VOLÚMEN 12
N°2
AGOSTO 2020

RECHIEM

REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

sochiem

ÍNDICE

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

sochiem

Sociedad Chilena de Educación Matemática
Revista Chilena de Educación Matemática
ISSN 2452-5448 Versión en línea
Chile

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25

EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO: IMPLICACIONES SOBRE EL CARÁCTER PRESCRIPTIVO DE LA DIDÁCTICA[1]

THE ONTO-SEMIOTIC APPROACH: IMPLICATIONS FOR THE PRESCRIPTIVE CHARACTER OF DIDACTICS

Juan D. Godino, jgodino@ugr.es
Universidad de Girona, Girona, España

Carmen Batanero, batanero@ugr.es
Universidad de Granada, Granada, España

Vicenç Font, vfont@ub.edu
Universidad de Barcelona, Barcelona, España

RESUMEN

Presentamos una síntesis del Enfoque Ontosemiótico (EOS), sobre el conocimiento y la instrucción matemáticos, resaltando los problemas, principios y métodos de investigación en didáctica de las matemáticas que se abordan con este marco teórico. Se argumenta que la didáctica, como disciplina científica y tecnológica, debe abordar los problemas epistemológico, ontológico, semiótico-cognitivo, educativo-instruccional, ecológico y de optimización de la instrucción, así como la formación de profesores. El EOS asume principios antropológicos, pragmáticos y semióticos para investigar estos problemas, además de principios socioculturales para abordar los problemas educativo-instruccionales. La noción de idoneidad didáctica proporciona un criterio sistémico para tratar el problema de optimización de los procesos de instrucción matemática.

PALABRAS CLAVE:
Didáctica; matemáticas; fundamentos teóricos; investigación; enfoque ontosemiótico.

ABSTRACT

We present a synthesis of the Onto-semiotic Approach (OSA) theoretical system to mathematical knowledge and instruction, while highlighting the problems, principles and mathematical didactic research methods addressed in this approach. We argue that Didactics, as a scientific and technological discipline, should address the epistemological, ontological, semiotic-cognitive, educational-instructional, ecological, instruction optimization, and teachers' education problems. OSA assumes anthropological, pragmatic and semiotic principles to look into all these types of problems, as well as embraces sociocultural principles to address educational-instructional problems. The notion of didactic suitability has been introduced as a systemic criterion to address the problem of optimization of mathematical instruction processes.

KEYWORDS:
Didactic; mathematics; theoretical foundations; research; onto-semiotic approach.

[1] *Versión ampliada en castellano del artículo publicado en la revista For the Learning of Mathematics (39-1, 37-42), con el título "The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics".*

Recibido: 21 de marzo de 2020, Aceptado: 21 de abril de 2020

1. Introducción

En este trabajo se proporciona una respuesta al problema planteado por Gascón y Nicolás (2017) sobre el carácter prescriptivo de los resultados consolidados de la investigación científica en didáctica de las matemáticas: "¿Hasta qué punto, en qué forma y en qué condiciones, la didáctica puede (o incluso debe) proponer juicios valorativos y normativos que proporcionen criterios sobre cómo organizar y gestionar los procesos de estudio?" (Gascón y Nicolás, 2017, p. 26).

En el artículo citado, Gascón y Nicolás analizan las respuestas dadas por varios autores a la pregunta anterior, aplicando la perspectiva específica de la Teoría Antropológica (Chevallard, 1992). Para contribuir a esta discusión, en este trabajo reaccionamos al desafío planteado por Gascón y Nicolás usando los principios y herramientas teóricas desarrolladas por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007).

Comenzamos nuestra reflexión explicitando la concepción de la didáctica de las matemáticas, que está en la base de los supuestos del EOS. Seguidamente, incluimos un apartado en el que sintetizamos sus principios epistemológicos, ontológicos, semióticos y educativo-instruccionales. Finalmente, describimos la noción de idoneidad didáctica que permite dar una respuesta afirmativa al carácter prescriptivo de la faceta o dimensión tecnológica de la didáctica de las matemáticas.

2. La didáctica como ciencia y tecnología

La reflexión epistemológica sobre la naturaleza de la didáctica es esencial para orientar adecuadamente la investigación, ya que condiciona la formulación de las cuestiones centrales de la misma. Entre los autores que han realizado dicha reflexión destacan Steiner (1985) y Brousseau (1989), en un ensayo con el significativo título *La torre de Babel*.

Ante la extrema complejidad de los problemas de la educación matemática, Steiner (1985) indica que se producen dos reacciones extremas:

> - Los autores que afirman que la didáctica de las matemáticas no puede llegar a ser un campo con fundamentación científica y, por tanto, la enseñanza de la matemática es esencialmente un arte;
>
> - Los que, pensando que es posible la existencia de la didáctica como ciencia, reducen la complejidad de sus problemas seleccionando solo un aspecto parcial de los mismos (por ejemplo, el análisis del contenido a enseñar, la construcción del currículo, mejora de los métodos de enseñanza, desarrollo de destrezas en el alumno, interacción en el aula, ...), al que atribuyen un peso especial dentro del conjunto, dando lugar a diferentes definiciones y visiones de la didáctica. (p. 11)

De manera parecida se expresa Brousseau (1989), recordando una primera acepción de la didáctica de las matemáticas que consiste en identificarla como el arte de enseñar, esto es, el conjunto de medios y procedimientos que tienden a hacer conocer, en nuestro caso, la matemática. Brousseau, además, distingue dos concepciones de carácter científico que denominaremos concepción pluridisciplinar aplicada y concepción autónoma (calificada por el autor como fundamental o matemática). Como bisagra entre estas dos visiones distingue también una concepción tecnicista, en la que la didáctica sería el conjunto de técnicas de enseñanza, esto es, la invención, descripción, estudio, producción y el control de medios nuevos para la enseñanza: currículo, objetivos, medios de evaluación, materiales, manuales, logiciales, obras para la formación, etc.

En la concepción pluridisciplinar, que coincidiría con la segunda tendencia señalada por Steiner, la didáctica aparece como una etiqueta para designar las enseñanzas necesarias para la formación técnica y profesional de los profesores. La didáctica, como área de conocimiento científico, sería el campo de investigación llevada a cabo sobre la enseñanza, en el cuadro de disciplinas científicas clásicas, como son: la psicología, la semiótica, sociología, lingüística, epistemología, lógica, neurofisiología, pedagogía, pediatría, psicoanálisis, etc.

Lesh y Sriraman (2010) reflexionan también sobre la naturaleza de la educación matemática como campo de investigación, planteando las siguientes preguntas:

> ¿Deberían los educadores matemáticos verse a sí mismos como psicólogos educativos aplicados, psicólogos cognitivos aplicados, o científicos sociales aplicados? ¿Se deberían considerar semejantes a los científicos en el campo de la física, o de otras ciencias puras? ¿O más bien como ingenieros u otros técnicos orientados al diseño, cuya investigación se apoya sobre múltiples perspectivas prácticas y disciplinares, y cuyo trabajo está guiado por la necesidad de resolver problemas reales y también por la necesidad de elaborar teorías relevantes? (p. 124)

Estos autores proponen considerar la educación matemática en este último sentido, o sea, como una ciencia orientada al diseño de procesos y recursos para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En el marco del EOS, se considera que el conocimiento que se pretende construir tiene un carácter científico y, además, tecnológico. Esto quiere decir que, por una parte, se abordan problemas teóricos de clarificación ontológica, epistemológica y semiótica sobre el conocimiento matemático, en cuanto tales problemas tienen relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje (componente científico, descriptivo, explicativo, predictivo). Por otra parte, se trata de intervenir en dichos procesos para hacerlos lo más *idóneos* posible (componente tecnológico-prescriptivo). Se entiende que la descripción, explicación y predicción son los fines de la actividad científica, mientras que la prescripción y valoración son los principales objetivos de la actividad tecnológica, aunque esta también incluye elementos de investigación aplicada a la resolución de problemas concretos.

3. Problemas, principios y métodos de investigación en didáctica según el EOS

En este apartado damos una respuesta sintética, desde el marco del EOS, a las primeras cuestiones planteadas por Gascón y Nicolás (2017): ¿Cuáles son los principios o asunciones básicas de cada uno de los enfoques o teorías didácticas? ¿Qué fenómenos didácticos se propone explicar y qué problemas prioriza?

La estrategia de articulación, hibridación y construcción modular de teorías, desde una aproximación antropológica y ontosemiótica, está en la base del denominado Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Font, Godino y Gallardo, 2013; Godino y Batanero, 1994; Godino et al., 2007)[2].

En este enfoque se asume la pertinencia y potencial utilidad de avanzar hacia la construcción de un sistema teórico, que permita abordar de manera articulada los problemas epistemológicos, ontológicos, semiótico-cognitivos y educativos implicados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se considera que la didáctica es la disciplina tecno-científica que asume la responsabilidad de dar una respuesta coherente a los problemas didácticos citados. Estos problemas son también abordados por otras disciplinas específicas, cuyos principios, métodos y resultados, cuando enfocan los citados problemas en forma aislada, pueden ser contradictorios. Se asume, por tanto, una concepción ampliada de lo didáctico, como lo relativo a los procesos de enseñanza y aprendizaje, al saber y a la práctica matemática (génesis, desarrollo, difusión, transposición y utilización), así como la *optimización* de dichos procesos en los contextos educativos.

Seguidamente, para facilitar la comparación y articulación del EOS con otros marcos teóricos, y comprender su posición sobre el carácter prescriptivo de los resultados de la investigación en didáctica, explicitaremos los problemas, principios y métodos que constituyen el núcleo central de este sistema teórico. Usamos la interpretación que propone Radford (2008) de una teoría como un instrumento para producir comprensiones y formas de acción basados en:

> - Un conjunto, Q, de cuestiones paradigmáticas de investigación.
>
> - Un sistema, P, de principios básicos, que incluyen visiones implícitas y enunciados explícitos que trazan la frontera de lo que será el universo del discurso y la perspectiva de investigación adoptada.
>
> - Una metodología, M, que incluye las técnicas de recogida de datos y su interpretación apoyada por P. (p. 320)

A continuación, para cada uno de los problemas epistemológico, ontológico, semiótico-cognitivo, educativo-instruccional y ecológico enunciamos las preguntas que los definen (Q), los principios básicos que postulamos para darles respuestas (P) y el método (M) propuesto para abordar la solución de los problemas.

3.1. Problema epistemológico

QE1: ¿Cómo emerge y se desarrolla la matemática?

[2] *Los trabajos donde se desarrolla y aplica el EOS están disponibles en el sitio web http://enfoqueontosemiotico.ugr.es*

Para dar respuesta a esta pregunta se asume una visión antropológica[3] (Wittgenstein, 1973/1953) y pragmatista (Peirce, 1958) de las matemáticas; por tanto, la actividad de las personas en la resolución de problemas se considera el elemento central en la construcción del conocimiento matemático. Esta visión epistemológica se hace operativa en el EOS con la noción de práctica matemática y asumiendo su relatividad institucional y personal, lo cual lleva a asumir el siguiente principio epistemológico:

> PE_1: La matemática es una actividad humana centrada en la resolución de cierta clase de situaciones-problema. La realización de dicha actividad se concreta en la puesta en acción de sistemas de prácticas mediante los cuales se da respuesta a la situación-problema planteada.

Se considera práctica matemática a “toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Para resolver un problema el sujeto realiza una secuencia organizada de diversos tipos, prácticas realizadas con la intención de dar una respuesta al problema o tarea planteada. Desde un punto de vista cognitivo y educativo, determinadas secuencias de prácticas que hace una persona para resolver un problema se designan con el término de *proceso de resolución de problema*. Otras secuencias de prácticas también se suelen considerar como procesos, por ejemplo, se habla del proceso de modelización, argumentación, etc.

Un segundo principio postula el carácter institucional y personal de las prácticas:

> PE_2: Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. No hay instituciones sin personas, ni personas desligadas de las diversas instituciones de las que de forma inevitable forman parte (familia, escuela, etc.).

Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y están generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento. La distinción entre prácticas personales e institucionales permite tomar conciencia de las relaciones dialécticas entre las mismas: por un lado, las personas están sujetas a los modos de actuación compartidos en el seno de las instituciones de que forman parte; por otro, las instituciones están abiertas a la iniciativa y creatividad de sus miembros.
El tercer principio se refiere a la secuenciación de las prácticas, que permite interpretar la noción de proceso:

> PE_3: La resolución de problemas se realiza mediante la articulación de secuencias de prácticas. Tales secuencias de prácticas tienen lugar en el tiempo y se consideran en muchos casos como procesos, los cuales a su vez se pueden descomponer en subprocesos. El megaproceso de resolución de problemas se puede descomponer en procesos más básicos (significación, conjeturación, representación, argumentación, …).

Estos principios ligados a la cuestión epistemológica sobre la génesis del conocimiento dan lugar al siguiente método de indagación:

> ME_1: La génesis institucional del conocimiento matemático se investiga en el EOS mediante: 1) la identificación y categorización de las situaciones-problema que requieren una respuesta; 2) la descripción de las secuencias de prácticas que se ponen en juego en la resolución.

Dado que los sistemas de prácticas para la solución de los problemas son *relativos* a los contextos de uso y los marcos institucionales en que se abordan, se asume que el conocimiento es *relativo* a dichos marcos y contextos.

3.2. Problema ontológico

QO1: ¿Qué es un objeto matemático? ¿Qué tipos de objetos intervienen en la actividad matemática?

La matemática, además de ser una actividad, es también un sistema lógicamente organizado de objetos. Para el EOS, objeto matemático es cualquier entidad material o inmaterial que interviene en la práctica matemática, apoyando y regulando su realización. Se trata de un

[3] *Bloor (1983) describe la visión de Wittgenstein sobre las matemáticas como un fenómeno antropológico (capítulo V) dentro de su visión social del conocimiento. Esta visión filosófica sobre las matemáticas es consistente con la asumida por la TAD (Teoría Antropológica de lo Didáctico, Chevallard, 1992). Las relaciones entre el EOS y la TAD fueron discutidas en D’Amore y Godino (2007).*

uso metafórico del término, puesto que un concepto matemático se concibe usualmente como una entidad ideal o abstracta, y no como algo tangible, como una roca, un dibujo o un artefacto manipulativo. Esta idea general de objeto, consistente con la propuesta en el interaccionismo simbólico (Blumer, 1982/1969; Cobb y Bauersfeld, 1995), es útil cuando se complementa con una tipología de objetos matemáticos al tener en cuenta sus diferentes roles en la actividad matemática. Los símbolos, las representaciones externas y manipulativos están implicados en la actividad matemática escolar y profesional, por tanto, se consideran objetos matemáticos, en el sentido de que intervienen en las prácticas matemáticas. Los conceptos de número, fracción, derivada, etc. son objetos matemáticos de diferente naturaleza y función que las representaciones ostensivas. Son objetos no-ostensivos, objetos mentales (cuando intervienen en las prácticas personales), u objetos institucionales (cuando intervienen en las prácticas socioculturales o compartidas). En ambos casos son objetos que regulan la actividad matemática, mientras que sus representaciones ostensivas sirven de soporte o facilitan la realización de dicho trabajo.

