud del

[4] *DE representa la medida de longitud del segmento DE.*

segmento que los tiene por extremos), hecho al que nos referimos como *Puntos medios en triángulo*. Son dos aspectos de este objeto los que pretendemos que los estudiantes construyan discursivamente: uno, la relación entre las medidas de longitud del lado de un triángulo y del segmento cuyos extremos son los puntos medios de los otros dos lados (oi_1); dos, el enunciado condicional general que establece el hecho descubierto (oi_2).

Para mediar la construcción del primer aspecto (oi_1), el enunciado de la tarea presenta dos signos vehículo. Uno, las instrucciones dadas para lograr una imagen gráfica de la situación. Dos, la solicitud para indicar en qué enfocar la búsqueda:

- sv_1: "Con GeoGebra, representa cualquier ΔABC. Sea D punto medio del $\overline{\mathrm{AB}}$ y E punto medio del $\overline{\mathrm{AC}}$. Construye el $\overline{\mathrm{DE}}$". (Ítem 1a)

- sv_2: "Busca una relación especial entre DE y BC". (Ítem 1b, primera parte)

Con el sv_1, el enunciado de la tarea alude indirectamente a un contexto (i. e., cualquier triángulo) y a elementos protagónicos en la relación que habrá de descubrirse (i. e., puntos medios y segmento cuyos extremos son aquellos puntos). En este sv_1 hay una fuerte componente simbólica, aunque también una componente icónica en la notación de segmento y de triángulo. Con el sv_2, el enunciado alude a otro elemento protagónico (las medidas) y a la existencia de una relación que el estudiante debe descubrir. Así, interpretados por los estudiantes, los signos vehículo los podrían llevar a: realizar una construcción en GeoGebra, hacer alguna exploración empírica y establecer una comparación entre medidas con la intención de encontrar la relación. En el caso del sv_2, sin duda predomina el componente simbólico, es decir, la asociación convencional de la notación geométrica y del término "relación" a los objetos que representan.

La situación geométrica expuesta por el enunciado de la tarea se puede ver en uno de dos niveles de generalidad: (i) un triángulo cualquiera que, una vez representado, constituye **el** triángulo particular que se examina para detectar y formular una relación entre los elementos de interés, y sobre **el cual** se predica; es decir, se trata de un triángulo arbitrario, pero particular, de cuyo examen se obtiene una relación geométrica particular expresada con uno u otro nivel de abstracción numérica (e. g., 12 es dos veces 6 –foco en el procedimiento– o este número es el doble de este –foco en la relación–); (ii) un triángulo cualquiera que representa a **todos** los triángulos posibles en lo que respecta a la relación buscada; es decir, se trata de un triángulo arbitrario y genérico, de cuya exploración empírica se obtiene un indicio de una relación general. Así, la relación a la que podría llegar un estudiante podría referirse a un triángulo particular o a todos los triángulos.

Dependiendo de cuál sea el nivel de generalidad que la mediación semiótica del enunciado provoque, la exploración podría consistir en la toma de la medida de longitud de los dos segmentos de interés y la consideración de un solo triángulo o de varios. Si se explora en un solo caso, el examen o la comparación del par de medidas podría conducir o no a identificar una relación según los números que estén puestos en juego y a la familiaridad del estudiante con dichos números. Por ejemplo, si las medidas fueran 6 y 12 o 6,74 y 13,48, sería posible que el estudiante reconociera la relación en el primer caso y no en el segundo. Si la exploración se hace pensando en un triángulo genérico, habría tres procedimientos posibles: (i) a partir del primer triángulo considerado, formular una hipótesis sobre la relación, y ponerla a prueba considerando otros triángulos logrados mediante el arrastre; (ii) usando el arrastre, considerar varios triángulos para obtener por inducción una conjetura sobre la relación; (iii) construir varios triángulos (e. g., uno de cada tipo: isósceles, equilátero, rectángulo, acutángulo, obtusángulo) y comparar los resultados obtenidos.

Los ítems (b, segunda parte) y (c) de la Tarea 1 median semióticamente la enunciación del hecho descubierto (oi_2). Identificamos dos signos vehículo:

- sv_3: "Describe cómo la encontraste [la relación especial]." (Ítem b, segunda parte)

- sv_4: "Escribe cuál es la relación que existe." (Ítem c)

El sv_3 podría producir interpretaciones personales más o menos detalladas respecto al propósito de la tarea. Los estudiantes podrían, por ejemplo, evocar apenas la toma de medidas de los segmentos involucrados. O de manera más completa, el signo vehículo podría sugerir, además, la comparación entre dichas medidas en busca de una regla que permita, por ejemplo, expresar una medida en términos de la otra. Pero una interpretación acorde con la solicitud de describir cómo se obtuvo la relación no puede desconocer los pasos iniciales a través de los cuales se creó la situación en la que se llevó a cabo la exploración con la medida; es decir, una interpretación más precisa, mejor encaminada a lograr un significado más acorde con lo que se pretende debería incluir la construcción realizada en GeoGebra.

Por su parte, el *sv*$_4$ también puede evocar interpretaciones más o menos detalladas con respecto al propósito de la tarea. Los estudiantes podrían, por ejemplo, tener la idea de una relación entre los números específicos involucrados, o entre los números específicos, nombrados por medio de las respectivas notaciones. Una tercera interpretación los podría llevar a hacer referencia al caso general nombrándolo o no (e. g., cualesquiera sean BC y ED, ED es la mitad de BC; el segmento cuyos extremos son los puntos medios de dos lados mide la mitad del tercer lado). Pero una interpretación que apunte realmente a enunciar la relación en cuestión no puede dejar de lado la mención del contexto en el que ocurre la relación (i. e., el triángulo) ni tampoco la mención de las condiciones bajo las cuales ocurre la relación (i. e., los extremos del segmento que se compara con un lado del triángulo son los puntos medios de los otros dos lados del triángulo).

Tarea 2

En la segunda tarea se formula una pregunta: "¿Existe un punto F en BC tal que el perímetro del $\Delta\mathrm{DEF}$ sea la mitad del perímetro del ΔABC?", y además se pide justificar la respuesta dada a ella. Interpretar la pregunta requiere conectarla con la primera tarea; así, la contextualización tácita de la pregunta involucra un triángulo cualquiera dado y los puntos medios de dos de sus lados. En consecuencia, la pregunta expresada de manera completa incluye dos signos vehículo:

- *sv*$_5$: [En un ΔABC cualquiera, D y E son los puntos medios de los lados $\overline{\mathrm{AB}}$ y $\overline{\mathrm{AC}}$, respectivamente.] "¿Existe un punto F en $\overline{\mathrm{BC}}$ tal que el perímetro del ΔDEF sea la mitad del perímetro del ΔABC?"
- *sv*$_6$: "Justifica tu respuesta."

Una respuesta deseable para la pregunta formulada en el *sv*$_5$, es decir, una que afirme la existencia del punto y lo caracterice geométricamente, podría ser la base para llegar a enunciar la conjetura: "En un ΔABC cualquiera, D y E son los puntos medios de los lados $\overline{\mathrm{AB}}$ y $\overline{\mathrm{AC}}$, respectivamente. Si F es el punto medio de $\overline{\mathrm{BC}}$, entonces el perímetro del ΔDEF es la mitad del perímetro del ΔABC". Sin embargo, puesto que *sv*$_5$ no refiere a una conjetura ni solicita su enunciación, su papel es apenas mediar la presentación de la situación geométrica que enfoca la relación de dependencia entre los puntos medios de los lados de un triángulo cualquiera y una relación entre el perímetro de dicho triángulo y el del triángulo determinado por los puntos medios.

De otro lado, y como principal intención didáctica de la tarea, el *sv*$_6$ solicita la justificación de la relación descubierta, con lo cual dicha justificación teórica se constituye en el *ORM* de la segunda tarea. Específicamente, el aspecto de este objeto, cuya construcción de significado se pretende que los estudiantes inicien con el desarrollo de la segunda tarea, es el hecho geométrico *Puntos medios en triángulo* en su calidad de garantía en la justificación de otro hecho geométrico (*oi*$_3$). Bajo el supuesto de tener ya una conjetura respecto a qué punto "especial" del $\overline{\mathrm{BC}}$ cumple la condición mencionada de los perímetros, la justificación solicitada en la tarea consiste en la argumentación deductiva para concluir que tal punto cumple la condición. Así que, siendo el punto medio del $\overline{\mathrm{BC}}$ el punto especial identificado, la argumentación podría ser algo como lo siguiente: Si F es el punto medio del BC, como D y E son los puntos medios de los otros dos lados del ΔABC, las medidas DE, EF y FD son respectivamente la mitad de las medidas CB, BA, AC gracias al hecho geométrico *Puntos medios en triángulo*. Así que $\mathrm{DE}+\mathrm{EF}+\mathrm{FD}=1/2\,(\mathrm{CB}+\mathrm{BA}+\mathrm{AC})$. Como $\mathrm{DE}+\mathrm{EF}+\mathrm{FD}$ es el perímetro del ΔDEF y $\mathrm{CB}+\mathrm{BA}+\mathrm{AC}$ es el perímetro del ΔCBA, se tiene que el perímetro del ΔDEF es la mitad del perímetro del ΔCBA. Las garantías de las afirmaciones segunda y tercera son propiedades del sistema numérico.