No hay actividad matemática sin objetos, ni objetos sin actividad. Como las prácticas pueden ser vistas desde la perspectiva social (prácticas institucionales, compartidas) o personal (individuales, idiosincrásicas), los objetos también pueden ser contemplados desde la dualidad institucional-personal, lo que origina el siguiente principio:

> PO_1: En las prácticas matemáticas intervienen diversas clases de objetos que cumplen diferentes roles: instrumental/representacional; regulativo (fijación de reglas sobre las prácticas), explicativo, justificativo.

Dada la generalidad con la que se entienden las nociones de práctica y objeto, así como la gran diversidad de secuencias de prácticas (procesos) que se pueden realizar, se considera necesario y útil proponer una tipología de objetos y procesos básicos, que son los reflejados en la Figura 1, designada como *configuración ontosemiótica*. Estas configuraciones pueden ser *epistémicas* (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales). En la literatura psicológica y educativa se habla de otros procesos diferentes de los mencionados en la Figura 1, por ejemplo, proceso de resolución de problemas, modelización, entre otros. Dichos procesos se pueden describir usando los procesos básicos que propone el EOS, por lo que en cierto sentido se trata de megaprocesos.

El reconocimiento explícito de los objetos (problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos) que intervienen y emergen en las prácticas matemáticas permite prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e identificar objetos que deben ser recordados e institucionalizados en los momentos oportunos de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

> PO_2: La configuración ontosemiótica permite articular las nociones de práctica, objeto y proceso, así como las dualidades desde las cuales se pueden considerar dichas ideas para el análisis institucional y personal de la actividad matemática.

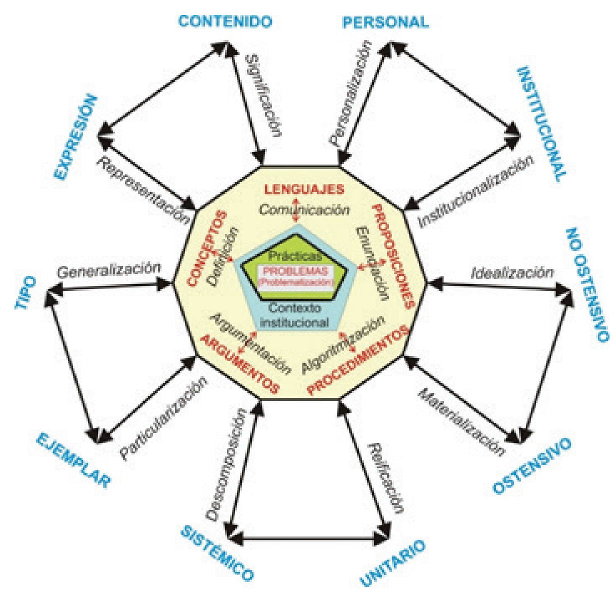


Figura 1. Configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos
Fuente: Godino (2014, p. 23)

Entendemos los conceptos, proposiciones y procedimientos, en su versión unitaria (tratados como un todo o unidad) como propone Wittgenstein (1973/1953), es decir, como reglas gramaticales de los lenguajes usados en las prácticas que se realizan para describir nuestros mundos y dar respuesta a las situaciones-problema a las que nos enfrentamos. En el EOS los objetos matemáticos también se pueden considerar de una perspectiva sistémica (como un sistema de componentes), donde los diversos significados parciales del mismo objeto se identifican y articulan. Además, se pueden identificar diversos significados personales de los objetos (número, probabilidad, etc.) cuando se analizan las prácticas personales al resolver problemas en los cuales dichos objetos intervienen.

La herramienta configuración ontosemiótica (Figura 1) incorpora de manera híbrida elementos de las nociones de concepto, concepción, esquema, praxeología matemática y registro de representación semiótica. En Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011) se presenta un desglose analítico de la noción de configuración ontosemiótica, tanto para los conocimientos institucionales como personales, con un ejemplo relativo al concepto de número natural. Así mismo, en Font et al. (2013) se analiza la emergencia de los objetos matemáticos a partir de las prácticas realizadas para resolver problemas matemáticos.

3.3. Problema semiótico-cognitivo

QSC1: ¿Qué es conocer un objeto matemático? ¿Qué significa el objeto O para un sujeto en un momento y circunstancias dadas?

El conocimiento se asume en el EOS como el conjunto de relaciones que el sujeto (persona o institución) establece entre los objetos y las prácticas, relaciones que se modelizan mediante la noción de *función semiótica*. La función semiótica se entiende como la correspondencia entre un objeto antecedente (expresión, significante) y otro consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución), según un criterio o regla de correspondencia.

Toda entidad que participa en un proceso de semiosis, interpretación o juego de lenguaje, es objeto, pudiendo desempeñar el papel de significante o significado. Los propios sistemas de prácticas son objetos y pueden ser componentes de la función semiótica. De estos supuestos se deduce el siguiente principio:

> PSC_1: El conocimiento de un objeto *O* por parte de un sujeto *X* (sea individuo o institución) sería el conjunto de funciones semióticas que *X* puede establecer en las que se pone en juego *O* como funtivo (expresión o contenido). Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante, constituye un conocimiento y depende de las circunstancias fijadas en el acto de interpretación.

Hablar de conocimiento equivale a hablar del contenido de una (o muchas) función semiótica, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre los diversos tipos de prácticas y objetos. De ahí, el siguiente principio:

> PSC_2: La correspondencia entre un objeto y el sistema de prácticas donde interviene tal objeto se interpreta como el "significado de dicho objeto" (institucional o personal)[4].

Puesto que los sistemas de prácticas que se ponen en juego en la resolución de las situaciones-problema son relativos a las personas y a las comunidades de prácticas (instituciones), los significados y, por tanto, los conocimientos, son relativos. No obstante, es posible reconstruir un *significado global* u holístico de un objeto mediante la exploración sistemática de los contextos de uso del objeto y los sistemas de prácticas que se ponen en juego para su solución. Dicho significado holístico se usa como modelo epistemológico y cognitivo de referencia de los significados parciales o sentidos que puede adoptar dicho objeto y constituye una herramienta metodológica ontosemiótica-cognitiva:

> MSC_1: Un método para delimitar los diversos significados de los objetos matemáticos y, por tanto, para la reconstrucción de los modelos de referencia epistemológica y cognitiva, es el análisis de los sistemas de prácticas (personales e institucionales) y de las configuraciones ontosemióticas implicadas en los mismos.

La noción de significado institucional de los objetos matemáticos conlleva el reconocimiento de una pluralidad de significados[5]. Es obvio que se cuestionan los modelos epistemológicos rígidos y uniformes y en cada caso será necesario reconstruir significados específicos que deben, no obstante, evolucionar hacia un modelo progresivamente más rico. El posicionamiento pragmatista del EOS lleva a entender la comprensión como competencia y no tanto como proceso mental: se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas.

En la Figura 2 se resume las entidades básicas que constituyen la modelización epistemológica y

[4] *Esta es una interpretación creativa de la máxima pragmática de Peirce (1958).*
[5] *Como se ha sugerido, los significados son entendidos de manera pragmatista (sistemas de prácticas operativas, discursivas y normativas), y dependen de los contextos de uso y comunidades de prácticas.*

cognitiva del conocimiento matemático que propone el EOS: las nociones de práctica, objeto, proceso (secuencia de prácticas de las que emerge el objeto) y función semiótica (noción mediante la cual se relacionan las diversas entidades). Se asume que las prácticas matemáticas se realizan en un trasfondo ecológico (material, biológico y social) que determina la relatividad institucional, personal y contextual de las prácticas, los objetos y significados, esto es, relatividad respecto de los juegos de lenguaje y formas de vida (Wittgenstein, 1973/1953).

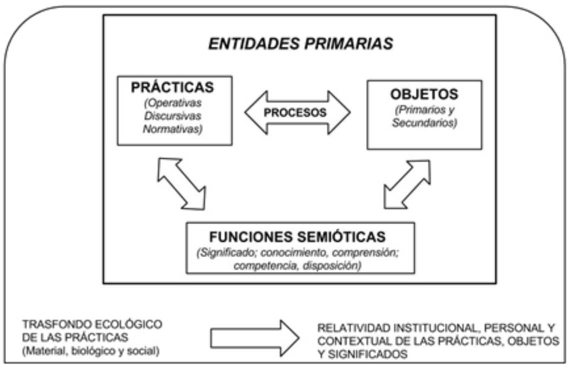


Figura 2. Entidades primarias de la ontología y epistemología EOS
Fuente: Godino (2014, p. 9)

Aunque las entidades primarias mencionadas anteriormente (Figura 2) explicitan los fundamentos de los análisis epistémicos y cognitivos, es necesario elaborar otras herramientas para poder realizar un análisis didáctico integral que sirva de fundamento para el diseño, implementación y evaluación de los procesos instruccionales. Como se sintetiza en la Figura 3, dicho análisis requiere tener en cuenta otras dimensiones, facetas, niveles y fases implicadas en dichos procesos.

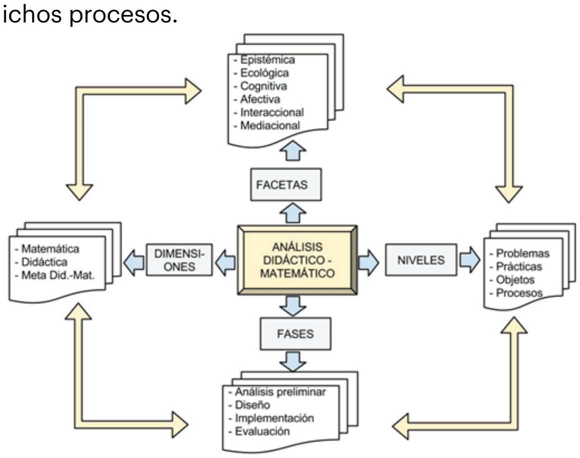


Figura 3. Focos de atención del análisis didáctico-matemático
Fuente: Godino (2014, p. 7)

3.4. Problema educativo-instruccional

El componente educativo-instruccional de la didáctica estudia los procesos de enseñanza y aprendizaje que tienen lugar en cualquier "institución didáctica" con el fin de optimizar dichos procesos. Su pregunta primordial es la siguiente:

> *QEI1: ¿Qué es la enseñanza? ¿Qué es el aprendizaje? ¿Cómo se relacionan?*

El modelo de instrucción[6] que se asume en el EOS está basado en los principios de la psicología cultural/discursiva (Lerman, 2001; Radford, 2011), que atribuye un papel clave a la "zona de desarrollo potencial" (Vygotsky, 1995/1934). Contrariamente a los modelos constructivistas, la autonomía del estudiante en el proceso de aprendizaje es el resultado de dicho proceso y no un prerrequisito del mismo. No obstante, dado el papel central que la perspectiva antropológica del conocimiento da a los problemas y la actividad implicada en su resolución, la búsqueda, selección y adaptación de buenas situaciones-problema y la implicación de los estudiantes en su resolución es también un principio de la instrucción matemática significativa. Se deriva de este supuesto un modelo instruccional de tipo mixto, en el que la construcción y la transmisión del conocimiento se articulan de manera dialéctica (Godino, Batanero, Cañadas y Contreras, 2016) y se resumen en los siguientes principios:

> PEI_1: Se postula que el aprendizaje tiene como finalidad la apropiación por los estudiantes de los significados y objetos institucionales que le permitan afrontar la solución de determinados problemas y desarrollarse como persona.
>
> PEI_2: El estudio de los significados personales de los estudiantes es un componente esencial de la problemática educativa, ya que la apropiación de los significados institucionales pretendidos está condicionada por los significados personales iniciales de los estudiantes.

Los significados institucionales finalmente implementados en un proceso de instrucción pueden ser diferentes de los pretendidos y de referencia, debido a las restricciones impuestas por las posibilidades cognitivas de los estudiantes, los recursos disponibles y el contexto social y educativo. Se espera, no obstante, que los significados de los objetos institucionales pretendidos e implementados en un contexto educativo dado sean una muestra representativa del significado de referencia global.

La noción de *configuración didáctica* constituye la principal herramienta metodológica para el análisis a nivel micro de los procesos de instrucción (Godino

[6] *Relación entre enseñanza y aprendizaje de un contenido específico.*

et al., 2007). Se define como cualquier segmento de actividad didáctica (enseñanza y aprendizaje) comprendido entre el inicio y fin del proceso de resolución de una situación-problema. Incluye, por tanto, las acciones de los estudiantes y del profesor, así como los medios planificados o usados para abordar la tarea. La Figura 4 resume los componentes y dinámica interna de las configuraciones didácticas, las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje y los principales procesos matemáticos ligados a la modelización ontosemiótica del conocimiento matemático. También se refieren algunos procesos didácticos ligados a la conexión entre las configuraciones instruccional y cognitivo-afectiva: planificación, motivación, institucionalización, evaluación, recepción, aceptación, indagación, ejercitación y aplicación. Otra herramienta metodológica para el análisis de la instrucción es la secuencia de configuraciones didácticas que constituye una *trayectoria didáctica.*

> MEI$_1$: Para investigar los procesos de instrucción se realiza el análisis de la configuración didáctica (trama de acciones docente y discentes y medios usados para abordar el estudio de una situación-problema) y trayectoria didáctica (secuencia de configuraciones didácticas).

En toda configuración didáctica (Figura 4) se puede diferenciar tres componentes: a) una configuración epistémica (sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos institucionales requeridos en la tarea), b) una configuración instruccional (sistema de funciones docentes, discentes y medios instruccionales que se utilizan, así como las interacciones entre los distintos componentes) y c) una configuración cognitivo-afectiva (sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos personales que describe el aprendizaje y los componentes afectivos que le acompañan). Ello da origen a la siguiente problemática:

> *QEI$_2$: ¿Qué tipos de interacciones entre personas, conocimientos y recursos se deberían implementar en los procesos instruccionales para optimizar los aprendizajes?*

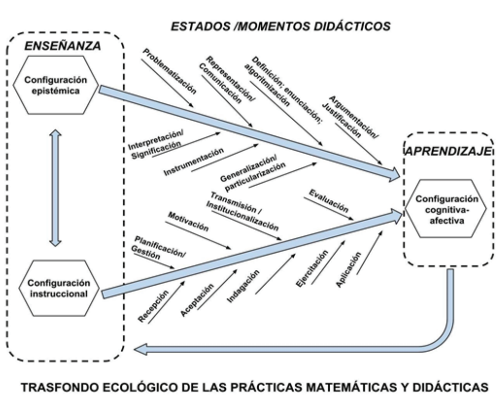


Figura 4. Componentes y dinámica de una configuración didáctica
Fuente: Godino (2014, p. 31)

Las relaciones entre enseñanza y aprendizaje no son lineales, sino cíclicas y complejas. En momentos de indagación, el estudiante interacciona con la configuración epistémica sin intervención del docente (o con una influencia pequeña). Esta interacción condiciona las intervenciones docentes, que deben estar previstas en la configuración instruccional, quizás no totalmente en su contenido, pero sí en su naturaleza, necesidad y utilidad. La trayectoria cognitiva produce ejemplos, significados, argumentos, etc., que condicionan el proceso de instrucción y, en consecuencia, influyen en las configuraciones epistémica e instruccional, posibilitando o restringiendo los aprendizajes. En consecuencia, surge el siguiente principio:

> PEI$_3$: La optimización de los procesos de estudio requiere tener en cuenta factores de nivel macro y micro. Esa optimización será en muchos casos local, por lo que fijadas unas determinadas condiciones es necesario indagar las circunstancias y recursos necesarios para su optimización.

3.5. Problema ecológico

Esta problemática analiza la diversidad de factores y normas que pueden condicionar los procesos de enseñanza y aprendizaje, y se sintetiza en la siguiente pregunta:

> *QEC$_1$: ¿Qué factores condicionan y soportan el desarrollo de los procesos instruccionales y qué normas los regulan?*

Los factores y normas que regulan el proceso de enseñanza y aprendizaje han sido objeto de investigación en didáctica de las matemáticas; en el caso de las normas, estas han sido estudiadas principalmente por los autores que basan sus trabajos en el interaccionismo simbólico (Blumer, 1982/1969). Se trata de tener en cuenta las normas, hábitos y convenciones, generalmente implícitos, que regulan el funcionamiento de la clase de Matemáticas y que condicionan en mayor o menor medida los conocimientos que construyen los estudiantes. Por otro lado, hay factores que no son propiamente normas pero que afectan al sistema didáctico; por ejemplo, la edad de los estudiantes o sus capacidades, la preparación de los profesores o los recursos dedicados a la enseñanza.

En Godino, Font, Wilhelmi y De Castro (2009) se aborda el estudio sistemático y global de estas nociones teóricas desde la perspectiva del EOS, tratando de identificar sus conexiones y complementariedades, y reconocer nuevos tipos de normas que faciliten el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Figura 5).

Tanto los factores como las normas pueden referirse a las seis facetas que se deben tener en cuenta en el análisis de los procesos de instrucción: epistémica,

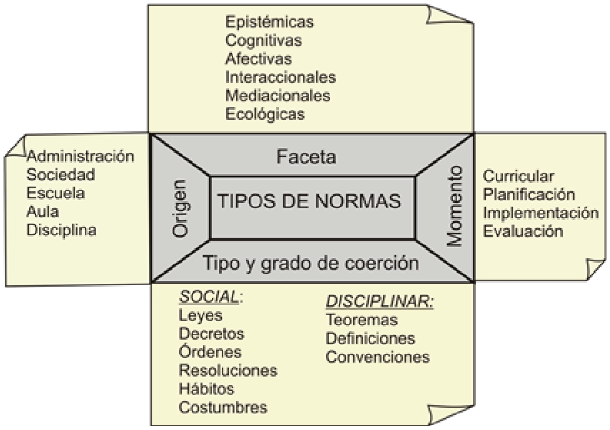


Figura 5. Tipos de normas

Fuente: Godino (2014, p. 38)

cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica.

PEC$_1$: La identificación de la trama de factores y normas que condicionan los procesos de instrucción se considera esencial para:

- Valorar la pertinencia de las intervenciones de profesores y estudiantes, teniendo en cuenta el conjunto de factores y normas que condicionan la enseñanza y el aprendizaje.

- Sugerir cambios en los tipos de normas que ayuden a mejorar el funcionamiento y control de los procesos de instrucción, con vistas a una evolución de los significados personales hacia los significados institucionales pretendidos.

- Identificar formas de actuar sobre algunos factores que influencian el sistema: por ejemplo, maneras de mejorar las actitudes de los alumnos o de atender a los estudiantes con mayor o menor capacidad que el promedio.

3.6. Problema de optimización del proceso de instrucción: criterios de idoneidad didáctica

El fin último de la investigación didáctica es la mejora del aprendizaje y para ello es necesario contar con una serie de criterios que aseguren dicha optimización, como se recoge en la siguiente cuestión:

QOA$_1$. ¿Qué tipo de acciones y recursos se debería implementar en los procesos de instrucción para optimizar el aprendizaje matemático?

La forma que pueden adoptar los conocimientos didácticos es diversa; pueden ser clarificaciones sobre la naturaleza de la práctica matemática y de los sistemas conceptuales mediante la cual se organiza, principios didácticos de actuación preferente, o también recursos instruccionales experimentados y contrastados. De ello se deducen dos principios:

POA$_1$: Los principios y los recursos instruccionales no se consideran como reglas o leyes generales, inferidas de manera positivista, sino como criterios de idoneidad o actuación preferente sobre los cuales se ha generado un cierto consenso en la comunidad de educación matemática.

POA$_2$: Tales criterios tienen que ser aplicados localmente, por lo que se deben adaptar e interpretar por parte del profesor, y se refieren a cada una de las facetas implicadas en los procesos de instrucción matemáticos: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional.

En el sistema teórico que configura el EOS se ha incluido la noción de *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de optimización de un proceso de instrucción matemática. Se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (*aprendizaje*) y los significados institucionales pretendidos o implementados (*enseñanza*), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (*entorno*). Esto supone la articulación coherente y sistémica de seis facetas: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (Figura 6).

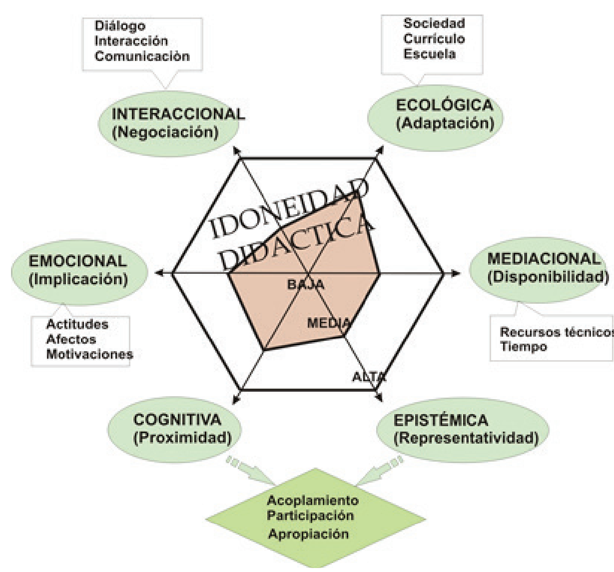


Figura 6. Idoneidad didáctica

Fuente: Godino (2013, p. 116)

El criterio general de idoneidad se ha particularizado para cada faceta, teniendo en cuenta algunos supuestos y herramientas del EOS, y se ha elaborado un sistema de indicadores empíricos de idoneidad para los diversos componentes (Breda, Font y Pino-Fan, 2018; Godino, 2013). Por ejemplo, para la faceta epistémica se puede formular el siguiente criterio parcial:

> POA_3: Los significados de los objetos institucionales pretendidos en cada contexto educativo deben ser una muestra representativa del significado de referencia global del objeto y tener en cuenta las restricciones de los contextos y sujetos implicados.

El logro de una alta idoneidad didáctica requiere un equilibrio entre los diferentes criterios parciales relativos a las distintas facetas, teniendo en cuenta el contexto en que tiene lugar. Supongamos, por ejemplo, que hay consenso en que uno de los criterios es que los alumnos hayan aprendido (criterio cognitivo), que otro sea que se les haya enseñado unas matemáticas relevantes (con resolución de problemas, modelización, etc.) (criterio epistémico) y otro sea que se debe motivar a los alumnos para conseguir su implicación (criterio afectivo). Es relativamente fácil conseguir alguno de estos tres criterios por separado, pero lo que es más difícil y valioso es conseguir un cierto equilibrio entre los tres. Metafóricamente, un barco se hunde si no lleva la carga equilibrada.

La idoneidad es relativa a unas circunstancias temporales y contextuales cambiantes, lo que requiere una actitud de reflexión e investigación por parte del profesor y demás agentes que comparten la responsabilidad del proyecto educativo. Implica la asunción de una racionalidad axiológica en educación matemática que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio y, en definitiva, responder a la pregunta genérica ¿sobre qué aspectos se puede incidir para la mejora progresiva de los procesos de instrucción matemática?

La noción de idoneidad está inspirada en la teoría consensual de la verdad de Peirce (1958) y de sus desarrollos y adaptaciones posteriores realizadas por autores como Apel (1991) y Habermas (1997). En esta teoría, "verdadero" es, en principio, un enunciado para un usuario cuando cree que cualquier otro sujeto racional estaría dispuesto a asignar el mismo predicado al enunciado. La verdad no se piensa en relación a un mundo separado de ideas, no como "conformidad" con ideas trascendentes, sino como aquello que podría ser defendido ante un conjunto de interlocutores y aceptado por ellos.

3.7. Problema de formación de profesores

La investigación en didáctica de las matemáticas, como campo científico y tecnológico, debe abordar el problema de la formación de profesores, como un medio fundamental de incidir sobre la práctica educativa. Esto lleva a la siguiente cuestión:

> *QFP: ¿Qué conocimientos y competencias deberían tener los profesores para optimizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?*

La perspectiva global sobre la investigación y la práctica de la educación matemática que adopta el EOS lleva a formular los siguientes principios sobre la cuestión de la formación de profesores:

> PFP_1: La formación de profesores debería tener en cuenta las diferentes dimensiones, fases, facetas y niveles de análisis implicados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

> PFP_2: Los profesores deben tener los conocimientos didáctico-matemáticos necesarios para analizar y comprender los procesos instruccionales y las competencias profesionales necesarias para una acción idónea sobre dichos procesos.

La Figura 7 resume las dimensiones a tener en cuenta (matemática, didáctica y metadidáctica), las fases del diseño didáctico (estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación), las facetas (epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica) y los niveles de análisis (problemas, prácticas, objetos y procesos). Este sistema de elementos proporciona criterios para categorizar los conocimientos didáctico-matemáticos que deben tener en cuenta los planes de formación de profesores de Matemáticas.

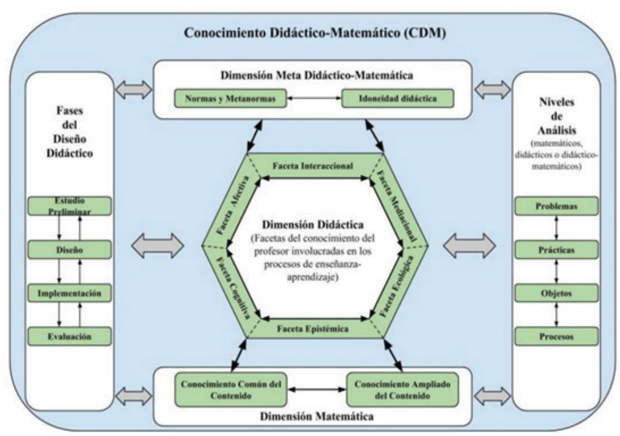


Figura 7. Dimensiones y componentes del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM)
Fuente: Pino-Fan y Godino (2015, p. 103)

La Figura 8 resume las competencias parciales que constituyen la competencia general de análisis e intervención didáctica, las cuales están asociadas al conocimiento y uso competente de las herramientas teóricas del EOS. En este marco, la competencia y el conocimiento se relacionan teniendo en cuenta las conexiones entre práctica y objeto. La práctica, como acción orientada al fin de resolver un problema o realizar una tarea, conlleva una capacidad o competencia por parte del sujeto que la realiza.

Figura 8. Componentes de la competencia de análisis e intervención didáctica
Fuente: Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017, p. 103)

4. Reflexiones finales

El EOS asume una concepción amplia de la didáctica como disciplina, al considerar que debe abordar cuestiones descriptivas, explicativas y predictivas, propias del conocimiento científico, y también prescriptivas y valorativas, propias del conocimiento tecnológico. En consecuencia, la didáctica debe proporcionar resultados que permitan la acción efectiva sobre una parcela de la realidad: la enseñanza y aprendizaje de la matemática en los diferentes contextos en que tiene lugar. Además, debe tener en cuenta los cuatro tipos de áreas problemáticas descritas en este trabajo y sus interacciones: epistemológica, ontológica, semiótica-cognitiva, educativa-instruccional, así como la formación de los profesores.

La didáctica puede ofrecer principios provisionales (normas que son llamadas en el EOS criterios de idoneidad) consensuados por la comunidad interesada en la educación matemática, que pueden servir, primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje y, segundo, para valorar sus implementaciones. Estos principios y normas son útiles en dos momentos:1) a priori, los criterios de idoneidad orientan cómo se debe llevar a cabo un proceso de instrucción, 2) a posteriori, los criterios sirven para valorar el proceso de enseñanza y aprendizaje efectivamente implementado e identificar posibles aspectos de mejora en el rediseño. Para generar estos principios los investigadores en educación matemática deben dialogar y colaborar con todos los demás sectores interesados en la mejora de la enseñanza de las matemáticas (profesores, padres, administración, etc.). Esto permitirá crear consensos que generen principios para orientar y valorar los procesos de instrucción, con la finalidad de conseguir una enseñanza idónea de las matemáticas. No obstante, la identificación de criterios de idoneidad, tanto generales como específicos, requiere de una agenda de investigación que se abre a discusión y desarrollo en la comunidad de educación matemática.

Por otra parte, la didáctica involucra el estudio de personas en interacción en contextos muy diversos. Están involucrados sistemas complejos, dinámicos, abiertos, heterogéneos, que conllevan múltiples y diversas interacciones. Estos sistemas tienen connotaciones caóticas, donde pequeños cambios pueden dar lugar a grandes desviaciones; los pequeños cambios tienen lugar a nivel micro y, por tanto, deben ser estudiados como posibles factores explicativos de los cambios observables a nivel macro. En consecuencia, la didáctica debe contemplar el uso de unidades de análisis a nivel micro (una tarea o una interacción profesor-estudiante de carácter puntual) y a nivel macro (un campo de problemas, una trayectoria didáctica a largo plazo, el contexto sociocultural).

Agradecimiento:

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación PID2019-105601GB-I00, EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, UE) y apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 del PAI (Junta de Andalucía, España).

Referencias bibliográficas

Apel, K. O. (1991). *Teoría de la verdad y ética del discurso*. Barcelona: Paidós e I.C.E. de la Universidad de Barcelona.

Bloor, D. (1983). *Wittgenstein A social theory of knowledge*. London: The Macmillan Press. https://doi.org/10.1007/978-1-349-17273-3

Blumer, H. (1982). *El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método*. Barcelona: Hora (trabajo original publicado en 1969).