4.3. Rastros de la mediación semiótica real de los enunciados

Tarea 1

Andrew interpreta el *sv*$_1$ como estaba previsto, salvo por dos hechos. Primero, usa la herramienta Triángulo y, como queda representada una región triangular, PI le pide que rehaga la construcción usando la herramienta Segmento. Andrew atiende la solicitud.

Segundo, respecto a la instrucción "Construye el $\overline{\mathrm{DE}}$", le pregunta a PI si se trata de un segmento o de una recta. PI le indica que esa es la notación de segmento. Andrew completa la representación de la situación. La mediación semiótica del enunciado para llegar a una imagen gráfica de la situación se ve interferida por los significados personales que Andrew atribuye a las notaciones ΔABC y $\overline{\mathrm{DE}}$. Pese a que tales notaciones tienen, como se dijo ya, una fuerte componente icónica y, además, se precisaron en la clase al introducir las respectivas nociones, al parecer, Andrew aún no ha logrado la familiaridad requerida para distinguir entre las imágenes figurales de triángulo y región triangular, y para reconocer lo que designa la notación $\overline{\mathrm{DE}}$; así que los respectivos significados personales de Andrew difieren de los institucionales.

Luego, respecto a *sv*$_2$, Andrew observa detenidamente la representación que tiene en la pantalla y propone:

"Una relación [entre DE y BC] sería que ambos son segmentos". Es decir, Andrew se enfoca en segmentos, lo cual puede haber sido inducido sin intención alguna por el énfasis en segmentos que quizá percibió durante la construcción en GeoGebra: la solicitud de usar la herramienta Segmento para construir el triángulo, cuando él lo había hecho con la herramienta Triángulo, y la aclaración de que lo que se le pedía construir era el segmento DE y no la recta DE.

Inferimos que para el estudiante el término "relación" significa asociación o conexión entre dos objetos, y que las dos notaciones $\overline{ED}$ y ED probablemente refieren de manera indistinta al mismo objeto (i. e., al segmento ED); así lo corrobora su lectura del enunciado en voz alta: "punto medio del AB" y "relación especial entre DE y BC". En el proceso de construcción discursiva del *ORM*, posiblemente estamos ante la interpretación personal de Andrew: *una conexión o asociación entre dos de los elementos de la figura que tiene en la pantalla es la relación de pertenencia a la misma clase, la de los segmentos*. Esta interpretación es poco consistente con el objeto inmediato pretendido (oi_1), que enfoca una relación entre las medidas de dos segmentos y no entre los segmentos mismos. Se evidencia entonces que la construcción de significado le exige al estudiante poder interpretar adecuadamente no solo el término "relación", sino también las notaciones geométricas $\overline{XY}$ y XY , con X e Y puntos del plano.

Con la mediación semiótica de PI, en la que no nos detenemos en este artículo pero que mencionamos porque nos revela la necesidad de hacer ajustes al enunciado, Andrew avanza en la construcción de significado hacia identificar la notación ED como una forma de referirse a la distancia entre los puntos E y D o a la medida del segmento ED. Una vez aclarada la notación, Andrew decide tomar medidas, observa los números obtenidos y propone una nueva relación afirmando que DE es la mitad de BC. Detalles de la interacción correspondiente a esta mediación, así como de los avances de Andrew en la construcción de significado de la relación se encuentran en Perry, Camargo y Samper (2019). En particular, son notorios los esfuerzos de PI para que Andrew traspase la especificidad en la relación que propone, pues el estudiante se limita a considerar solo el caso que tiene representado en la pantalla. Esto nos lleva a advertir que el enunciado no aportó suficientes elementos para la mediación esperada y que se requiere un esfuerzo específico en la construcción de significado de lo que es una "relación geométrica", antes de pedir encontrarla, presuponiendo que los estudiantes ya le dan un sentido de generalidad al término "relación".

Los signos vehículos sv_3 y sv_4 no son interpretados por Andrew de manera autónoma, sino con la mediación semiótica de PI. Vistos en retrospectiva, los ítems (b, segunda parte) y (c) del enunciado no aportan elementos suficientes para mediar semiótica y productivamente la construcción discursiva del aspecto mencionado, pues no precisan convenientemente qué es lo que hay que hacer. Fue responsabilidad completa de PI mediar semióticamente en la construcción de significado de esta parte del enunciado. Gracias a la mediación semiótica de PI, Andrew y ella construyen entre ambos un relato que precisa qué se hizo y cuál fue el resultado encontrado para el caso del hecho geométrico que hemos llamado *Puntos medios en triángulo*.

El complejo camino seguido por PI y Andrew en su interacción para llegar a este relato quizá podría allanarse si el enunciado de la Tarea 1 se complementara con otros dos ítems (que llamaremos d y e).

- (d) El hecho geométrico descubierto permite deducir algo, es decir, obtener algo como conclusión segura, a partir de una cierta condición que se debe tener inicialmente. Explica esto con varios ejemplos, indicando cuál es la condición inicial que se tiene dada y cuál la conclusión que se obtiene. (Si se pidiera un solo ejemplo, quizá eso predispondría para que la respuesta a la siguiente tarea se diera en términos particulares y causaría dificultades su uso en otras situaciones).

-(e) Expresa el hecho geométrico descubierto usando el siguiente formato:

"Si (se tiene ...) entonces (con seguridad se cumple ...)".

Tarea 2

Para comenzar a abordar la segunda tarea, Andrew lee la definición de perímetro de un triángulo. PI le pregunta si la conoce y él responde afirmativamente. Enseguida, Andrew lee el enunciado de la tarea (sv_5) y, tras unos segundos de silencio, responde: "Depende... Si F es punto medio de BC... **sí** es punto del segmento BC, si es punto medio" (énfasis agregado). Esta respuesta de Andrew, a partir de la cual podríamos pensar que el enunciado de la tarea cumple su función mediadora porque dirigió la atención del estudiante al punto medio del segmento BC (punto que efectivamente da lugar a la relación solicitada entre los perímetros), examinada con más cuidado nos permite ver que él no hace alusión alguna a la condición sobre los perímetros. Más bien, podría estar concentrado en la primera parte de la pregunta, "¿Existe un punto F en el segmento BC?", y lo que estaría diciendo es que el punto medio del segmento BC efectivamente es un punto de tal segmento. En ese sentido, esta parte del enunciado de la Tarea 2 no aporta suficientes elementos para mediar semióticamente la construcción discursiva del aspecto mencionado. Quizá, la pregunta incluida en sv_5, "¿Existe un punto en… tal que…?", podría haber quedado mejor planteada como "¿Algún punto del… es tal que…?" en términos de lo que se puede esperar como justificación de la respuesta. Como quedó formulada, tal como le sucedió a Andrew, los estudiantes pueden interpretar que se les está pidiendo que justifiquen si existe o no el punto. En cambio, en la pregunta que proponemos como alternativa, parece más claro que el foco de la justificación está en mostrar que el punto identificado cumple la condición. Pensar en las siguientes preguntas puede ayudar a entender el punto que sugerimos: ¿Por qué existe un punto que …? ¿Por qué algún punto (el que identificó) cumple con …? ¿Por qué dices que existe el punto que …?

Quizá entreviendo una interpretación inapropiada de sv_5 por parte de Andrew, PI lo "parafrasea" diciendo que él está haciendo la hipótesis de que el punto medio del segmento BC es el punto que busca. Como el estudiante está de acuerdo con el parafraseo hecho, PI lo anima a explorar esa hipótesis en GeoGebra. Él lleva a cabo entonces un experimento. Comienza por obtener una imagen gráfica de la situación que va a explorar, completando la representación hecha en la Tarea 1 (Figura 1), toma las medidas de los segmentos FD y FE y, puesto que no sabe cómo calcular en GeoGebra la suma de las medidas, PI le sugiere que con el arrastre obtenga segmentos de medidas enteras para facilitar el cálculo a mano. Para el caso considerado obtiene que el perímetro del ΔABC es 39,18 y el del ΔDEF es 19,60. Verbaliza el valor correspondiente a la mitad del primer número obtenido, 19,59, expresando cierta desilusión pues los valores obtenidos no están exactamente en la razón 2 a 1. Sin embargo, acepta las razones dadas por PI sobre la inexactitud de GeoGebra para reportar las medidas, considera verificada su hipótesis y regresa al enunciado de la tarea.