Breda, A., Font, V., y Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema, 32*(60), 255-278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Brousseau, G. (1989). La tour de Babel. *Etudes en Didactique des Mathématiques*. *Article occasionnel n. 2*. Université de Bordeaux II: IREM.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73-112. Recuperado desde http://www.numdam.org/item/PSMIR_1991__S6_160_0/

Cobb, P., y Bauersfeld, H. (Eds.). (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

D'Amore, B., y Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(2), 191-218. Recuperado desde http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362007000200002&script=sci_arttext&tlng=en

Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97-124.

Gascón, J., y Nicolás, P. (2017). Can didactics say how to teach? The beginning of a dialogue between the anthropological theory of the didactic and other approaches. *For the Learning of Mathematics, 37*(3), 26-30.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132. Recuperado desde https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/14720

Godino, J. D. (2014). *Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: motivación, supuestos y herramientas teóricas*. Universidad de Granada. Recuperado desde https://www.ugr.es/~jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355. Recuperado desde https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R., y Contreras, J. M. (2016). Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics and experimental sciences. *Acta Scientiae, 18*(4), 29-47. Recuperado desde http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/2546/0

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 59-76. Recuperado desde https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/132207

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2), 247-265. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9278-x

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 3*1(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Habermas, J. (1997). Teorías de la verdad. En J. A. Nicolás, y M. J. Frápoli (Eds.), *Teorías de la verdad en el siglo XX* (pp. 543-596). Madrid: Tecnos.

Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: a sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 47*, 87-113. https://doi.org/10.1023/A:1014031004832

Lesh, R., y Sriraman, B. (2010). Re-conceptualizing mathematics education as a design science. En B. Sriraman, y L. English (Eds.), *Theories of mathematics education. Seeing new frontiers* (pp. 123-146). Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2_14

Peirce, Ch. S. (1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. 1931-1935. Cambridge, MA: Harvard UP.

Pino-Fan, L., y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109. Recuperado desde http://docente.ulagos.cl/luispino/wp-content/uploads/2015/07/2662-6235-1-PB.pdf

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 40*(2), 317-327. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0090-3

Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas. En J. Vallès, D. Álvarez, y R. Rickenmann (Eds.), *L'activitat docent. Intervenció, innovació, investigació* (pp. 33-49). Girona, España: Documenta Universitaria.

Steiner, H. G. (1985). Theory of mathematics education (TME): an introduction. *For the Learning of Mathematics, 5*(2), 11-17. Recuperado desde www.jstor.org/stable/40247775

Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. Barcelona: Paidós (trabajo original publicado en 1934).

Wittgenstein, L. (1973). *Investigaciones filosóficas.* Barcelona: Crítica (trabajo original publicado en 1953).

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.22

CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS DE LAS OPERACIONES DEL ESPACIO VECTORIAL A TRAVÉS DE CONJUNTOS LINEALMENTE INDEPENDIENTES/DEPENDIENTES

CONSTRUCTION OF MEANINGS OF VECTOR SPACE OPERATIONS THROUGH LINEAR INDEPENDENT/DEPENDENT SETS

Marcela Parraguez, marcela.parraguez@pucv.cl
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

RESUMEN

La investigación tiene como objetivo mostrar evidencias, con sustento teórico, sobre la construcción de significados de las operaciones suma y multiplicación por escalar que definen a un espacio vectorial, a través de conjuntos linealmente independientes/dependientes. El marco teórico utilizado es la teoría APOE (acrónimo de acción, proceso, objeto y esquema), situada en el desarrollo de las operaciones del espacio vectorial a través de dos indicadores de construcción insertos en los conjuntos linealmente independientes/dependientes: el cero vector y la combinación lineal. Las tres componentes del ciclo de investigación de APOE –análisis teórico, diseño y aplicación de instrumentos, y análisis y verificación de datos– determinan la estructura general del estudio. Los resultados obtenidos a través del trabajo de conjuntos linealmente independientes/dependientes indican que el significado de las operaciones del espacio vectorial está vinculado a acciones sobre el objeto concreto del cero vector y los procesos que se derivan de esas acciones son encapsulados en objetos abstractos del álgebra lineal.

PALABRAS CLAVE:
Conjuntos linealmente independientes/dependientes; teoría APOE; operaciones del espacio vectorial.

ABSTRACT

The research aims to show evidence with theoretical support of the construction of meanings of the operations sum and multiplication by scalar, which define a vector space through linearly independent/dependent sets. The theoretical framework used is the APOS Theory (acronym of action, process, object and scheme), located in the development of vector space operations through two indicators of the construction, inserted in the linearly independent/dependent sets: the zero vector and the linear combination. The three components of the APOS research cycle –theoretical analysis, instrument design and application, and data analysis and verification– determine the overall structure of the study. The results obtained through the work of linearly independent/dependent sets indicate that the meaning of the operations of the vector space is linked to actions on the specific object of the zero vector and the processes that derive from those actions are encapsulated in abstract objects of linear algebra.

KEYWORDS:
Linearly independent/dependent sets; APOS theory; vector space operations.

Recibido: 28 de febrero de 2020, Aceptado: 19 de mayo de 2020

1. Introducción

La enseñanza de los conceptos básicos del álgebra lineal: espacio vectorial, combinación lineal, conjunto generador, conjunto linealmente independiente (li)/dependiente (ld), base, transformaciones lineales, valores y vectores propios, son temas que se encuentran presentes en la mayoría de los programas de matemáticas para carreras como Ingeniería, Licenciatura en Ciencias o Economía, y lo que acá se propone es analizar cómo uno de ellos –el concepto de conjunto li/ld– tributa a dar significado a las operaciones suma y producto por escalar del espacio vectorial.

Existen numerosas investigaciones que ofrecen evidencias sobre las dificultades que muestran los estudiantes para comprender y aprender diferentes conceptos de álgebra lineal, en tópicos como transformación lineal (Roa-Fuentes y Parraguez, 2017), coordenadas de vectores (Parraguez, Lezama y Jiménez, 2016), base de un espacio vectorial (Arnon et al., 2014), combinación lineal (Parraguez y Uzuriaga, 2014), espacios vectoriales sobre cuerpos finitos (Weller et al., 2002), espacios vectoriales sobre un cuerpo (Parraguez y Oktaç, 2010), entre otros. Investigadores franceses (Dorier, 1995) nos hablan del obstáculo del formalismo. Dicho obstáculo se manifiesta en los estudiantes que manipulan los objetos del álgebra lineal mecánicamente. Estos autores concluyen que, para la mayoría de los estudiantes, el álgebra lineal es solo un catálogo de nociones muy abstractas que ellos no manejan. Aunado a la anterior, se suma que, en la mayoría de las universidades, los cursos de Álgebra Lineal no son exitosos (Harel, 1989; Sierpinska, 2000).

Específicamente, para los conceptos de vectores li y de conjunto de vectores ld, en las investigaciones realizadas con una diversidad de marcos teóricos (Chargoy, 2006; Kú, Trigueros y Oktaç, 2008; Oropeza y Lezama, 2007; Saldanha, 1995), se logra poner en evidencia que incluso los estudiantes exitosos en los cursos de Álgebra Lineal no logran la comprensión del concepto. En relación con el concepto de espacio vectorial Parraguez (2013), Parraguez y Oktaç (2010), Rodríguez, Parraguez y Trigueros (2018), muestran que la construcción del concepto espacio vectorial se logra mediante la coordinación de las operaciones suma y multiplicación por escalar. Por otro lado, Parraguez y Bozt (2012), ponen en evidencia, a través de la teoría de los Modos de Pensar (Sierpinska, 2000), que la comprensión de los conjuntos li/ld se logra en un trabajo articulado de combinación lineal y sistemas de ecuaciones lineales.

Dado el escenario de resultados que las investigaciones mencionadas anteriormente nos muestran en relación con las dificultades intrínsecas que los tópicos de álgebra lineal, y particularmente las que los conceptos li/ld y espacio vectorial generan en un aprendiz, se hace necesario seguir indagando en estas temáticas. Y es en beneficio de los futuros profesionales el preguntarse: ¿Cómo contribuye el trabajo con conjuntos de vectores li/ld en la construcción del significado de las operaciones suma y multiplicación por escalar del espacio vectorial?

Con la respuesta a la pregunta anterior, la principal contribución de este artículo, en el campo de la Matemática Educativa de pregrado, es mostrar cómo estudiantes de Álgebra Lineal entienden y le dan significado a las operaciones que definen al espacio vectorial, cuando trabajan con conjuntos li/ld en espacios vectoriales con unas operaciones bien particulares.

2. Objetivo de la investigación

Con la finalidad de alcanzar una respuesta a la pregunta que guía la investigación, el objetivo de la presente radica en describir las estructuras matemáticas que los aprendices ponen en juego para la construcción o reconstrucción de significados de las operaciones suma y multiplicación por escalar del espacio vectorial.

Antes de exponer el marco teórico, vamos a presentar un análisis teórico de la estructura de espacio vectorial, a través de las operaciones suma y multiplicación por escalar, el cual será la base para la interpretación del significado de las operaciones de un espacio vectorial.

3. Análisis teórico de la estructura espacio vectorial

Los diferentes tipos de estructuras algebraicas están sujetos a la naturaleza de las propiedades que se cumplen para la o las operaciones en un conjunto dado. Así, un espacio vectorial V sobre un cuerpo K es una estructura algebraica donde se definen dos operaciones –suma y multiplicación por escalar– que, a diferencia del anillo y del cuerpo, una de esas operaciones –multiplicación por escalar– relaciona elementos de dos conjuntos, V y K, para operarlos (Figura 1).

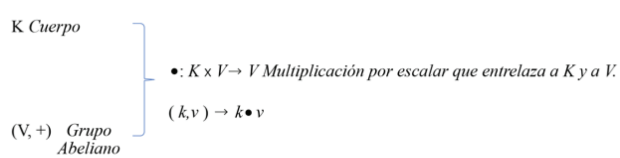
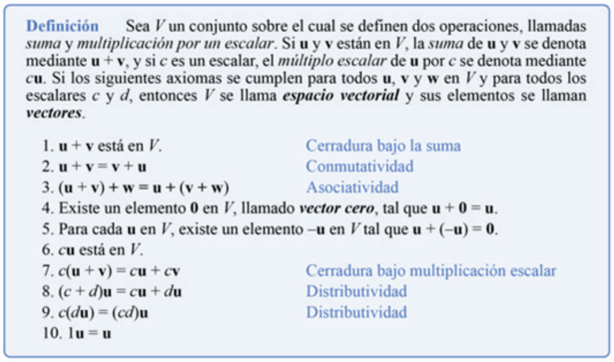


Figura 1. Operación entre los elementos de V y K.

Fuente: Elaboración propia.

La mayoría de los libros de textos de Álgebra Lineal se adhiere a una definición de espacio vectorial, como la de la Figura 2, en la cual no se hace explícita la definición de las operaciones suma y multiplicación por escalar como función.


Definición Sea V un conjunto sobre el cual se definen dos operaciones, llamadas *suma* y *multiplicación por un escalar*. Si **u** y **v** están en V, la *suma* de **u** y **v** se denota mediante **u** + **v**, y si c es un escalar, el *múltiplo escalar* de **u** por c se denota mediante c**u**. Si los siguientes axiomas se cumplen para todos **u**, **v** y **w** en V y para todos los escalares c y d, entonces V se llama ***espacio vectorial*** y sus elementos se llaman ***vectores***.

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en V. Cerradura bajo la suma
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ Conmutatividad
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ Asociatividad
4. Existe un elemento **0** en V, llamado ***vector cero***, tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$.
5. Para cada **u** en V, existe un elemento $-\mathbf{u}$ en V tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
6. $c\mathbf{u}$ está en V.
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ Cerradura bajo multiplicación escalar
8. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ Distributividad
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$ Distributividad
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Figura 2. Definición de espacio vectorial.

Fuente: Poole (2011, p. 447).

Con base en la definición de la Figura 2, para determinar un espacio vectorial se consideran dos conjuntos no vacíos: V (cuyos elementos son vectores) y K, un Cuerpo o Campo que también está dotado de otras dos operaciones, esto es K (+, ·). Las dos operaciones que definen a V, las haremos explícitas para su análisis. *La suma de vectores* será descrita mediante la función +: V×V V, anotada por *(x, y) (x+y)* y que satisface los cinco primeros axiomas de la Figura 2 , y la *multiplicación por escalar* será descrita como una función fija •: K×V V, anotada por (α, x)→ α•x y que también satisface los otros cinco axiomas de la Figura 2 –pero axiomas diferentes a los de la operación anterior–.

Mirando con más detalle la definición de la Figura 2, ella nos muestra que un espacio vectorial sobre un cuerpo K es una estructura algebraica provista de dos operaciones (una suma de vectores y una multiplicación por escalar), las cuales entrelazan a K y a V a través de los axiomas (Figura 3) que son requeridos para transformar a [K(+, ·), (V, +),•] en un todo único, estructuralmente hablando.

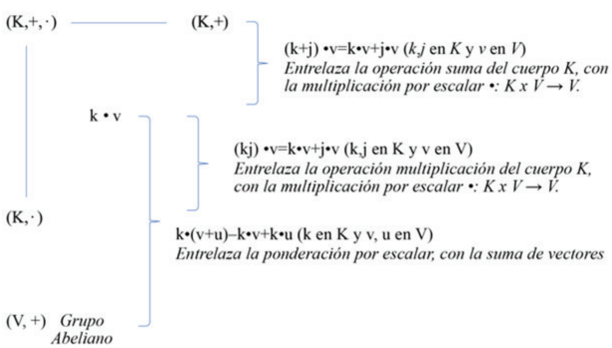


Figura 3. Necesidad de axiomas para entrelazar a [K, (V, +)] y [K, (V, •)].

Fuente: Elaboración propia.

Detenerse a realizar esta reflexión permite mirar la estructura de [K(+, ·), (V, +), •] como un todo integrado, donde la necesidad de algunas propiedades axiomáticas contribuye a un entrelazamiento algebraico entre las operaciones que participan en la definición de espacio vectorial. Otros axiomas, sin embargo, obedecen a otra naturaleza, como, por ejemplo: *Existe un elemento* $1\in$ *tal que, para todo v en V*, 1•v=v *(identidad escalar)*, es parte del requerimiento para que el grupo K-{0} realice una acción[1] sobre el conjunto V.

En la teoría de los espacios vectoriales existe un concepto importante que pone de relieve las operaciones del espacio vectorial; ese concepto es el de combinación lineal de vectores, y en el contexto de esta investigación lo acotaremos a conjuntos li/ld.

Consideremos un conjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$

(V espacio vectorial sobre K), entonces cuando la ecuación vectorial:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \vec{0} \ (\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_1 \in K)$$

tiene al menos la solución trivial:

$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ y esta es la única solución, entonces se dice que *S* es un *conjunto li.* Si hay otras soluciones (además de la trivial) entonces *S* es un *conjunto ld*.