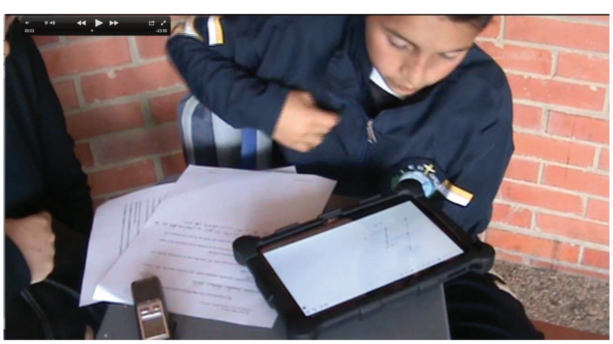

Figura 1. Imagen gráfica de la situación por explorar
Fuente: Archivo del proyecto

Al leer el sv_6, Andrew no sabe cómo proceder. No parece tener disponible un significado personal del término "justificar" y expresa no entender qué tiene que hacer. PI modifica oralmente el sv_6 de la siguiente forma, dirigiéndose a Andrew:

> - sv_6 (modificado): Explica por qué el perímetro del ΔDEF es la mitad del perímetro del ΔABC, sin usar medidas, solo con base en hechos geométricos ya conocidos… específicamente, el hecho geométrico que acabas de descubrir. ¿Cómo puedes justificar la relación entre esos perímetros? Decir algo como: "Ah, sí, tenía que ser así porque…". "El perímetro del más pequeño tiene que ser la mitad del perímetro del triángulo más grande porque…".

Este sv_6 (modificado) incluye varios elementos que ayudan a Andrew a entender el significado de "justificar". Uno, Andrew debe dar una razón (i. e., "explicar por qué…") y esta no puede basarse en algo empírico sino en algo teórico (i. e., "debes basarte en hechos geométricos ya conocidos"). Dos, se señala explícitamente cuál es el hecho geométrico que ha de usarse (i. e., "el hecho geométrico que acabas de descubrir"). Además, al proponer un tipo de frase como respuesta, PI le sugiere implícitamente la necesariedad (i. e., tenía que ser así, tiene que ser) de la conclusión que se pide justificar. Cabe anotar que con su manera de referirse a los triángulos en su última verbalización –descripción por su tamaño relativo– quizá pretende sugerir una manera rápida (que no exige la designación con letras) de aludir a los triángulos cuyos perímetros se están relacionando. La justificación que da Andrew, sin pensarla dos veces, es la condición de que los vértices del triángulo pequeño son los puntos medios de los lados del triángulo grande, por lo cual "el triángulo… va a estar en la mitad… del grande". Llegar a una justificación aceptable pasó por una mediación semiótica de PI que incluyó el volver a enunciar el hecho descubierto en la primera tarea y la sugerencia de usarlo para elaborar la justificación pedida. Gracias a esta mediación, la justificación que dio Andrew evolucionó en tres direcciones: pasó de ser una descripción a ser un argumento deductivo; la garantía que sustenta la conclusión pasó de ser un hecho en el mundo empírico a ser un hecho del mundo teórico y, por ende, la conclusión necesaria fue la prevista en la garantía empleada y no una inventada. (Detalles de esta mediación se encuentran en Perry et al., 2019).

Con el fin de eliminar ambigüedades en formulaciones como las de sv_6 e ir dando a los estudiantes claves sobre la acción de justificar en matemáticas, parece conveniente hacer la solicitud de justificar la respuesta de forma más explícita. Por ejemplo, si la respuesta de un estudiante fuera: "No sé si existe un punto como el descrito", ¿qué podría significar en ese caso justificar la respuesta? Y si fuera: "Sí existe y es el punto medio del segmento BC", y la justificación dada por el estudiante fuera: "Porque se cumple la condición de los perímetros", ¿se tendrían buenas razones para decir que dicha justificación de la respuesta no es buena o aceptable? Quizá si la solicitud fuera: "Explica por qué con el punto que mencionas se cumple lo relativo a los perímetros", se darían pistas más acertadas sobre lo que no sería aceptable como justificación, y de esa manera, se iría precisando el significado de justificar en el aula.

5. Discusión

Nuestro análisis de la mediación semiótica potencial y real del enunciado de las tareas nos lleva a considerar que algunas decisiones didácticas tomadas al formular los enunciados no fueron afortunadas para lograr la mediación semiótica de los enunciados de manera autónoma, por el estado de desarrollo de la participación de los estudiantes en el discurso geométrico. Esto llevó al investigador observador a mediar semióticamente.

Una de ellas tiene que ver con dar a los estudiantes por escrito y no oralmente los enunciados de las tareas que se les propusieron. Esta decisión tenía como principal intención impulsar su progreso en el lenguaje escrito del discurso, específicamente en el manejo de vocabulario y notación geométrica especializada, que "son necesarios para generar la comunicación matemática desde el inicio" (Sfard, 2008b, p. 62). La forma como se concretó esta decisión contribuyó a generar un desencuentro en la comunicación, que se evidenció cuando Andrew afirmó que "una relación sería que ambos son segmentos". La mediación de PI le permitió ver a Andrew que la pregunta no era sobre segmentos sino sobre medidas y así, reencauzó su respuesta rápidamente. ¿Se habría podido evitar dicho desencuentro o se quería generar una situación para que el estudiante notara la diferencia entre las dos notaciones, la de segmento y la de medida de longitud? Nuestra respuesta es que había tantos otros detalles en los cuales enfocar más urgentemente la atención durante la mediación semiótica, que se habría podido evitar el desencuentro. Se habría podido usar la notación y entre paréntesis escribir la manera como ella se debe leer. Si esta estrategia se usa durante algún tiempo, tanto en los textos del profesor como en los de los estudiantes, más temprano que tarde ellos terminan viendo la utilidad de usar adecuadamente los símbolos convenidos y actuando en consecuencia. Otra decisión didáctica de especial cuidado que se entrevé en el enunciado de la primera tarea está relacionada con el uso de la palabra "cualquiera". No hay duda de la importancia y necesidad de emplear los cuantificadores en el discurso matemático del aula. Sin embargo, no se puede perder de vista que precisamente por ser ellos términos del lenguaje cotidiano, requieren de precisiones hechas deliberadamente para que el estudiante pueda comenzar a usarlos de manera especializada.

En castellano, tal como lo precisa el Diccionario de la Real Academia Española, el término "cualquier/a" como adjetivo es indefinido y tiene tres acepciones: (1) Sinónimo de los adjetivos indefinidos *un* (expresa unidad) y *algún* (expresa que no se conoce aquello que denota el sustantivo al que modifica, o, usado en plural, una cantidad no relevante de entes designados por el sustantivo al que modifica); (2) expresa la totalidad del conjunto denotado por el nombre al que modifica, y se usa antepuesto a sustantivos contables en contextos genéricos; (3) expresa indeterminación cuando se usa pospuesto al sustantivo que modifica. A la luz de las precisiones hechas, podemos examinar el significado sugerido de las oraciones contenidas en la Tabla 2.

Tabla 2

Significado de algunas oraciones en las que se usa el término "cualquiera"

Represente gráficamente *cualquier* triángulo.	La referencia es a <u>un solo</u> triángulo, que bien podría tener condiciones especiales (e. g., un triángulo isósceles).
Al medir ese segmento obtendré *cualquier* número positivo.	El número positivo que es referencia <u>no se conoce</u>.
Cualquier triángulo equilátero es isósceles.	La referencia es a <u>todos</u> los triángulos equiláteros; el contexto muestra la genericidad de la idea.
Represente un triángulo *cualquiera*.	La referencia es a un triángulo que <u>no tenga condiciones especiales.</u>

Fuente: Elaboración propia.

Lo anterior pone de manifiesto que el uso del término en castellano está lejos de ser simple y depende en gran medida del contexto en el que se está hablando, condición esta que pone un problema especial cuando en el discurso matemático quien debe significar el término no necesariamente tiene claro el contexto en el que se sitúa lo dicho.

En el caso que nos ocupa, la manera de hacer referencia al objeto del que se habla –i. e., especificación– lleva naturalmente a enfocar la atención en un objeto particular. Solo cuando se establezca la correspondiente regla del nivel metadiscursivo, el estudiante entenderá que la solicitud es buscar una relación que se cumpla para todo triángulo. Una manera de empezar a construir la metarregla podría ser cambiar la instrucción "Representa **cualquier** triángulo [...] busca una relación especial entre DE y BC" por "Representa un triángulo ABC y busca una relación entre [...] que se cumpla en **todo** triángulo". Quizá así el estudiante, gracias a la mediación semiótica del enunciado, consideraría un triángulo sin condición alguna sobre sus lados y sus ángulos y quizá trascendería el nivel de lo específico y particular para pensar la relación, además de comenzar a dar significado a la idea de triángulo genérico.

Una tercera decisión tiene que ver con qué tanta guía y, sobre todo, qué tipo de guía, incluir en el enunciado de las tareas no rutinarias con miras a que los estudiantes, gracias a la mediación del enunciado, tengan la oportunidad de comenzar a pensar asuntos que posteriormente se retoman en la conversación del profesor con todo el grupo. En el caso que analizamos, es evidente que ambos enunciados fueron insuficientes para generar por sí solos la interpretación que logró Andrew con la mediación de PI. Con esto no queremos decir que la mediación del enunciado de una tarea pueda remplazar el efecto de la mediación semiótica del profesor; lo que sí creemos es que un enunciado demasiado abierto, para estudiantes que están apenas iniciándose en el discurso matemático, puede generar respuestas superficiales que se dan por salir del paso. Esa situación puede variar un poco si las instrucciones y preguntas que se les dan son más explícitas y tienen más guía, no para llevarlos a una respuesta predeterminada, sino para indicarles qué es lo que se les está pidiendo.

Teniendo en cuenta los análisis presentados para la Tarea 1, hemos formulado una nueva versión que consideramos que puede desempeñar un mejor papel como mediador semiótico:

1) Con GeoGebra, representa un $\Delta\mathrm{ABC}$ (triángulo ABC). Designa con D el punto medio del $\overline{\mathrm{AB}}$ (segmento AB) y con E el punto medio del $\overline{\mathrm{AC}}$ (segmento AC). Construye el $\overline{\mathrm{DE}}$ (segmento DE).

2) Busca una relación especial entre DE (medida de longitud del segmento DE) y BC (medida de longitud del segmento BC).

3) ¿Esa relación se cumple solo en el triángulo que representaste o se cumple en otros triángulos? ¿En algunos no se cumple?

4) Juan dice que en un triángulo no se cumple la relación porque DE (medida de longitud del segmento DE) es 6,02 y BC (medida de longitud del segmento BC) es 12,05. ¿Estás de acuerdo con Juan? Explica por qué.

5) Diana no está de acuerdo con Juan. Para explicar por qué no está de acuerdo con él, Diana usa el compás (o dobleces). ¿Cómo habrá usado ella el compás?

6) Designa con G el punto medio del $\overline{\mathrm{BC}}$ (segmento BC). Usando el compás físico o de GeoGebra, haz un experimento para mostrar que la relación entre las medidas de longitud de los segmentos EG y AC también se cumple para todos los triángulos.

7) En esta tarea has descubierto una propiedad importante. ¿Cuál?

8) Cuéntale por escrito al profesor de matemáticas de otro curso qué descubriste. Para ello no puedes usar figuras, es decir, en tu relato no puedes usar letras para designar aquello de lo que estás hablando; tienes que dar algún detalle que lo describa. Por ejemplo, en lugar de referirte al segmento AB podrías hablar de uno de los lados de un triángulo cualquiera.

9) El hecho geométrico descubierto te permite deducir algo (obtener algo como conclusión segura) a partir de una cierta condición que se debe tener inicialmente. Explica esto con varios ejemplos, explicitando cuál es la condición inicial que se tiene y cuál la conclusión que se obtiene.

10) Expresa el hecho geométrico descubierto usando el siguiente formato:
En un triángulo "si (se tiene ...) entonces (con seguridad se cumple ...)".

La tarea reformulada de esta forma pondría en discusión asuntos importantes en la construcción de significado del hecho geométrico, sobre los cuales los estudiantes pueden pensar y discutir, pero no necesariamente proponer. El éxito de la tarea no reside en que los estudiantes puedan resolverla perfectamente. Más bien está en la posibilidad de sacar a relucir sus significados personales sobre cuestiones que se discuten posteriormente con todo el grupo.

6. Conclusión

Con la presentación de este análisis, abrimos una línea de investigación que creemos que no ha sido explorada previamente: el potencial de mediación semiótica del enunciado de una tarea. Esperamos contribuir con ello a ampliar las miradas sobre el diseño de tareas para favorecer el aprendizaje en matemáticas.

La mediación semiótica de las tareas acompañada con la de PI permitieron a Andrew experimentar una rica actividad matemática. Al resolver la primera tarea, realizó: exploración empírica de una representación particular de la situación geométrica planteada, con miras a encontrar una relación especial; exploración empírica usando arrastre con medidas para averiguar si una cierta relación entre medidas se mantenía; enunciación del hecho geométrico descubierto. Al resolver la segunda tarea logró: una anticipación –una respuesta intuitiva– que inmediatamente expresó como una hipótesis relativa a un punto para el cual la condición de los perímetros se cumpliría; un experimento para verificar la hipótesis; el establecimiento de una conjetura; una justificación teórica de la conjetura, actividad toda esta muy cercana a la que Perry, Samper, Camargo y Molina (2013) denominan actividad demostrativa. No sobra decir que estas acciones no fueron realizadas en toda su dimensión como para poderlas considerar auténticas, no solo porque la participación de Andrew en cierta medida fue periférica, sino porque las acciones mismas no tuvieron el grado de desarrollo que sería deseable. Así que es necesario entenderlas como acciones de iniciación del estudiante en un aprendizaje de la actividad demostrativa.

En tareas no rutinarias para los estudiantes, como las analizadas, hay una considerable cantidad de elementos intrincados de los que depende la posibilidad de salir avante en su abordaje y desarrollo, sin que esto aluda necesariamente a la resolución ideal desde el punto de vista del profesor. Son tareas complejas para los estudiantes y para el profesor. No obstante, pueden propiciar el aprendizaje de las matemáticas, entendido, según la propuesta de Sfard (2008b), como la actividad de desarrollar un tipo especial de discurso, para lo cual es imprescindible una mediación semiótica consciente y persistente.

Referencias

Camargo, L., Perry, P., Samper, C., y Molina, Ó. (2015). Mediación semiótica en pro de la construcción de significado de *rayo* al hacer operativa su definición. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(3), 99-116. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1594

Camelo, M. (2010). Las consignas como enunciados orientadores de los procesos de escritura en el aula. *Enunciación, 15*(21), 58-67. https://doi.org/10.14483/22486798.3159

Contreras, Á., y García, M. (2011). Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(3), 277-310. Recuperado desde https://www.redalyc.org/pdf/335/33520716002.pdf

Godino, J., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355. Recuperado desde https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En A. Kelly, y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517-544). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Johnson, H., Coles, A., y Clarke, D. (2017). *Mathematical task and the student: Navigating "tensions of intentions" between designers, teachers, and students. ZDM, 49*(6), 813-822. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0894-0

Morgan, C., Tang, S., y Sfard, A. (2011). Grammatical structure and mathematical activity: Comparing examination questions. En C. Smith (Ed.), *Proceedings of the British Society into Learning Mathematics* (vol. 31, n.o 3, pp. 113-118). United Kingdom: Oxford University.

Özgeldi, M., y Esen, Y. (2010). Analysis of mathematical tasks in Turkish elementary school mathematics textbooks. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 2*(2), 2277-2281. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.322

Perry, P., Camargo, L., y Samper, C. (2019). *Puntos medios en triángulo:* un caso de construcción de significado personal y mediación semiótica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 22*(3), 309-332. https://doi.org/10.12802/relime.19.2233

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., y Molina, Ó. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper, y Ó. Molina (Eds.), *Geometría plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 11-34). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Revista Educación Matemática, 12*(1), 51-69. Recuperado desde http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol12/1/05Radford.pdf

Sáenz-Ludlow, A., y Kadunz, G. (2016). Constructing knowledge seen as a semiotic activity. En A. Sáenz-Ludlow, y G. Kadunz (Eds.), *Semiotics as a tool for learning mathematics. How to describe the construction, visualization, and communication of mathematical concepts* (pp. 1-21). Rotterdam: Sense Publishers.

Sáenz-Ludlow, A., y Zellweger, S. (2012, julio). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter- interpretation: A Peircean perspective. En *Pre-proceedings of the 12th International Congress of Mathematical Education (ICME12)*. Congreso llevado a cabo en Seúl, Corea.