Para poner a prueba las definiciones anteriores, nos situaremos en el espacio vectorial de las funciones continuas $C([0,1], \mathbb{R})$ consideraremos f y g dos vectores de $C([0,1], \mathbb{R})$ con la suma y multiplicación por escalar usuales para las funciones, definidos por $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{2x}$

Entonces, ¿ f y g son li o ld?

Para responder, formamos la ecuación vectorial: $\alpha e^x + \beta e^{2x} = 0 (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, la cual es válida para todo $x \in [0,1]$, en particular, para:

$$\begin{aligned} x = 0: &\qquad \alpha + \beta = 0 \\ x = 1: &\qquad \alpha e + \beta e^2 = 0 \end{aligned}$$

De donde el determinante asociado al sistema de ecuaciones homogéneo $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha e + \beta e^2 = 0 \end{cases}$

[1] Una **acción** de un grupo ( ) sobre un conjunto *X* es una aplicación $\phi : G \times X \to X$ que cumple:

a) $\forall x \in X, \phi(e, x) = x$ donde e es el elemento neutro del grupo.

b) $\forall x \in X; \forall g, h \in G, \phi(g * h, x) = \phi(g, \phi(h, x))$

es $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e & e^2 \end{vmatrix} = e^2 - e = e(e-1) \neq 0$

por ende la solución del sistema es única $\alpha = \beta = 0$ y trivial.

Luego los vectores f y g son li.

Puestos en escena la definición de espacio vectorial y la de conjuntos li/ld, nuestra interrogante de investigación se enfoca en la construcción del significado de las operaciones suma y multiplicación por escalar del espacio vectorial, a través de conjuntos li/ld.

Para dar respuesta a dicha pregunta, se va a situar la investigación en el escenario de la construcción mental de conjuntos li/ld, poniendo de relieve las operaciones suma y multiplicación por escalar de un espacio vectorial.

4. Teoría

4.1. Acción, proceso, objeto, esquema

La teoría APOE, a través de su operacionalización en investigaciones de diversos tópicos (álgebra lineal, álgebra abstracta, cálculo, probabilidades, etc.), ha demostrado ser un marco teórico cognitivo-constructivista bastante exitoso para mostrar la construcción de conceptos en los estudiantes (Arnon et al., 2014).

El marco teórico APOE está compuesto de cuatro construcciones mentales: *acciones, procesos y objetos*, que luego se organizan en *esquemas* (Asiala et al., 1996; Dubinsky y McDonald, 2002), de ahí el acrónimo APOE. En el contexto del álgebra lineal, por ejemplo, una construcción de *acción* de *n-upla* podría darse al "tomar una cantidad específica de números y colocarlos en un orden particular" (Arnon et al., 2014, p. 20). Otro ejemplo: un estudiante muestra una construcción *acción* de *suma* de vectores si al considerar 2 vectores explícitamente del espacio vectorial, se realiza la adición y se verifica que el resultado es un elemento de dicho espacio.

La construcción mental *proceso* se puede evidenciar en un estudiante, cuando él puede "imaginar en su mente un procedimiento, sin tener que hacer necesariamente todos sus pasos explícitamente, y por lo tanto puede pensar en revertirlo y coordinarlo con otros *procesos*" (Dubinsky y McDonald, 2002, p. 3). En otras palabras, un *proceso* es una *acción interiorizada*. La interiorización es un mecanismo mental que "le permite al estudiante ser consciente de una acción, reflexionar sobre ella y combinarla con otras *acciones*" (Dubinsky, 1991, p. 107). Por ejemplo, una construcción *proceso* de *axioma* se muestra cuando un estudiante es capaz de explicar cómo cada axioma se verifica (sin tener la necesidad de realizar cálculos) para que un conjunto dado con operación suma y multiplicación por escalar sea un espacio vectorial.

Finalmente, el mecanismo de *encapsulación* logra una construcción mental *objeto*, es decir, la realización de "una estructura dinámica de *proceso*, a una estructura estática a la que se pueden aplicar las *acciones*" (Arnon et al., 2014, p. 21). En este sentido, la encapsulación es un mecanismo mental a través del cual un *proceso* (una operación o *acción interiorizada*) se transforma en un ente conceptual con derecho propio (un objeto). En el contexto del álgebra lineal, y de acuerdo al objetivo propuesto en esta investigación, con la construcción *objeto* se espera evidenciar que un estudiante sea consciente de los muchos *procesos* y transformaciones asociadas a los conjuntos li/ld, para dar significados a las operaciones del espacio vectorial. Por ejemplo, una construcción *objeto* de *combinación lineal* se evidencia cuando un estudiante determina si dos conjuntos de vectores diferentes forman dos subespacios vectoriales equivalentes.

4.2. Una descomposición genética para las operaciones suma y multiplicación por escalar de un espacio vectorial

Una descomposición genética (DG) es un modelo cognitivo que describe las construcciones y los mecanismos mentales (junto con las relaciones entre estos componentes) que desarrolla un estudiante para construir un concepto. Una DG propone hipotéticamente una descripción de las *acciones* en los *objetos* mentales existentes, los medios por los cuales estas *acciones* son interiorizadas como *procesos* mentales y también por los cuales estos *procesos* se encapsulan en *objetos* mentales (Arnon et al., 2014), cuando se considera el concepto de las operaciones suma y multiplicación por escalar de un espacio vectorial, que es el foco del presente escrito.

En la Tabla 1 se presenta, basándose en el análisis teórico de la estructura espacio vectorial, una DG del esquema de las operaciones de un espacio vectorial a [K(+, ·), (V, +,),•], utilizando como indicadores los conjuntos li/ld y el vector cero de V.

Construcción mental	Indicadores de la construcción mental
Acción	• La *acción* de escribir la combinación lineal igual al cero vector, para espacios vectoriales con operaciones usuales. • La *acción* de resolver el sistema homogéneo de ecuaciones $AX = 0$

Proceso	• La *acción* de escribir la combinación lineal igual al cero vector para espacios vectoriales con operaciones no usuales. • Repetir (y reflexionar sobre) las *acciones* de resolver el sistema homogéneo de espacios vectoriales con operaciones no usuales. • Repetir (y reflexionar sobre) el efecto de la *acción* total de variar el sistema de ecuaciones lineales a uno no homogéneo, $AX=b$, con $b\neq 0$ • Interiorización de que "b" del sistema $AX=b$, se relaciona con el vector nulo del espacio vectorial.
Proceso →Objeto	• Encapsulación del *proceso* resolver el sistema homogéneo de espacios vectoriales con operaciones no usuales en el *objeto* conjuntos li/ld de vectores. • Coordinación de los *procesos* combinación lineal igual que el cero vector para espacios vectoriales con operaciones no usuales y resolución del sistema, $AX=b$ con $b\neq 0$ • La *acción* de construir una combinación igual al cero vector para operaciones no usuales en el *objeto* conjuntos li/ld de vectores.
Objeto→Esquema	• Capacidad de dar significados a las operaciones del espacio vectorial, para que los axiomas que lo definen sean los coordinadores de los *procesos* de la suma y multiplicación por escalar. • Capacidad para articular la naturaleza del vector nulo con el elemento neutro del grupo abeliano (V, +) inserto en el espacio vectorial (V, +, •).

5. Método

Desde el paradigma cualitativo, la metodología será de carácter explicativo e interpretativo; a su vez se ha escogido el estudio de caso (Stake, 2010) como método para alcanzar el objetivo propuesto, porque permite una indagación en profundidad de una realidad específica y en un periodo de tiempo.

Los criterios seguidos para la conformación de los dos casos fueron: (a) Ser estudiante de primer año de universidad; (b) Haber sido estudiante de un curso de Álgebra Lineal y (c) Accesibilidad de los investigadores. Los casos quedaron constituidos tal como se presenta en la Tabla 2.

Tabla 2

Participantes y casos de estudio

Fuente: Elaboración propia.

Casos	**Participantes**	**Nivel**	**Características**	**Identificación**
Caso I	4 estudiantes de Ingeniería	Universitario	Ha aprobado la asignatura de Álgebra Lineal y se ha eximido de dar examen.	E1, E2, E3, E4.
Caso II	4 estudiantes de Pedagogía en Matemáticas	Universitario	Ha aprobado la asignatura de Álgebra Lineal.	E5, E6, E7, E8.

5.1. Recogida de datos

En esta indagación se utilizó como instrumento de recogida de datos un cuestionario escrito, constituido por dos actividades que se describen en la Tabla 3.

Tabla 3

Actividades del cuestionario

Fuente: Elaboración propia.

Actividad	**Preguntas**
A1	Sea $C([0,1],\ \mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas y si consideramos f y g dos vectores de $([0,1],\ \mathbb{R})$ definidos por $f(x)=e^{x}$ y $g(x)=e^{2x}$ ¿ f y g son li o ld?
A2	Sea $V=\{(a,b):a,b\in\mathbb{R}^{+}\}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, con las operaciones: **Suma de vectores:** $(a,b)+(c,d)=(ac,bd)$; $(a,b),(c,d)\in V$ **Multiplicación por escalar:** $k(a,b)=(a^{k},b^{k})$; $k\in\mathbb{R}$ y $(a,b)\in V$ Estudiar la dependencia lineal de los subconjuntos de V dados por: (i) S1={(2,1),(3,2)} (ii) S2={(1,1),(2,1)}

Las dos actividades diseñadas permiten a los estudiantes situarse en las construcciones descritas en la Tabla 1 para las operaciones de un espacio vectorial –Acción, Proceso, Proceso→Objeto, Objeto→ Esquema–, para dar respuestas a las actividades que se plantean.

6. Evidencias

Entre otras respuestas, esperamos de los estudiantes lo que sigue: (a) que utilicen como estrategias en sus respuestas los diferentes indicadores que se describen en la Tabla 1 para las construcciones mentales, (b) que utilicen el concepto de cero vector y combinación lineal para determinar si los conjuntos dados son li/ld, y (c) que determinen, a través de la solución de sistemas de ecuaciones lineales, si los conjuntos dados son li/ld.

Con la finalidad de mostrar un trabajo representativo de lo realizado por los estudiantes de los casos de estudio, es que hemos seleccionado algunos episodios de sus argumentos observables en las dos actividades.

6.1. Primera actividad

La pregunta que se plantea en la actividad A1 se puede responder mostrando que la combinación lineal de las funciones es igual a cero. Sin embargo, como veremos más adelante, bajo esta pregunta es posible apreciar tipos de respuestas factibles de ser clasificadas de acuerdo con las construcciones mentales que suponen: *acción en vías de alcanzar un proceso* y un *proceso encapsulado en un objeto*, todos ellos con relación a la posibilidad de caracterizar, a través de un sistema de ecuaciones, a un conjunto de vectores li. Consideramos que el estado de construcción mental *acción* en vías de alcanzar *proceso* puede evidenciarse cuando el estudiante sabe que, para analizar la dependencia lineal de un conjunto, se debe determinar un sistema de ecuaciones lineales, pero muchas veces en este estado de construcción los estudiantes no logran plantear una adecuada combinación lineal y su justificación se reduce a procedimientos algebraicos. Un ejemplo de este tipo de estructura de construcción mental se puede ver en la resolución de E2, quien procede de una manera mecánica –de acuerdo con un algoritmo previamente construido–, que describe como un criterio: *si el determinante es cero: es ld, y si es distinto de cero: es li.* E2 calcula el determinante y obtiene una expresión no nula, concluye así que el conjunto es li, como se muestra en la Figura 4.

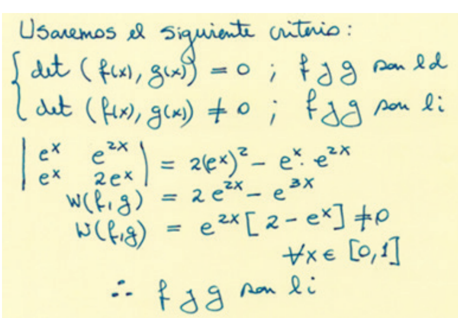


Figura 4. E2 muestra una estructura de construcción mental acción en vías de llegar a ser proceso para caracterizar un determinante asociado a un conjunto de vectores li.
Fuente: Datos de la investigación.

Otro tipo de respuesta a la actividad A1 da cuenta de la estructura mental proceso para el mismo concepto anterior. Para analizar la dependencia lineal de un conjunto, E6 recurre a la definición *un conjunto finito de vectores es ld si existen escalares que permiten que el vector nulo sea combinación lineal de los vectores del conjunto, de tal manera que al menos uno de los escalares sea no nulo*, entonces E6 se plantea primeramente una ecuación y luego el sistema de ecuaciones asociado. En esta situación, en general los estudiantes tienden a resolver el sistema escalonando la matriz o bien utilizando otros métodos de resolución de sistemas. Esta técnica, si bien resulta efectiva, muchas veces es engorrosa de seguir y termina convirtiéndose en una herramienta muy compleja para llegar a una conclusión. Esto fue lo que le sucedió a E6, pero no tuvo éxito al momento de aclarar la relación entre los escalares de la combinación lineal, entonces abandonó el procedimiento a medio camino, indicando (ver Figura 5) que para resolver el sistema hay que darle valores a un parámetro. Interpretamos esta manera de proceder como una estructura de construcción mental *proceso*, pues aunque se tiene conocimiento de la propiedad y esta se pone en ejecución de manera operativa, no se logra una reconstrucción funcional y práctica de las transformaciones necesarias para dar una respuesta a A1, es decir, la elección de la estrategia no es la más pertinente en función del tipo de problema y, por lo tanto, E6 no alcanza la estructura de construcción *objeto*, como se muestra en la Figura 5.

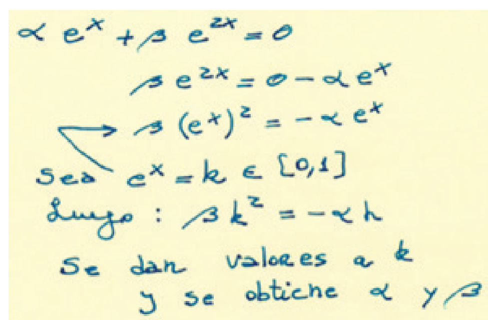


Figura 5. E6 muestra una estructura de construcción mental proceso para caracterizar el sistema de ecuaciones lineales asociado a un conjunto de vectores ld.
Fuente: Datos de la investigación.

Además de las estructuras de construcción mental antes mencionadas, se evidenció que, si el estudiante lograba expresar y caracterizar el sistema de ecuaciones asociado a la combinación lineal de un conjunto de vectores li de manera relativamente inmediata, entonces había encapsulado el *proceso* en el *objeto* para el concepto conjunto de vectores li. Para ilustrar esto, se utilizará la respuesta de E5, quien expresa la combinación lineal de las funciones y las iguala a cero y, dando valores a los escalares, determina si son li/ld. Luego señala que f y g son li, como se puede observar en la Figura 6.