Sfard, A. (2001). Equilibrar algo desequilibrado: los *Estándares del NCTM* a la luz de las teorías del aprendizaje de las matemáticas. *Revista EMA, 6*(2), 95-140. Recuperado desde http://funes.uniandes.edu.co/1125/1/73_Sfard2001Equilibrar_RevEMA.pdf

Sfard, A. (2008a). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourse, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511499944

Sfard, A. (2008b). Aprender matemáticas como la acción de desarrollar un discurso. En A. Sfard, *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional* (pp. 39-63). Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Sullivan, P., Clarke, D., y Clarke, B. (2009). Converting mathematics tasks to learning opportunities: An important aspect of knowledge for mathematics teaching. *Mathematics Education Research Journal, 21*(1), 85-105. https://doi.org/10.1007/BF03217539

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

https://doi.org/110.46219/rechiem.v12i3.35

FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA: CAPACIDAD DE ANÁLISIS DE PRÁCTICAS DOCENTES

PRE-SERVICE SECONDARY MATHEMATICS TEACHERS: ABILITIES FOR ANALYZING TEACHING PRACTICES

Daniela Araya-Román, damaarro2708@gmail.com
Universidad Estatal a Distancia, San José. Costa Rica

Yuri Morales-López, ymorales@una.cr
Universidad Nacional, Heredia. Costa Rica

RESUMEN

El objetivo principal de esta investigación fue analizar la incidencia del estudio de los criterios de idoneidad didáctica en la reflexión sobre prácticas docentes en futuros profesores de Matemáticas. La investigación es cualitativa con método de estudio de caso. Esta se realizó en el grupo de estudiantes durante el segundo semestre de 2018. El análisis de los datos se enfocó en la identificación y comparación de elementos referentes a distintos indicadores de idoneidad presentes en dos reflexiones realizadas por los participantes. Los resultados de la investigación muestran que, luego de estudiar algunas nociones teóricas del EOS y contar con una guía para realizar una práctica reflexiva, los participantes logran exponer ideas más claras y ordenadas, además de realizar justificaciones sobre sus juicios de valor. Se concluye que, en la primera fase, los participantes no contaban con las herramientas necesarias para realizar una práctica reflexiva, mientras que, en la segunda reflexión, hay evidencia sustancial para asegurar que, con el uso de una guía basada en los criterios de idoneidad del enfoque ontosemiótico, se favorece considerablemente el ejercicio de estudiantes que logran organizar sus ideas y prestan atención a una mayor cantidad de elementos de interés en Educación Matemática.

PALABRAS CLAVE:
Educación Matemática; formación de profesores; capacidad de análisis; idoneidad didáctica; reflexión guiada.

ABSTRACT

The purpose of this research was to analyze the impact of the study on didactic suitability criteria, in the reflection about teaching practices in pre-service mathematics teachers. The research is of a qualitative approach and uses the case study method. It was carried out with a group of students during the second half of 2018. The analysis of the data focused on the identification and comparison of elements referring to different indicators of suitability that were present in two reflections made by the participants. The results of the research show that, after studying some theoretical notions of the EOS and having a guide to perform a reflexive practice, participants manage to present clearer and more structured ideas, in addition to justify their value judgments. It is concluded that, in the first phase, the participants did not have the necessary tools to perform a reflective practice, while, in the second reflection, there is substantial evidence to affirm that, with the use of a guide based on the appropriateness criteria of the onto-semiotic approach, students succeed in organizing their ideas and are aware of a greater number of elements of interest in mathematics education.

KEYWORDS:
Mathematics education; teacher training; analytical ability; didactic suitability; guided reflection.

Recibido: 6 de julio de 2020, Aceptado: 14 de agosto de 2020

1. Introducción

Diversas investigaciones sobre el conocimiento que debe poseer el profesor de Matemáticas han sido de interés para la comunidad científica en Didáctica de las Matemáticas y de formación de profesores en los últimos años. En muchos de los estudios se refleja la tendencia por buscar cómo identificar cuáles conocimientos requiere el profesor de Matemáticas para enfrentar de manera adecuada su práctica y, dentro de los puntos de interés, se encuentra el desarrollo de competencias que permitan al futuro docente desarrollarse profesionalmente, "organizar la enseñanza, diseñar tareas de aprendizaje, usar los recursos adecuados y comprender los factores que condicionan la enseñanza y aprendizaje" (Godino, 2009, p. 14), pues tienen la responsabilidad de propiciar el conocimiento de sus estudiantes.

Particularmente, una de estas competencias es la del diseño y análisis didáctico, la cual considera la capacidad de analizar los procesos de enseñanza-aprendizaje, así como de sintetizar los conocimientos aportados por la Didáctica de las Matemáticas para el diseño, implementación y evaluación de la práctica docente (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2012).

Sobre la última mencionada (evaluación de la práctica), debe señalarse que puede lograrse mediante la práctica reflexiva, la cual es necesaria para la apropiación y adaptación de los conocimientos didácticos del profesor (Godino y Batanero, 2009), pues realizarla requiere tanto del dominio como de la aplicación de herramientas conceptuales y metodológicas para organizar las ideas. De hecho, Godino y Batanero (2009) señalan la importancia de realizar lo que se denomina "reflexión guiada", utilizando tanto el apoyo del formador, así como de una guía o guion que incluya un sistema de indicadores que permitan realizar un análisis crítico o reflexión de la práctica docente a profesores en formación o novatos.

Junto a esto, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la instrucción matemática (EOS), es un marco teórico que propone articular diferentes perspectivas y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, las cuales pueden ser vistas como herramientas de análisis y reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje (Godino, 2009). De esta manera, surge el interés por analizar la incidencia que tiene el estudio básico de algunas de sus nociones teóricas en el desarrollo de la capacidad de reflexión de las prácticas docentes en los futuros profesores de Matemáticas.

Se presentan, en este trabajo, los resultados obtenidos al llevar a cabo una actividad en la que se permite a los futuros profesores de Matemáticas realizar un primer acercamiento a lo que sería una reflexión sobre la práctica docente, evidenciando diferencias que se presentan al utilizar o no una pauta o guía para realizar la práctica reflexiva.

El objetivo es analizar la incidencia del estudio de los criterios de idoneidad didáctica, en la reflexión sobre prácticas docentes en futuros profesores de Matemáticas. El aporte principal de este trabajo es poder evidenciar cómo conocer un marco teórico como el EOS puede ser valioso para que los docentes de Matemáticas en formación desarrollen aspectos vinculados a la competencia de reflexión docente.

2. Marco teórico

Este apartado tiene como propósito presentar de manera general, las nociones que permiten una mejor comprensión del problema propuesto y los recursos teóricos con los que se aborda. Se presentan algunas ideas sobre el conocimiento del profesor de matemática, la descripción de las principales nociones teóricas del EOS, una descripción del modelo de Conocimiento y Competencias Didáctico Matemáticas del profesor (CCDM) como recursos teóricos para estudiar el fenómeno. Además, se explora la importancia de la noción de práctica reflexiva y el uso del video como instrumento para reflexionar, pues ambos elementos están vinculados con el abordaje e materiales utilizados durante la ejecución de esta investigación.

2.1. Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la instrucción matemática (EOS)

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007) tiene origen en la década de 1990 y surge del cuestionamiento sobre fundamentos teóricos de la investigación en Didáctica de las Matemáticas (epistemología de las matemáticas y epistemología de la didáctica de la matemática) presentes en teorías como la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1998), Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992), Dialéctica Instrumento Objeto, Juego de Marcos (Douady, 1986) y Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990). Este modelo busca construir un enfoque unificado del conocimiento y la instrucción matemática con el fin de superar dilemas entre diversos paradigmas. Toma como principio la ontología de los objetos matemáticos y considera las matemáticas como una actividad de resolución de problemas socialmente compartida, un lenguaje simbólico y un sistema conceptual lógicamente organizado. Asimismo, toma la situación-problema como noción primitiva para definir los conceptos teóricos de práctica, objeto y significado, con el propósito de hacerlo visible y operativo (Godino, Batanero y Font, 2009).

El EOS "trata de aportar herramientas teóricas para analizar conjuntamente el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y los factores que condicionan su desarrollo" (Godino, 2012, p. 5), esto a partir de la consideración de facetas o dimensiones del conocimiento matemático que permitan la comparación y articulación de los distintos enfoques de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje.

Además, desarrolla elementos teóricos para analizar las diversas dimensiones y facetas a tener en cuenta en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tratando de

> [...] hacer operativas las nociones de práctica matemática, configuración epistémica y cognitiva, configuración didáctica, dimensión normativa e idoneidad didáctica mediante unas "guías" para el reconocimiento de objetos y procesos matemáticos, interacciones didácticas, normas y metanormas que soportan y restringen los procesos de estudio, y para la valoración de la idoneidad didáctica de los mismos (Godino y Batanero, 2009, p. 4).

Estas guías constituyen una herramienta que facilita realizar y ordenar el análisis didáctico de: fases de planificación curricular, implementación en el aula, evaluación de los aprendizajes y la idoneidad didáctica. Debido a esto, las mismas resultan un instrumento potencial para el desarrollo de la práctica reflexiva en futuros profesores (Godino y Batanero, 2009).

2.2. Indicadores de idoneidad

La noción teórica de idoneidad didáctica de un proceso instruccional, se define como "la articulación coherente y sistémica de seis componentes" (Godino et al., 2009). Estos son:

> • *Idoneidad epistémica:* Se refiere al conocimiento de la diversidad de los significados institucionales de cualquier objeto matemático, dependiendo de los diferentes contextos de uso, y el reconocimiento del sistema de prácticas, objetos y procesos implicados en cada significado parcial.
>
> • *Idoneidad cognitiva:* Implica el conocimiento de cómo los estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas y cómo progresan en su aprendizaje.
>
> • *Idoneidad afectiva:* Incluye los conocimientos sobre los aspectos afectivos, motivacionales, emocionales, actitudinales y creencias de los estudiantes con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
>
> • *Idoneidad mediacional:* Conocimiento de los recursos (tecnológicos, materiales y temporales) apropiados para potenciar el aprendizaje de los estudiantes.
>
> • *Idoneidad interaccional:* Considera los patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes, además de su secuenciación o la orientación y negociación de significados.
>
> • *Idoneidad ecológica:* Se refiere al sistema de relaciones con el entorno social, político, económico, entre otros, que soporta y condiciona el proceso de estudio. (p. 14).

Así, la noción de idoneidad didáctica puede explicarse como una herramienta teórica que hace posible pasar de una didáctica descriptiva-explicativa a una didáctica normativa que favorece o permite una efectiva intervención en el aula. Debido a esto es posible aplicarla, por ejemplo, al análisis de un proceso de estudio implementado en una sesión de clase, a la planificación o al desarrollo de una unidad didáctica o, de manera más global, al desarrollo de un curso o una propuesta curricular (Breda, Font y Pino-Fan, 2018; Esqué de los Ojos y Breda, 2021; Godino, 2012, 2013).

Luego, para lograr utilizar esta herramienta, es conveniente definir un conjunto de indicadores observables que permitan evaluar el grado de idoneidad de cada faceta del conocimiento didáctico.

2.3. Interacciones didácticas

Cada vez que se lleva a cabo un proceso de instrucción sobre un objeto matemático, se ven involucrados una serie de elementos del significado pretendido, así como funciones docentes, discentes y recursos instruccionales.

Dicho proceso tiene la particularidad de no estar determinado por sus condiciones iniciales, pues aun cuando existe una planificación sobre la forma en cómo se abordará un contenido, puede ocurrir que las características, requerimientos del estudiante y otras condiciones demanden algunos o varios cambios en la secuencia de las funciones y componentes (Godino, Contreras y Font, 2006). Por ejemplo, un docente incluye dentro de su planeamiento de clase una determinada cantidad de temas y actividades por abordar en la lección, pero se podrían presentar situaciones dentro de la clase que le lleven a variar dichas actividades y no logra cumplir a cabalidad su plan.

Esta secuencia particular es la que determina la trayectoria muestral del proceso de instrucción, y por ello "parece natural modelizar esta distribución temporal de funciones y componentes mediante procesos estocásticos" (Godino et al., 2006, p. 44). En Godino et al. (2006) se distinguen los seis tipos de procesos y trayectorias muestrales siguientes:

> • *Trayectoria epistémica:* Se refiere a la distribución a lo largo del tiempo de la enseñanza de los componentes del significado institucional implementado. Estos componentes (problemas, acciones, lenguaje, definiciones, propiedades, argumentos) suceden en cierto orden.

- *Trayectoria docente:* Se refiere a la distribución de tareas docentes a lo largo del proceso de instrucción. Entre las funciones docentes se encuentra la planificación, motivación, asignación de tareas, regulación, evaluación e investigación.

- *Trayectoria discente:* Considera la distribución de las acciones desempeñadas por los estudiantes (una para cada estudiante). Los tipos potenciales de estados o funciones del estudiante en un proceso instruccional son: aceptación, exploración, interpretación, formulación, argumentación, recepción de información, demanda de información, ejercitación y evaluación.

- *Trayectoria mediacional:* Representa la distribución de los recursos tecnológicos utilizados.

- *Trayectoria cognitiva:* Se refiere a la cronogénesis de los significados personales de los estudiantes.

- *Trayectoria emocional:* Considera la distribución temporal de los estados emocionales (actitudes, valores, efectos y sentimientos) de cada estudiante con relación a los objetos matemáticos.

Las actividades de enseñanza aprendizaje, además, involucran un tiempo didáctico, que como lo indica Godino et al. (2006), se refiere a la duración de las actividades dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, es decir, tanto las actividades del docente como del estudiante. (p. 44).

2.4. Práctica reflexiva

El concepto de práctica reflexiva en el contexto de la docencia se refiere a una continua interacción entre el pensamiento y la acción. Es importante que el docente realice la reflexión sobre su práctica de enseñanza de manera permanente con el fin de identificar problemas, transformarla y mejorarla (Schön, 1983, citado por Posadas y Godino, 2017).

Es usual que las personas reflexionen sobre algunas de sus acciones en algún momento, y en el ámbito de la educación esta acción se da con más frecuencia debido a que el docente debe evaluar constantemente la efectividad de su plan de clase y actividades propuestas.

Sin embargo, una reflexión sobre un episodio del quehacer docente no necesariamente convierte a la persona en un "practicante reflexivo" (Shön, 1983, citado por Posadas y Godino, 2017). Como lo indica Perrenoud (2004), una verdadera práctica reflexiva implica que esta postura se convierta en algo habitual, y que establezca una relación analítica del accionar independientemente de los obstáculos que se presenten.

En la acción pedagógica, la práctica reflexiva involucra una serie de decisiones que pueden ser tomadas en distintos momentos del proceso de enseñanza, aunque es claro que reflexionar y tomar decisiones durante el desarrollo de la clase puede resultar difícil, y por ello lo más conveniente es realizar la reflexión haciendo una retrospección del trabajo pedagógico realizado (Perrenoud, 2004).

Particularmente, en el EOS la práctica reflexiva es considerada una estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico matemático. Propone desarrollar y aplicar herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa que permita comprender y responder a la pregunta ¿qué ha ocurrido aquí y por qué? (Posadas y Godino, 2017). En esta misma línea se encuentran otros trabajos que apoyan esta propuesta (e. g., Alpízar-Vargas y Morales-López, 2019; Breda, 2020; Morales-López, 2017, 2019; Morales-López y Araya-Román, 2020; Morales-López y Font, 2017, 2019), así como referentes internacionales que abordan la investigación en la práctica reflexiva (e. g., Breda, Pino-Fan y Font, 2017; Fernández y Yoshida, 2004; Lee, 2005; Smyth, 1989).

2.5. Video como instrumento para reflexionar

Distintas investigaciones han recurrido al uso de videoclips o secuencias de video de un episodio de clase para implementar actividades en las que se logre realizar un análisis didáctico de la práctica docente, debido a las ventajas que representa poder observar varias veces una escena de interés (e.g. Borko, Jacobs, Eiteljorg y Pittman, 2008; Climent y Carrillo, 2007; Kleinknecht y Schneider, 2013; Rosaen, Lundeberg, Cooper, Fritzen y Terpstra, 2008).

El uso de videos permite mostrar las interacciones del aula, conversaciones y gestos que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de manera reiterada, por lo que el uso de los mismos favorece la reflexión y comunicación, permitiendo el surgimiento de múltiples perspectivas contextualizadas en la clase observada, así como la discusión y crítica constructiva (Climent y Carrillo, 2007).

Otro aspecto importante de la reflexión con el apoyo de videograbaciones es que ha permitido a quienes lo utilizan, realizar comentarios más específicos sobre su enseñanza (respecto lo que logra recordar en retrospectiva sin uso de video), orientar las reflexiones hacia el análisis del enfoque en la instrucción sobre el manejo del aula y centrarse más en los estudiantes (Rosaen et al., 2008). Asimismo, "el video permite ingresar al mundo de aula sin tener que estar en la posición del profesor en el momento" (Sherin, 2004, citado por Borko et al., 2008, p. 418) y permite destacar aspectos de la práctica docente que un profesor podría pasar por alto en medio del desarrollo de la lección (Borko et al., 2008).

Además, se ha evidenciado que los profesores que observan videos de la práctica de otros docentes tienden a expresar emociones como la desaprobación y sugerir cambios o alternativas para mejorar la práctica del profesor observado, mientras que cuando se trata de un video de su propia práctica, el docente tiende a ser más descriptivo y crítico de la actividad, aunque con menos profundidad (Kleinknecht y Schneider, 2013).

3. Metodología

El estudio se realizó en el marco del paradigma cualitativo, pues buscó comprender el impacto que genera conocer algunas nociones teóricas del EOS en la capacidad de reflexión de las prácticas docentes en los futuros profesores de Matemáticas de la carrera de Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional en Costa Rica. El diseño metodológico corresponde a un estudio de caso, ya que se buscó conocer una situación de un grupo específico sin pretensiones de generalizar; además, el análisis de los datos se centró en un fenómeno seleccionado por el investigador independientemente del número de escenarios o de participantes.

Para realizar la investigación, se consideró el grupo de estudiantes del curso MAB 505 del plan terminal de la carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática, Seminario de Investigación Dirigida I del II Ciclo 2018 de la Universidad Nacional, en Costa Rica, el cual estaba conformado por un total de 7 estudiantes que compartían características como: cursar el quinto nivel del plan terminal de la carrera, haber cursado todos sus años de estudio en la misma institución y tener aprobado el curso Desarrollo y Práctica Docente, en el cual tienen la oportunidad de desempeñarse como docentes durante 8 semanas, aproximadamente.

Para recabar los datos se utilizaron dos cuestionarios, ambos conformados por dos partes: la primera correspondía a preguntas generales como género, edad y experiencia laboral, y la segunda estaba compuesta por una serie de interrogantes enmarcadas dentro de la teoría de idoneidad didáctica y referentes al análisis o reflexión de las secuencias de video.