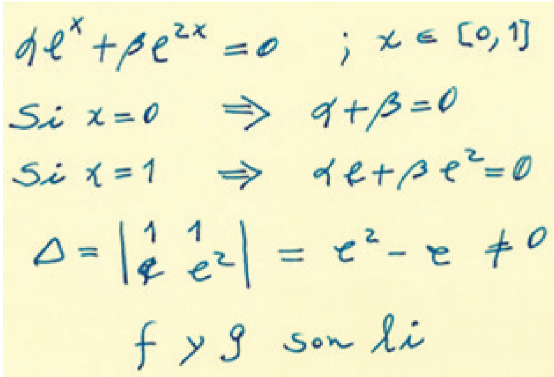


Figura 6. E5 muestra una estructura de construcción mental objeto para el concepto conjunto de vectores li.
Fuente: Datos de la investigación.

6.2. Segunda actividad

Para abordar el concepto de los conjuntos li/ld, los estudiantes también evidenciaron que se debe volver sobre algunos conceptos –como conocimiento previo–, como el de combinación lineal entre vectores de un conjunto y el de sistemas de ecuaciones lineales. El *proceso* expresar un vector cualquiera como combinación lineal de los vectores de un conjunto, se debe coordinar con el *proceso* determinar el vector nulo del espacio vectorial, para dar paso a la estructura de construcción mental *proceso* de expresar el vector nulo como combinación lineal de los vectores de un conjunto. La situación de la actividad A2 fue diseñada con el propósito de visualizar esta coordinación. En esta actividad se inquiere sobre la capacidad del estudiante para analizar si los subconjuntos de vectores de un espacio vectorial son li/ld, donde la suma está definida como producto y la multiplicación por escalar, como una operación potencia.

El estudiante E1, por ejemplo, considera el conjunto S1 y plantea una igualdad a partir de la suma de los vectores del conjunto y la iguala al vector nulo. El problema es que no repara en el hecho de que el vector nulo bajo esta operación suma es (1,1) y no (0,0). Al hacer la operatoria E1 obtiene una afirmación contradictoria, pues las potencias resultan igual a cero, como se muestra en la Figura 7. Lo mismo ocurre para el otro conjunto. Lo anterior es evidencia de que E1 tiene dificultades para alcanzar la construcción mental *proceso* de determinar el vector nulo del espacio vectorial V, que fue definido específicamente con operaciones suma y multiplicación por un escalar no usual. Al no contar con esta estructura cognitiva, E1 tampoco puede evidenciar el mecanismo de coordinación, de modo que abruptamente sus cálculos lo llevan a decir que el sistema de ecuaciones no tiene solución y no logra concluir si el conjunto S1 es li/ld. Específicamente en la Figura 7 es posible apreciar la ausencia de la estructura de construcción mental proceso para el concepto neutro aditivo del grupo abeliano (V,+) del espacio vectorial V, mediante el desarrollo de la actividad A2 del cuestionario.

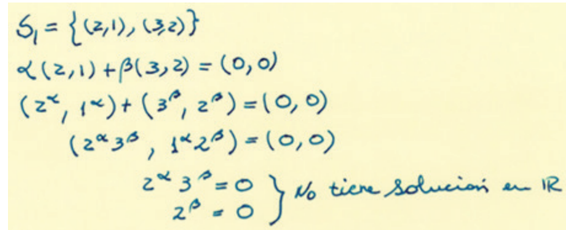


Figura 7. E1 muestra una estructura de construcción mental acción, la cual no logra interiorizarse en un proceso para determinar el vector nulo del espacio vectorial.
Fuente: Datos de la investigación.

La actividad A2 es omitida por E8, y E2 vuelve a basar su respuesta en el concepto de determinante –argumento utilizado en la actividad A1–, sin embargo, a diferencia de A1, en A2 dispone los vectores de S1 en filas y procede a calcular el determinante, cuyo resultado lo categoriza en vectores li, según un criterio mecanicista que E2 escribe en la Figura 8. Esto último es evidencia de lo que Dorier (1995) llamó "obstáculo del formalismo".

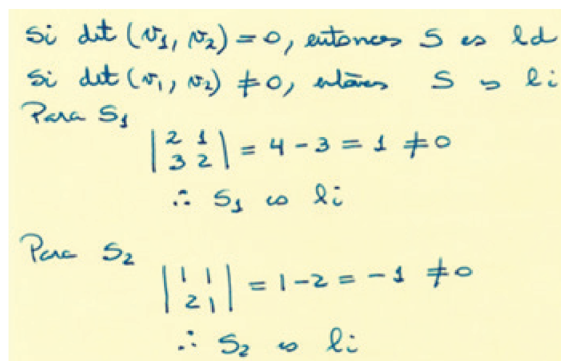


Figura 8. E2 muestra (nuevamente) una estructura de construcción mental acción en vías de llegar a ser proceso para caracterizar un determinante asociado a un conjunto de vectores li.
Fuente: Datos de la investigación.

El estudiante E4 no logra determinar adecuadamente el neutro aditivo para la operación suma definida en el espacio V, pero cuatro de los ocho estudiantes alcanzan la estructura *proceso* para determinar el vector nulo del espacio vectorial. Una muestra de esto último se puede apreciar en E3, quien primero plantea la combinación lineal pensando que el vector nulo es (0,0), pero luego reflexiona y decide determinar explícitamente el vector neutro aditivo del espacio vectorial, como se puede apreciar en la Figura 9.

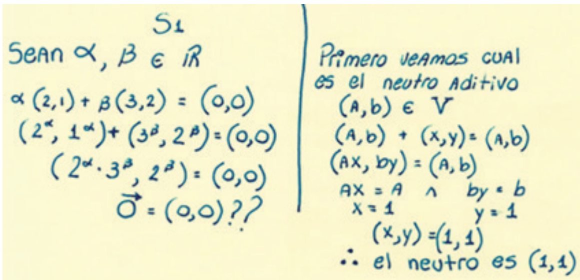


Figura 9. E3 muestra una estructura de construcción mental proceso para determinar el vector nulo del espacio vectorial V.
Fuente: Datos de la investigación.

De los seis estudiantes que sí reconocen adecuadamente que el vector neutro aditivo o nulo en el espacio vectorial V es (1,1) –y no (0,0)–, solo tres plantean a dicho vector nulo como combinación lineal de los vectores del conjunto para realizar un análisis de los escalares, es decir, han alcanzado el mecanismo de coordinación entre los *procesos* asociados a tales conceptos, como se puede evidenciar en los argumentos observables de E7, en la Figura 10.

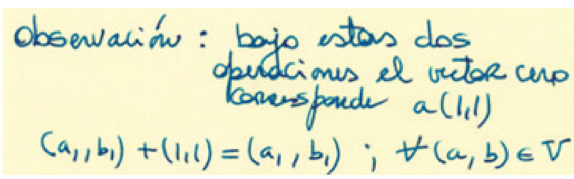


Figura 10. E7 muestra una coordinación entre las estructuras de construcción mental proceso expresar un vector cualquiera como combinación lineal de los vectores de un conjunto y determinar el vector nulo del espacio vectorial.
Fuente: Datos de la investigación.

El mecanismo de coordinación entre los *procesos* vector nulo y neutro aditivo de (V,+) tiene lugar en la medida en que el estudiante plantea directamente la combinación lineal de vectores de los conjuntos S1 o S2 y la iguala al vector nulo, que en este caso es el vector (1,1) –cuando se interpretan adecuadamente las definiciones de las operaciones involucradas en V–. El resultado de dicha coordinación es el *proceso* expresar el vector nulo como combinación lineal de los vectores de un conjunto, el cual a su vez se coordina con el *proceso* sistema de ecuaciones lineales, cuyo producto de esta coordinación es el *proceso* seleccionar la combinación lineal en que la solución del sistema es única y trivial. Un ejemplo de este encadenamiento de *procesos* lo evidencia E7, quien, con base en la expresión del vector nulo como combinación lineal de los vectores del conjunto S1, construye un sistema de ecuaciones. De este sistema, E7 infiere que ambos escalares son nulos, lo cual le permite concluir que los vectores de S1 son li, como se puede apreciar en la Figura 11.

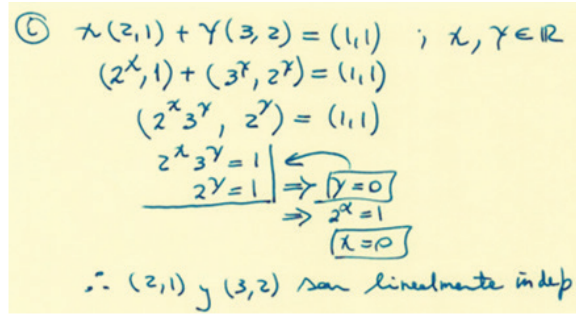


Figura 11. E7 muestra una coordinación entre las estructuras de construcción mental proceso expresar el vector nulo como combinación lineal de los vectores de un conjunto y sistema de ecuaciones lineales para el logro del proceso seleccionar la combinación lineal en que la solución del sistema es única y trivial.
Fuente: Datos de la investigación.

El *proceso* seleccionar la combinación lineal en que la solución del sistema es única y trivial se puede encapsular en el conjunto de vectores li como *objeto*. La encapsulación se evidencia en la medida en que el estudiante reconoce la independencia lineal descartando la dependencia lineal, o bien por simple inspección de las características de los vectores con respecto a la especificidad de las operaciones definidas para el espacio vectorial V.

El estudiante E7 muestra como resultado de la resolución de las actividades A1 y A2 una construcción mental *objeto* en relación con el procedimiento seleccionar la combinación lineal en que la solución del sistema es única y trivial. Esto último se sustentó también en el argumento que E7 utilizó para analizar la dependencia lineal del otro conjunto S2, en el cual E7 se basa en que *el vector nulo es un elemento de* S_2, como se puede observar en la Figura 12.

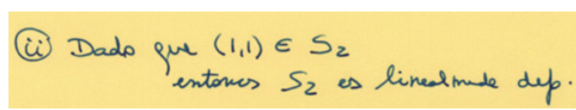


Figura 12. E7 muestra una estructura de construcción mental objeto para el concepto conjunto de vectores li.
Fuente: Datos de la investigación.

7. Discusión y conclusiones

El propósito de este estudio de investigación fue mostrar evidencias, con sustento teórico, de cómo contribuye el trabajo en dos actividades con conjuntos li/ld, en la construcción del significado de las operaciones suma y multiplicación por escalar del espacio vectorial. Al alero de la teoría APOE, el análisis de las dos actividades, aplicadas a los dos casos de estudio, mostró que los estudiantes evocan una diversidad de razonamientos observables a través de sus argumentos en A1 y A2, que correspondían principalmente a concepciones *proceso* y *objeto* en el modelo APOE. Sin embargo, durante el desarrollo de las actividades, mientras los participantes del estudio parecían mejorar y fortalecer sus concepciones de acuerdo con el modelo APOE, también hubo instancias donde ellos evocaron ciertas ideas falsas que parecían causar un obstáculo para alcanzar la construcción *objeto*, desde un *proceso*. Dichos conceptos erróneos incluyen, pero no se limitan, a:

- El cero vector de un espacio vectorial está constituido de ceros.
- El neutro aditivo y el cero vector son elementos diferentes en el espacio vectorial.
- El cero vector no es li, ni es ld, sino que es neutro.

La Tabla 4 resume la discusión del apartado anterior sobre las construcciones y mecanismos mentales que contribuyen a dar significado a las operaciones de un espacio vectorial.

Tabla 4

Construcciones mentales que contribuyen a dar significados a las operaciones de un espacio vectorial

Construcción mental	**Evidencias**	**Significado de las operaciones del espacio vectorial que se logra**
Proceso	• La construcción mental *proceso* de las operaciones de un espacio vectorial V, supone que el cero vector de un espacio vectorial se coordina con la propiedad de elemento neutro para (V,+). Además, el cero vector se utiliza para situar una referencia de los elementos del espacio vectorial, sin realizar la comprobación de que este cero vector es en realidad el elemento neutro del grupo abeliano (V,+) en el espacio [K(+, ·), (V, +), •]. • La construcción mental *proceso* de vectores li/ld explica que cuando una combinación lineal se iguala al cero vector, el sistema de ecuaciones lineales asociado, siempre tiene una única solución. • En la construcción *mental* proceso de las operaciones de un espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, la falsa creencia [el cero vector de $\mathbb{R}^2$ es (0,0) independiente de las operaciones que se definen en $\mathbb{R}^2$], se explica por las condiciones suficientes y necesarias para que (V,+) sea un grupo abeliano. • En la construcción *proceso* de conjuntos li/ld de vectores, la dependencia lineal se operacionaliza a través de un sistema de ecuaciones lineales.	Operaciones del espacio vectorial como *proceso*.
Objeto	• Conocimiento en estructuras algebraicas como *objeto*, que permiten desencapsularlo en el proceso cero vector, a través del elemento neutro del grupo abeliano (V,+) inserto en el espacio vectorial [K(+, ·), (V, +), •]. • Encapsulación del *proceso* de implicación [combinación lineal igual al cero vector $\Longrightarrow$ solución única y trivial del sistema de ecuaciones lineales] en el objeto conjunto li de vectores.	Operaciones del espacio vectorial como *objeto*.

	• Encapsulación del *proceso* de implicación [combinación lineal igual al cero vector $\Longrightarrow$ solución no única del sistema de ecuaciones lineales] en un objeto ld de vectores. • Coordinación de los *procesos* combinación lineal igual al cero vector para espacios vectoriales con operaciones no usuales y resolución del sistema $AX = b$, con $b \neq 0$, cuyo *proceso* resultante se encapsula en el *objeto* conjuntos li/ld. • La *acción* de construir una combinación igual al cero vector para operaciones no usuales sobre el *objeto* conjuntos li/ld. • Conocimiento de que las operaciones que definen al espacio vectorial existen y deben estar presente en todo momento cuando se trabaja con vectores y escalares.	
Esquema	• La coherencia del *esquema* de las operaciones del espacio vectorial [K(+, ·), (V, +), •] requiere de la asimilación del objeto conjuntos li/ld de vectores. • Conocimiento de que el cero vector es un vector ld. • Conocimiento de que un conjunto de vectores que contiene al cero vector, es un conjunto ld de vectores.	Operaciones del espacio vectorial como *esquema.*

Como producto de este estudio, en la Tabla 4 se propone una primera respuesta a la pregunta de investigación planteada, sobre cómo el trabajo con conjuntos li/ld contribuye a dar significado a las operaciones suma y multiplicación por escalar de un espacio vectorial.

Entre los aportes que la investigación hace a la literatura, se pueden señalar que el cero vector es un indicador del estado de construcción de las operaciones suma y multiplicación de la estructura del espacio vectorial, y del rol que estas tienen para dar paso a la comprensión real de otros tópicos del álgebra lineal. En relación con esto último, cabe señalar que la evidencia encontrada no es suficiente para afirmarlo en su totalidad. Es necesario llevar a cabo más investigación que contemple entrevistas a un mayor número de estudiantes, para tener más evidencia que lo sustente.