El desarrollo del trabajo se llevó a cabo mediante 3 fases: en la primera se aplicó un cuestionario (Reflexión 1) que consta de preguntas generales sobre los indicadores de idoneidad didáctica pero que no contienen una pauta específica para realizar un análisis de un episodio de clase; la segunda fase consistió en una actividad formativa sobre las nociones teóricas del EOS y la reflexión de la práctica docente, y en la tercera fase se aplicó un cuestionario que corresponde a la adaptación de la “Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática” diseñada por Font (2015), la cual brinda una guía sobre los elementos que deben considerarse en una reflexión de la práctica docente (Reflexión 2).

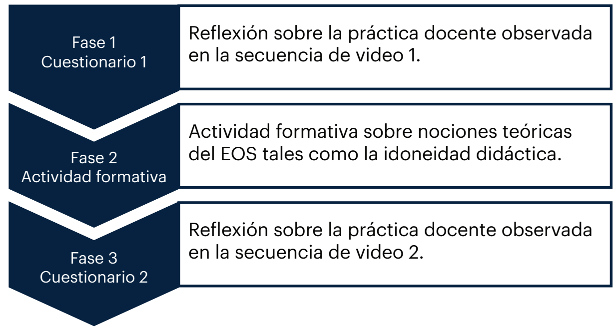

Figura 1. Fases de la actividad de los participantes de la investigación

Fuente: Elaboración propia

Para realizar el análisis de los datos se utilizaron las nociones teóricas que comprenden los criterios de idoneidad, específicamente los descriptores asociados a cada uno de los criterios de idoneidad propuestos en la “Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática” diseñada por Font (2015).

Tabla 1

Componentes e indicadores de idoneidad (unidades de análisis de la investigación)

Componentes	**Indicadores**
Componentes y descriptores de la idoneidad epistémica [IE]	(1) Errores (2) Ambigüedades (3) Diversidad de procesos (4) Representatividad de procedimientos, definiciones y propiedades para comprender la noción matemática en estudio (5) Lenguaje
Componentes y descriptores de la idoneidad cognitiva [IC]	(1) Conocimientos previos (2) Adaptación curricular a diferencias individuales (3) Evaluación
Componentes y descriptores de la idoneidad interaccional [II]	(1) Interacción profesor-estudiante (2) Interacción entre estudiantes (3) Autonomía para que el estudiante explore, formule y valide el objeto de estudio
Componentes y descriptores de la idoneidad mediacional [IM]	(1) Recursos materiales (2) Número de alumnos, horario y condiciones del aula (3) Inversión del tiempo de manera adecuada
Componentes y descriptores de la idoneidad afectiva [IA]	(1) Intereses y necesidades (2) Actitudes (3) Emociones
Componentes y descriptores de la idoneidad ecológica [IG]	(1) Adaptación al currículo (2) Conexiones intra e interdisciplinares (3) Innovación didáctica

Fuente: Adaptado de “Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática” (Font, 2015).

4.Resultados

A continuación, se presenta una síntesis de los cambios principales identificados en las reflexiones realizadas por los participantes.

4.1. Resultados de la primera fase

Sobre la idoneidad epistémica, más de la mitad de los participantes expusieron una breve descripción de lo observado en el episodio de clase, dentro de la cual resaltan elementos como la situación problema o el momento de la clase en que se desarrolla, pero sin llegar a mencionar elementos que se relacionaban con indicadores de la idoneidad.

Respecto a la idoneidad cognitiva, solamente uno de los participantes realizó una reflexión retrospectiva en la que considera elementos del indicador conocimientos previos. En esta participación se aprecia la idea de que los significados pretendidos tienen una dificultad manejable, ya que expone ideas ordenadas de acuerdo con lo ocurrido en el episodio de clase sobre algunos componentes del significado estudiado, intentando llegar a una conclusión.

Luego, sobre la idoneidad mediacional, más de la mitad de los participantes emitieron, mediante una respuesta descriptiva, un criterio positivo sobre el uso de los recursos; mientras que en el caso de las idoneidades afectiva e interaccional, todos los participantes incluyeron dentro de sus reflexiones una descripción de las trayectorias docente y discente, donde incluyen elementos importantes de los indicadores de estas idoneidades como lo son actitudes y emociones, en el caso de la idoneidad afectiva, y las interacciones docente-estudiante, en el caso de la interaccional.

Finalmente, sobre la idoneidad ecológica, menos de la mitad de los participantes consideran elementos relacionados con los indicadores de esta idoneidad, por ejemplo, indican que existe congruencia entre la metodología empleada por la docente del video y la sugerida por los programas del Ministerio de Educación Pública, la utilidad social laboral del problema y posibles conexiones interdisciplinares.

4.2. Resultados de la segunda fase

Los participantes recibieron, mediante una conferencia magistral, una explicación específica sobre los principales elementos teóricos del EOS y de reflexión guiada, además, se les mostró una pauta sobre qué deben mirar al realizar una práctica reflexiva desde esta propuesta teórica.

Sobre este proceso de instrucción, los participantes expresaron la conveniencia de conocer sobre el tema, justificando que, a través de una herramienta teórica como esta, pueden analizar su mecanismo de enseñanza, proponer cambios e incluso identificar el logro o alcance de las habilidades de los estudiantes. Además, han mencionado un escaso abordaje del tema durante la carrera, por lo que participar de la actividad formativa representó realmente una actividad de formación.

4.3. Resultados de la tercera fase

Los participantes consideraron una mayor cantidad de elementos relacionados con los indicadores de la idoneidad epistémica, por ejemplo, todos los participantes logran identificar objetos matemáticos de tipo lingüísticos (registro oral y escrito) como lo son las notaciones, gráficos y conceptos. Además, en las preguntas relacionadas con el indicador representatividad, los participantes direccionan sus respuestas dentro de la trayectoria epistémica, indicando objetos matemáticos como conceptos y proposiciones.

Luego, sobre la idoneidad cognitiva, las reflexiones realizadas por los participantes incluyen elementos que no están presentes en la primera reflexión. Por ejemplo, respecto a conocimientos previos, la mayoría de los participantes se refiere a los objetos matemáticos como argumentos, proposiciones y conceptos, que son parte de los conocimientos previos del estudiante.

En el caso de la idoneidad mediacional, se encuentra que en ambas reflexiones los participantes consideraron elementos como recursos materiales e inversión del tiempo, aunque en la segunda reflexión se considera una mayor cantidad. Por ejemplo, en la segunda reflexión, además de recursos materiales y tecnológicos, uno de los participantes considera el uso de analogías y metáforas. Asimismo, aparecen elementos en las reflexiones como cantidad de ejemplos, contenidos y objetivos.

Sobre la idoneidad afectiva, menos de la mitad de los participantes identifican la apertura de espacios para la participación de los estudiantes, justificando que la docente los incentiva a resolver y responder el ejercicio. Sin embargo, otros identificaron que se promueve la participación y motivación para un mismo sector de la clase en la mayoría de las ocasiones, es decir, las preguntas van direccionadas siempre a los mismos estudiantes.

Además, todas las reflexiones refieren la trayectoria docente y, aunque todos los participantes incluyen en ambas participaciones elementos de la idoneidad afectiva, la valoración sobre la misma cambia cuando se considera el favorecimiento de participación en situaciones de igualdad. Es decir, en la mayoría de las reflexiones se percibe un cambio cuando se utiliza la guía, ya que se observan elementos más específicos como lo son las situaciones de igualdad, promover la participación o el interés de los estudiantes.

Más de la mitad de los participantes incluyeron en su reflexión sobre la idoneidad interaccional, una valoración positiva sobre el docente respecto a la resolución de conflictos de significado de los estudiantes, sin embargo, se centran en la actitud de la docente para dar respuesta a preguntas puntuales que se presentan durante la secuencia de video, dejando de lado distintos momentos donde el silencio o una equivocación podrían interpretarse claramente como un conflicto en la comprensión del concepto estudiado.

Finalmente, en las reflexiones sobre la idoneidad ecológica, además de la inclusión de elementos como la adaptación al currículo, se identifican los otros dos indicadores correspondientes a esta idoneidad: conexiones intra e interdisciplinares y la innovación didáctica.

5. Conclusiones

Con el estudio se evidencia un cambio en cuanto a la profundidad del análisis realizado por los participantes cuando disponen de una pauta para realizar la reflexión, pues con el uso de esta se presenta de forma más clara y ordenada la redacción de sus ideas y justificaciones. Una posible razón de lo anterior, según Breda et al. (2018), podría relacionarse con que los participantes, al ser profesores en formación asumen los criterios como algo naturalizado e incuestionable, pues estos no han participado en el proceso de generación de consensos.

Sobre la cantidad de elementos identificados, era esperable que observarían más. Esto no es trivial, pues al parecer los estudiantes muestran conocimientos que, a no ser por el empleo de una guía para la reflexión, no hubieran sido evidenciados. Por ejemplo, elementos lingüísticos, representaciones o procesos presentes dentro del proceso de instrucción no se consideraron en la primera reflexión de los participantes, su presencia se reconoció después de la actividad formativa y de hacer uso de una guía o pauta para realizar una reflexión docente. Es decir, es evidente que los estudiantes tienen claridad sobre cada uno de estos elementos, así como su importancia en un proceso de instrucción, pero la inclusión de estos en sus reflexiones no ocurre hasta que se les guía sobre algunos de los elementos de interés que pueden mirar (reflexión guiada). Como lo mencionan Ramos y Font (2008), los criterios de idoneidad son herramientas útiles para organizar y analizar las prácticas discursivas sobre cómo debería ser el proceso de instrucción.

Además, en la segunda reflexión, al menos dos de los participantes logran identificar situaciones en las que se presentan necesidades individuales de los estudiantes (conocer a los estudiantes como personas que piensan y aprenden, Schoenfeld y Kilpatrick, 2008). Por ejemplo, aunque algunos han considerado positivamente la actitud y motivación de la mayoría de los estudiantes observados en el video para emitir un juicio valorativo, otros además de haber centrado su atención en lo general, han observado con mayor detenimiento algunos casos en donde se aprecia una menor motivación e interés. Es decir, algunos de los participantes han realizado un análisis más detallado de las diferencias individuales.

También, se obtuvo dentro de los resultados que los participantes no tienen una idea clara sobre lo que deben observar al evaluar un proceso de instrucción. Las herramientas para realizar una práctica reflexiva son escasas, ya que, en la mayoría de los casos, las reflexiones comprenden ideas muy ambiguas. Por ejemplo, respecto a las idoneidades cognitiva y epistémica, menos de la mitad de los profesores en formación que participaron en el estudio centraron su atención en el modelo de clase que se desarrolla y la trayectoria docente; realizaron principalmente una descripción en términos generales de los eventos observados, considerando escasamente elementos de análisis para plantear mejoras en el proceso de instrucción.

Asimismo, en el análisis de las idoneidades afectiva e interaccional, los participantes muestran interés por evaluar el tipo de interacción entre la docente y los estudiantes, así como la influencia que tenga esto en la motivación y el nivel de participación de los estudiantes durante la clase, pero se realiza una reflexión en términos generales donde no se expone claramente una justificación de su juicio valorativo.

En resumen, el estudio permitió determinar que luego de conocer algunas de las nociones teóricas del EOS, se produce un cambio en la capacidad de reflexión de las prácticas docentes por parte de los estudiantes participantes, lo cual representa el principal aporte de este trabajo. Estos resultados coinciden con el estudio de Posadas y Godino (2017), donde la utilización de los criterios de idoneidad didáctica permite organizar la reflexión y mejorar la práctica docente y, conjuntamente, confirman los hallazgos de Rosaen et al. (2008) en la manera en que los futuros docentes en formación realizan reflexiones cuando utilizan recursos como las videograbaciones de clases.

Finalmente, aunque la práctica reflexiva docente comienza por evaluar el trabajo propio, el uso de una estrategia como la utilizada en este estudio mediante el apoyo de las secuencias de video, podría considerarse dentro del proceso de formación docente, ya que permite a los estudiantes tener un primer acercamiento sobre lo que significa llevar a cabo una práctica reflexiva.

Reconocimiento

La investigación se realizó en el contexto de los proyectos **PGC2018-098603-B-I00 (MCIU / AEI / FEDER, EU)**, el convenio internacional **UNA-UB: Cod 018133** y se contó con el apoyo de la Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica **(UNED).**

6. Referencias bibliográficas

Alpízar-Vargas, M., y Morales-López, Y. (2019). Teaching the Topic of Money in Mathematics Classes in Primary School. *Acta Scientiae, 21*(5), 102-127. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5262

Borko, H., Jacobs, J., Eiteljorg, E., y Pittman, M. E. (2008). Video as a tool for fostering productive discussions in mathematics professional development. *Teaching and Teacher Education, 24*(2), 417-436. https://doi.org/10.1016/j.tate.2006.11.012

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 34*(66), 69-88. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04

Breda, A., Font, V., y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32*(60), 255-278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., Pino-Fan, L., y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Paris: Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73-112. Recuperado desde http://www.numdam.org/item/PSMIR_1991__S6_160_0/

Climent, N., y Carrillo, J. (2007). El uso del video para el análisis de la práctica en entornos colaborativos. *Investigación en la escuela, 61*, 23-35. Recuperado desde https://idus.us.es/bitstream/handle/11441/60915/R61_2.pdf?sequence=1

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-31. Recuperado desde https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/

Esqué de los Ojos, D., y Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad, utilizando la herramienta Idoneidad Didáctica. *Uniciencia, 35*(1), 38-54. https://doi.org/10.15359/ru.35-1.3

Fernández, C., y Yoshida, M. (2004). *Lesson study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning.* Mahwah, EE.UU.: Erlbaum.

Font, V. (2015). *Guideline for the analysis and assessment of the didactical suitability of the mathematics teaching and learning processes.* Barcelona, Spain: Department of Didactics of the CCEE and Mathematics, Universitat de Barcelona.

Godino, J. D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista iberoamericana de educación matemática, 20*, 13-31. Recuperado desde http://funes.uniandes.edu.co/15164/2/Godino2009Categor%C3%ADas.pdf

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*, 111-132. Recuperado desde https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/14720

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en didáctica de la matemática. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, y L. Ordóñez (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM. Recuperado desde http://funes.uniandes.edu.co/11194/2/Godino2012Origen.pdf

Godino, J. D. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea, y P. Arteaga (Eds.). *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 1-15). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013. Recuperado desde http://www.ugr.es/~jgodino/eos/Godino_2013_Dise%F1o_tareas.pdf

Godino, J. D., y Batanero, C. (2009). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 9-33). Melilla: Facultad de Humanidades y Educación. Recuperado desde http://www.ugr.es/~jgodino/eos/fprofesores_reflexion_guiada_22dic08.pdf

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.* Versión ampliada. Recuperado desde http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J. D., Contreras, A., y Font, V. (2006). Análisis de los procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26*(1), 39-88. Recuperado desde https://www.ugr.

es/~jgodino/funciones-semioticas/analisis_procesos_instruccion.pdf

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W., y Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 7*(2), 1-21. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p1

Kleinknecht, M., y Schneider, J. (2013). What do teachers think and feel when analyzing videos of themselves and other teachers teaching? *Teaching and teachers Education, 33*(5), 13-23. https://doi.org/10.1016/j.tate.2013.02.002

Lee, H.-J. (2005). Understanding and assessing preservice teachers' reflective thinking. *Teaching and Teacher Education, 21*(6), 699-715. https://doi.org/10.1016/j.tate.2005.05.007

Morales-López, Y. (2017). Costa Rica: The Preparation of Mathematics Teachers. En A. Ruiz (Ed.), *Mathematics Teacher Preparation in Central America and the Caribbean: The Cases of Colombia, Costa Rica, the Dominican Republic and Venezuela* (pp. 39-56). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-44177-1_3

Morales-López, Y. (2019). Knowledge evidenced by prospective mathematics teachers when performing a task involving geometry, teaching and the use of technology. *Acta Scientiae, 21*(2), 75-92. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss2id5081

Morales-López, Y., y Araya-Román, D. (2020). Helping Preservice Teachers to Reflect. *Acta Scientiae, 22*(1), 88-111. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5641

Morales-López, Y., y Font, V. (2017). Análisis de la reflexión presente en las crónicas de estudiantes en formación inicial en educación matemática durante su periodo de práctica profesional. *Acta Scientiae, 19*(1), 122-137. Recuperado desde http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/2975

Morales-López, Y., y Font, V. (2019). Evaluation by a teacher of the suitability of her mathematics class. *Educação e Pesquisa*, 45, 1-19. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201945189468

Perrenoud, P. (2004). *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar.* Barcelona, España: Graó.

Posadas, P., y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae, 1*, 77-96. https://doi.org/10.1344/did.2017.1.77-96.

Ramos, A., y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 233-265. Recuperado desdehttp://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000200004

Rosaen, C. L., Lundeberg, M., Cooper, M., Fritzen, A., y Terpstra, M. (2008). Noticing noticing: how does investigation of video records change how teachers reflection their experiences? *Journal of Teacher Education, 59*(4), 347-360. https://doi.org/10.1177/0022487108322128

Schoenfeld, A., y Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh, y T. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087905460_016

Smyth, J. (1989). Developing and sustaining critical reflection in teacher education. *Journal of Teacher Education, 40*(2), 2-9. doi: 10.1177/002248718904000202

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 10*(2.3), 133-170.

VOLÚMEN 12
N°3
DICIEMBRE 2020

R E
C H
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
I E M

sochiem