Este primer estudio sobre conjuntos li/ld para interpretar el estado de construcción de las operaciones de un espacio vectorial proporciona nueva evidencia de que el uso de las estructuras de la teoría APOE permite determinar las construcciones que subyacen a las dificultades de los estudiantes y a las estrategias que ellos utilizan en el álgebra lineal.

Agradecimientos

La investigación presentada ha sido financiada parcialmente por CONICYT a través del Proyecto FONDECYT Nº 1180468. Agradecemos a los participantes por la buena disposición en la investigación y también al Núcleo de Investigación en Formación de Profesores en Matemática, código 039.439/2020.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., y Thomas, K. (1996). A framework for research and development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, E. Dubinsky y A. H. Schoenfeld (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II* (pp. 1-32). Providence: American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/cbmath/006/01

Chargoy, R. (2006). *Dificultades asociadas al concepto de base de un espacio vectorial* (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN, D.F., México.

Dorier, J. L. (1995). A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia mathematica*, *22*(3), 227-261. https://doi.org/10.1006/hmat.1995.1024

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E., y McDonald, M. A. (2002). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. En D. Hoton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level, New ICMI Study Series* (pp. 275-282). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_7

Harel, G. (1989). Applying the principle of multiple embodiments in teaching linear algebra: Aspects of familiarity and mode of representation, *School Science and Mathematics*, 89, 49-57. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1989.tb11889.x

Kú, D., Trigueros, M., y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la Teoría APOE. *Educación Matemática, 20*(2), 65-89. Recuperado desde http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262008000200004

Oropeza, C., y Lezama, J. (2007). Dependencia e independencia lineal: una propuesta de actividades para el aula. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 2*(1), 23-39. Recuperado desde http://ppct.caicyt.gov.ar/index.php/reiec/article/view/7363/6612

Parraguez, M. (2013). El rol del cuerpo en la construcción del concepto espacio vectorial. *Revista Educación Matemática*. México, *25*(1), 133-154. Recuperado desde http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v25n1/v25n1a6.pdf

Parraguez, M., y Bozt, J. (2012). Conexiones entre los conceptos dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en R^2 y R^3 desde los modos de pensamiento. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 7*(1), 49-72. Recuperado desde http://ppct.caicyt.gov.ar/index.php/reiec/article/viewFile/7476/6720

Parraguez, M., Lezama, J., y Jiménez, R. (2016). Estructuras mentales para modelar el aprendizaje del teorema de cambio base de vectores. *Enseñanza de las Ciencias, 34*(2), 129-150. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1950

Parraguez, M., y Oktaç, A., (2010). Construction of the vector space concept from the view point of APOS Theory. *Linear Algebra and its Applications, 432*(8), 2112-2124. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.06.034

Parraguez, M., y Uzuriaga, V. (2014). Construcción y uso del concepto combinación lineal de vectores. *Revista Scientia et Technica Año XIX, 19*(3), 329-334. Recuperado desde https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=84932139014

Poole, D. (2011). *Álgebra lineal. Una introducción moderna* (3º Ed.). México: Thomson.

Roa-Fuentes, S., y Parraguez, M. (2017). Estructuras mentales que modelan el aprendizaje de un teorema del álgebra lineal: Un estudio de casos en el contexto universitario. *Revista Formación Universitaria, 10*(4), 15-32. https://doi.org/10.4067/S0718-50062017000400003

Rodríguez, M., Parraguez, M., y Trigueros, M. (2018). Construcción cognitiva del Espacio Vectorial R^2. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(1), 57-86. https://doi.org/10.12802/relime.18.2113

Saldanha, L. A. (1995). *The Notions of Linear Independence/Dependence: A Conceptual Analysis and Students Difficulties* (Tesis de maestría). Concordia University, Montréal, Québec, Canada. Recuperado desde https://spectrum.library.concordia.ca/5241/

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students' thinking in Linear Algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209-246). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_8

Stake, R. E. (2010). *Investigación con estudio de casos* (5ª Ed.). Barcelona: Labor.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., y Arnon, I. (2002). *Learning Linear Algebra with ISETL*. Recuperado desde https://vdocuments.mx/learning-linear-algebra-with-isetl.html

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.28

APROXIMACIÓN A LA ENSEÑANZA DE LAS SUCESIONES DE NÚMEROS REALES POR MEDIO DE LOS ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICO

APPROACH TO THE TEACHING OF SEQUENCES OF REAL NUMBERS BY MEANS OF MATHEMATICAL WORKING SPACES

Paula Verdugo Hernández, paulasinttia@gmail.com
Universidad Adventista de Chile, Chillán, Chile

RESUMEN

Este artículo tiene como objetivo principal investigar el trabajo matemático de profesores universitarios respecto de la enseñanza de las sucesiones de números reales (sucesiones) en el aula. Mediante la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) analizamos algunos elementos de la enseñanza (ETM idóneo) de este objeto, tomando en cuenta las componentes del plano epistemológico y cognitivo, identificando las génesis, así como también los paradigmas del análisis real. Concretamente, se presenta un estudio de caso sobre el ETM idóneo de tres profesores universitarios, solicitándoles realizar una producción donde aborden la enseñanza de la sucesión $(a_n)n \in \mathbb{N}$ definida por $a_n = (1+1/n)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Los principales resultados evidencian diferencias entre los ETM idóneos, observándose que estos se enmarcan dentro de distintos paradigmas del análisis real, activando distintas componentes del ETM. Por último, en base a lo anterior, sugerimos algunos elementos que harían factible la estructuración de un ETM idóneo más completo para las sucesiones.

PALABRAS CLAVE:
ETM idóneo; enseñanza de las sucesiones; enseñanza universitaria; paradigmas del análisis real.

ABSTRACT

The main goal of this article is to investigate the mathematical work of university professors regarding the teaching of real number sequences (sequences) in the classroom. Through the Mathematical Working Spaces (MWS) theory, we analyze some elements of the suitable MWS of this object, taking into account the components of the epistemological and cognitive aspects, identifying the geneses, as well as the paradigms of the real analysis. Specifically, a case study on the suitable MWS of three university professors is presented, whom we asked to tackle the teaching of the sequence $(a_n)n \in \mathbb{N}$ defined by $a_n = (1+1/n)^n$ for each $n \in \mathbb{N}$. The main results show differences between the suitable MWS, observing that they are framed within the distinct paradigms of real analysis, activating different components of MWS. Finally, based on these results, we suggest some elements that would make feasible the structuration of a more complete suitable MWS for the sequences.

KEYWORDS:
Suitable MWS; real sequences teaching; university teaching; paradigms of real analysis.

Recibido: 14 de mayo de 2020, Aceptado: 30 de junio de 2020

1. Introducción

Este trabajo tiene como objetivo principal estudiar parte del ETM idóneo de las sucesiones reales en la enseñanza universitaria. Es importante señalar que las sucesiones reales constituyen un tema de estudio interesante, debido a la presencia de la noción de convergencia, concepto fundamental en las matemáticas. Existen diversos estudios que se han dedicado a tratar este objeto matemático desde el punto de vista didáctico y/o educativo; entre ellos, el trabajo realizado por Robert (1982), el cual estudia y clasifica en modelos a las diferentes formas de conceptualización de las descripciones de los estudiantes sobre la convergencia de sucesiones numéricas por intermedio de discursos, ejemplos y representaciones. En dicho trabajo se destaca el modelo dinámico, en donde la convergencia es asociada a la idea de aproximación; el modelo estático, el cual traduce al lenguaje natural la definición $(\varepsilon, \mathrm{N})$ de la convergencia de sucesiones, y el modelo monótono, en el que la distancia entre los términos de una sucesión y su límite decrece, lo cual constituye un caso particular. Para estudiar los modelos anteriores, la autora diseñó y aplicó un cuestionario a estudiantes de enseñanza media en Francia. Los resultados de los estudiantes marcan ciertas diferencias: aquellos que tenían un modelo estático contestaron correctamente, aquellos con un modelo monótono respondieron incorrectamente y, por último, de los que tenían un modelo dinámico, la mitad respondió adecuadamente, mientras que la otra mitad respondió erróneamente.

Por otro lado, Bloch (2000), en el capítulo 6 de su tesis doctoral, desarrolla e implementa una situación para el aprendizaje de la noción de convergencia de sucesiones, dirigida a nivel secundario, en la cual se solicita al estudiante calcular los términos generales de la sucesión de perímetros y áreas de los copos de nieve de Von Koch, así como estudiar su convergencia. Para ello, el docente indica a los estudiantes ciertos criterios de validación de la convergencia, los cuales no corresponden a la noción rigurosa. La autora asevera que la situación se desarrolló dentro de lo estipulado: los estudiantes lograron darse cuenta de que la sucesión de perímetros era creciente y no acotada, por lo tanto, divergente. Asimismo, notaron que la sucesión de áreas, si bien era creciente, era acotada, y lograron calcular el límite observando la tendencia de los términos de la sucesión mediante calculadora (criterio de exploración). Los criterios de exploración y validación se pudieron implementar, los estudiantes los adaptaron para encontrar el correspondiente para una sucesión convergiendo a 0. Asimismo, la situación permitió institucionalizar una definición correcta de una sucesión convergente al infinito y de una convergente a 0.

Oktaç y Vivier (2016) señalan que la noción de límite ha sido estudiada en educación matemática por cerca de 40 años, incluyendo límites de sucesiones y funciones. Según estos autores, las razones por las cuales esta noción ha sido tan estudiada son, por una parte, que ella presenta grandes dificultades para el aprendizaje de los estudiantes, y por otra, que la noción de límite, siendo una noción fundamental del análisis, se relaciona con varias otras nociones tales como continuidad, diferenciabilidad, etc., de modo que las dificultades asociadas a los límites podrían también tener un impacto en el aprendizaje de tales conceptos.

Por su parte, Mamona-Downs (2001) presenta una secuencia didáctica de convergencia de sucesiones con el fin de resolver los problemas de comprensión ligados al estilo minimalista de la noción de convergencia de sucesiones, esto es, el hecho de que la proposición que define la convergencia es muy compacta, llena de cuantificadores, y al mismo tiempo no se dice que el épsilon sea pequeño, ni que el N dependa de épsilon, es decir, en la definición está implícito el rol de las variables involucradas, lo cual no se señala directamente. Todo lo anterior requiere una reflexión madura sobre su estructura, sobre el contenido mismo de la definición, fijándose en sus aspectos metacognitivos y cognitivos de su diseño.

Asimismo, las sucesiones no solamente son importantes por su relación con la convergencia, sino que también por el hecho de que existen diversas aplicaciones de estas en las ciencias y la ingeniería, puesto que ellas participan en procesos de aproximación numérica. Debido a lo anterior, las sucesiones forman parte de los programas de estudio para la formación de ingenieros, y específicamente son estudiadas en los cursos de cálculo de primer o segundo año de universidad en dichas carreras.

El estudio realizado por Verdugo-Hernández (2018) da cuenta de la riqueza epistemológica de las sucesiones reales. En efecto, los estudios iniciales realizados por Cauchy (1789-1857) fueron imprescindibles para el desarrollo del análisis real y en particular de las sucesiones (Dhombres, 1980). Asimismo, los trabajos desarrollados por Weierstrass (1815-1897) y sus colaboradores complementan las demostraciones de Cauchy, clarificando las nociones de convergencia uniforme, continuidad uniforme, y derivación e integración término a término de una serie infinita (Hairer y Wanner, 2000), en las cuales las sucesiones juegan un rol clave. Por su parte, Cantor y Dedekind, hacia los años 1872 y 1888, presentan una construcción equivalente de los números reales. Posteriormente, Hilbert desarrolla en 1899 el método axiomático, mediante el cual introduce el sistema de los números reales, que resulta ser un cuerpo conmutativo totalmente ordenado y arquimediano, tal que no es posible agrandarlo de manera de obtener un nuevo sistema numérico que satisfaga dichas propiedades. Este último aspecto constituye la estructuración de aquello que Cantor y Dedekind denominaron “completitud” de los números reales (Dhombres, 1980). La construcción de Cantor se apoya sobre las sucesiones fundamentales, hoy en día conocidas como sucesiones de Cauchy. En efecto, Cantor demuestra que todo número real (en particular, todo número irracional) puede ser aproximado por una sucesión de Cauchy de números racionales. De la discusión previa evidenciamos la importancia de las sucesiones, las cuales contribuyeron de manera decisiva a dar fundamento al análisis moderno.

En esta investigación, hemos decidido analizar la enseñanza de la sucesión $(a_n)n \in \mathbb{N}$ definida por $a_n = (1 + 1/n)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, dicha sucesión posee una presencia importante en el estudio del análisis, siendo un ejemplo recurrente en varios textos universitarios como Kuratowski (1962), Bobadilla y Labarca (2004) y Stewart (2012). Además, constituye un importante ejemplo de aplicación del criterio de convergencia de las sucesiones monótonas y acotadas, tal como se aprecia en algunos textos universitarios como los señalados, que ejemplifican dicho criterio por medio de esta sucesión. Por último, la sucesión mencionada es significativa en las aplicaciones ya que se utiliza para modelizar problemas de interés, entre otros (Stewart, 2012). Por todo lo anteriormente expuesto, la enseñanza de la misma amerita ser estudiada.

En términos de nuestro marco teórico, estudiamos las posibles génesis activadas entre las distintas componentes del plano epistemológico y cognitivo. Asimismo, analizamos los planos verticales activados y los paradigmas en los cuales se posiciona el trabajo matemático. De esta manera, se ha podido examinar similitudes y diferencias en términos del ETM idóneo de tres docentes universitarios, de modo tal de proponer mejoras que converjan hacia la construcción de un posible trabajo matemático completo de las sucesiones, el cual incluya la activación de las tres génesis, junto a los tres planos verticales, al igual que todos los paradigmas. Debido a la amplitud del ETM idóneo, para efectos de este trabajo nos hemos enfocado en el estudio de una parte de este, dispuesto en la enseñanza universitaria de las sucesiones.

A continuación, presentaremos brevemente nuestro marco teórico, el cual nos ha permitido situar nuestra problemática en términos precisos y en particular estudiar en detalle el rol que juegan las distintas componentes del plano epistemológico y cognitivo del Espacio de Trabajo Matemático en las sucesiones. Enseguida, presentamos el diseño metodológico. Consecutivamente, mostramos y discutimos los resultados de los análisis sobre la enseñanza de la sucesión $(a_n)n \in \mathbb{N}$. Finalmente, presentamos las conclusiones de este trabajo.

2. Espacio de Trabajo Matemático

El Espacio de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak, 2011) tiene por objetivo principal estudiar y favorecer el funcionamiento del trabajo matemático en un contexto educativo determinado. Para definir el ETM se introducen dos planos: el plano epistemológico y el cognitivo, que estructuran el ETM apoyando la comprensión tanto del modelo del trabajo matemático que se genera, como también de la articulación entre sus planos mediante tres génesis (Kuzniak, Montoya-Delgadillo y Vivier, 2016): semiótica, instrumental y discursiva. Se identifican tres tipos de ETM (Kuzniak, 2011): ETM *de referencia*, relativo a criterios matemáticos definidos por una institución, que requiere un ETM *idóneo*, del cual depende tanto el diseño de la clase como de las tareas encomendadas a los estudiantes, quienes deberán comprometerse en actividades con el fin de realizarlas de acuerdo a su ETM *personal*. Por lo anterior, según Kuzniak y Richard (2014), el ETM idóneo no está fijado y se debe ajustar a ciertas restricciones locales, que dependen del ETM de referencia.

Adicionalmente el ETM considera, según Kuzniak y Richard (2014), tres planos verticales. Dichos planos actúan sobre la base de ciertas génesis y sus relaciones con el plano epistemológico y cognitivo. El primer plano [Sem-Ins] está sustentado por las génesis semiótica e instrumental. El segundo plano [Sem-Dis] está sustentado bajo las génesis semiótica y discursiva. Por último, el tercer plano [Ins-Dis] se apoya en las génesis instrumental y discursiva, las cuales evidenciaremos en este escrito a través de entrevistas con tres profesores universitarios en ejercicio. Más detalles del modelo del ETM pueden ser encontrados en Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier (2016).

Finalmente, el trabajo matemático está guiado por paradigmas que caracterizan los diferentes ETM. Montoya y Vivier (2016) han propuesto tres paradigmas con el fin de caracterizar el trabajo matemático del análisis real. Ellos fueron identificados teniendo en cuenta la perspectiva histórica y matemática. Tal como se ha discutido en el trabajo de Verdugo-Hernández (2018), y tal como se ha expuesto brevemente en la introducción de este escrito, la completitud de los números reales constituye un aspecto clave en el quehacer del análisis real. En ese sentido, Bergé (2008) identificó la transición del cálculo al análisis como un cambio de trabajo relacionado con la completitud de los números reales. Asimismo, Artigue (1998) identificó una ruptura entre el álgebra y el cálculo con relación al hecho de que en el álgebra, para demostrar una igualdad, se debe realizan una serie de manipulaciones algebraicas, mientras que en el cálculo (o análisis), para demostrar la igualdad entre dos cantidades, basta probar que para todo $\varepsilon > 0$, la distancia entre dichas cantidades es menor que ε. Se puede observar que en el análisis se involucra el trabajo con ε, con lo cual implícitamente se está usando la completitud. De acuerdo a lo anterior, el trabajo del análisis involucra este aspecto de manera explícita, lo cual implica necesariamente una reflexión sobre las reglas del cálculo y no solamente su aplicación mecánica para resolver un determinado problema.

Por otro lado, desde la perspectiva histórica, la geometría jugó un rol importante en el desarrollo del análisis. Por ejemplo, Bolzano (1781-1848) planteó la idea de basar el análisis en la geometría, especialmente en la percepción visual de ciertas propiedades tales como el Teorema del Valor Intermedio (TVI). Así, viendo el gráfico de una función, es posible determinar si la ecuación $f(x)=0$ posee una solución, lo cual es un caso particular del teorema de Bolzano. Pero, en esta intuición gráfica, implícitamente se está utilizando la completitud de los números reales.

En consecuencia, se han identificado los siguientes paradigmas del análisis real:

Análisis-Geométrico/Aritmético (AG), que permite interpretaciones con hipótesis implícitas basadas en la geometría, el cálculo aritmético o el mundo real.

Análisis-Calculatorio (AC), donde las reglas de cálculo son definidas más o menos de manera explícita, y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos.

Análisis-Real (AR), caracterizado por un trabajo que considera la aproximación y abiertos, incluso lo topológico, y en el que las definiciones y propiedades son establecidas teóricamente permitiendo un "trabajo ε" específico de este paradigma, cotas, desigualdades, "lo despreciable".

Por la naturaleza del objeto matemático considerado, y por el nivel en el cual los docentes enseñan, es esperable que se pueda observar la presencia de varios paradigmas (con mayor fuerza en el paradigma AC) en la resolución de una tarea.

3. Elementos metodológicos

El análisis que se presenta en esta investigación es de carácter cualitativo, mostrando un caso con relación al trabajo realizado por tres profesores universitarios, respecto a la sucesión $(a_n)n \in \mathbb{N}$ definida por $a_n = (1+1/n)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Con el fin de identificar algunos elementos del ETM idóneo de las sucesiones, se entrevistaron a estos tres profesores de universidad, los cuales serán nombrados como PU1, PU2 y PU3, respectivamente. Algunos antecedentes de los docentes son: PU1 es pedagogo en Matemática, magister en Didáctica de la Matemática, y realiza clases de Cálculo I y II en carreras de Ingeniería Comercial. PU2 es ingeniero civil matemático, magister y doctor en Estadística, y realiza clases en los cursos de Cálculo I, II y Estadística en carreras de Ingeniería Civil. Por último, PU3 es pedagogo en Matemática, magister en Matemática, y realiza clases en los cursos de Cálculo I, II y Ecuaciones Diferenciales en carreras de Ingeniería Civil. PU1 y PU2 dictan clases en la misma institución, mientras que PU3 dicta clases en otra institución universitaria.

En la entrevista se pregunta a cada profesor: *"¿Cómo abordaría en sus clases el estudio de la sucesión $(a_n)n \in \mathbb{N}$?"*. Para ello se les asignó un tiempo de una hora para desarrollar dicha pregunta por escrito. Sin embargo, al cabo de alrededor de 30 minutos, solicitaron más tiempo para enviar con posterioridad sus respuestas.

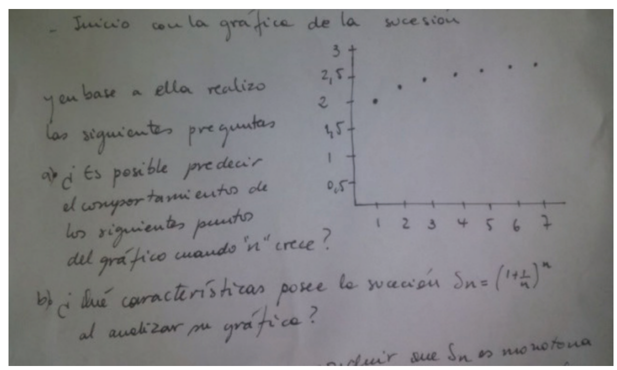
Cabe señalar que, en la enseñanza universitaria, según los programas y textos universitarios, y por la propia experiencia de los tres profesores entrevistados, quienes enseñan la unidad de sucesiones en el curso de Cálculo II, el estudio de la sucesión $(a_n)n \in \mathbb{N}$ en cuestión, se trata como un ejemplo clásico de aplicación del criterio de convergencia para sucesiones monótonas y acotadas.

4. Estudio de los ETM idóneos de PU1, PU2 y PU3

A continuación, analizaremos las producciones de los tres docentes universitarios respecto a la tarea que les fuera propuesta en la entrevista. En general, los tres profesores no generan tareas para abordar la sucesión, sino más bien ellos utilizan distintas herramientas para estudiarla, con el objetivo principal de probar que es convergente.

4.1 ETM idóneo de PU1

PU1 señaló que él haría preguntas a los estudiantes con la intención de guiar el problema solicitado. PU1 abordó la convergencia desde un punto de vista gráfico, proponiendo preguntas a los estudiantes (Figura 1) y dando las respuestas que este esperaría de parte de ellos (Figura 2).



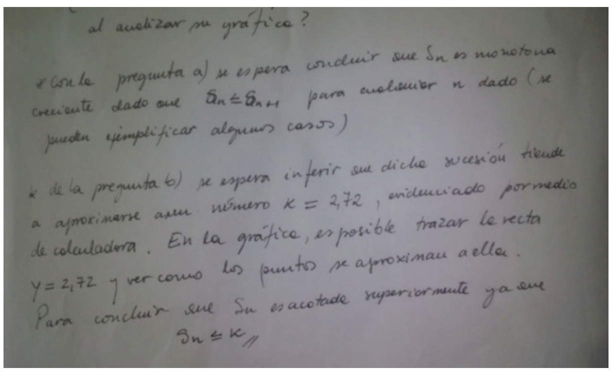
Transcripción:
Inicio con la gráfica de la sucesión y en base a ella realizo las siguientes preguntas:

a) ¿Es posible predecir el comportamiento de los siguientes puntos del gráfico cuando "n" crece?

b) ¿Qué características posee la sucesión $s_n = (1+1/n)^n$ al analizar su gráfica?

Figura 1. Preguntas de PU1 para guiar el trabajo de los estudiantes.
Fuente: Verdugo-Hernández (2016, p. 97)

Según las respuestas que el propio profesor generada para las preguntas *(a)* y *(b)*, se evidencia que el docente esperaría que los estudiantes, a partir de *(a)*, deduzcan que la sucesión $s_n = n \in \mathbb{N}$ es monótona creciente. De la pregunta *(b)*, PU1 esperaría que los estudiantes utilicen la calculadora para deducir que la sucesión "tiende a aproximarse" a 2,72 y que posiblemente tracen la recta y = 2,72, de modo que ellos visualicen que la sucesión es acotada superiormente por 2,72. En definitiva, PU1 pretende que sus estudiantes hagan una deducción basada en un análisis gráfico-numérico (realizando cálculos mediante una calculadora y eventualmente un gráfico), del hecho de que la sucesión es monótona creciente, acotada superiormente y convergente, relacionando así la convergencia más bien a la visualización, y no a los dos primeros aspectos que permitirían concluir teóricamente. En efecto, de acuerdo al criterio de convergencia de sucesiones monótonas y acotadas, herramienta teórica perteneciente al referencial de las sucesiones, del hecho de que la sucesión $s_n = \ n \in \mathbb{N}$ es monótona creciente y acotada (superiormente), se deduce que ella es convergente.



Transcripción:

* Con la pregunta a) se espera concluir que s_n es monótona creciente dado que $s_n \leq s_n + 1$ para cualquier n dado (se puede ejemplificar algunos casos).

* De la pregunta b) se espera inferir que dicha sucesión tiende a aproximarse a un número k = 2,72, evidenciado por medio de calculadora. En la gráfica, es posible trazar la recta y = 2,72, y ver cómo [sic] los puntos se aproximan a ella.

Para concluir que $(s_n) n \in N$ es acotada superiormente ya que $s_n \leq k$.

Figura 2. Respuesta entregada por PU1.
Fuente: Verdugo-Hernández (2016, p. 97)

En términos del ETM, PU1 activó la génesis semiótica e instrumental, pues el profesor insta a la comprensión de $(s_n) n \in N$ mediante un gráfico, mostrando que la sucesión es monótona creciente, lo cual genera el plano vertical [Sem-Ins]. Como artefacto se identifica el uso de la calculadora, y en términos de signos y registros el tratamiento es gráfico.

Por otro lado, como ya vimos, la producción de PU1 está basada en un análisis gráfico-numérico, ya que se evidencia que este esperaba la utilización de una calculadora para que los estudiantes obtuvieran una aproximación del límite (el cual sabemos que es el número irracional e), y que eventualmente trazaran una recta (y = 2,72), de modo tal de visualizar que la sucesión es acotada superiormente. Todo lo anterior nos indica que el trabajo de PU1 se enmarca en el paradigma Análisis-Geométrico/Aritmético (AG) (Montoya y Vivier, 2016), que permite realizar interpretaciones nacidas de la geometría y/o del cálculo aritmético, lo cual se ajusta a la actividad realizada por PU1.

4.2 ETM idóneo de PU2

PU2 privilegia el uso de la regla de L'Hôpital, herramienta teórica perteneciente al referencial de las funciones, con la cual es posible calcular el límite de la sucesión aplicando un resultado previo que conecta las sucesiones con las funciones. Volveremos sobre este punto más adelante.

Tal como mencionamos en la introducción, el análisis de convergencia de la sucesión $(a_n) n \in \mathbb{N}$ puede ser llevado a cabo mediante el criterio de convergencia de sucesiones monótonas y acotadas, que establece que toda sucesión creciente (respectivamente, decreciente) y acotada superiormente (respectivamente, acotada inferiormente) es convergente. Dado que PU2 aplicó la regla de L'Hôpital en lugar de utilizar el criterio de convergencia mencionado, y como este docente fue el único en entregar una respuesta en el mismo momento en que se le entrevistó, tuvimos la oportunidad de preguntarle, justo después de entregar su respuesta, las razones por las cuales utilizó dicha herramienta. PU2 responde que *"se debe a que los estudiantes están más familiarizados con esta herramienta, debido a que en el curso previo la utilizaron bastante"*.

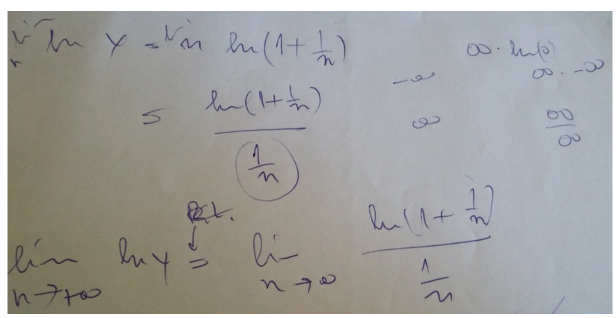


Figura 3. Respuesta de PU2.
Fuente: Verdugo-Hernández (2016, p. 98)

En las Figuras 3 y 4 se puede observar que PU2 no mencionó que para su desarrollo es necesario pasar del cálculo del límite de la sucesión $(a_n) n \in \mathbb{N}$ a un límite de una función de una variable real, con el fin de aplicar la regla de L'Hôpital, y enseguida devolverse del límite de esta función para obtener el valor del límite de la sucesión $(a_n)n \in \mathbb{N}$. Con el fin de que su cálculo sea válido, basta aplicar el resultado previo siguiente: Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ y $f(n) = a_n$, cuando es un entero, entonces $\lim_{x\to\infty} a_n = L$[1]. Esta herramienta teórica conecta ambos objetos matemáticos, sucesiones y funciones, y sobre todo provee una forma sencilla de calcular límites de sucesiones, por medio del cálculo de límites de funciones al infinito (cuando la variable x tiende al infinito). Cabe notar que, en este caso, la función $f(x)$ posee una asíntota horizontal $y = L$[2].

Notemos que, si deseamos aplicar la regla de L'Hôpital, herramienta teórica para calcular límites de funciones, es necesario previamente establecer una conexión entre ambos objetos matemáticos, tal como hemos planteado en el párrafo anterior. Para ser más precisos, de la sucesión $f(n) = a_n$ pasamos a la función $x \to f(x)$, lo cual implica un paso de lo discreto a lo continuo, relacionando ambos conceptos. Al respecto, PU2 no hace explícitamente esta diferencia, ya que este no toma en cuenta la dialéctica discreta/continuo. Sería interesante estudiar qué consecuencias podría esto traer para los estudiantes, lo cual es materia de otro trabajo.

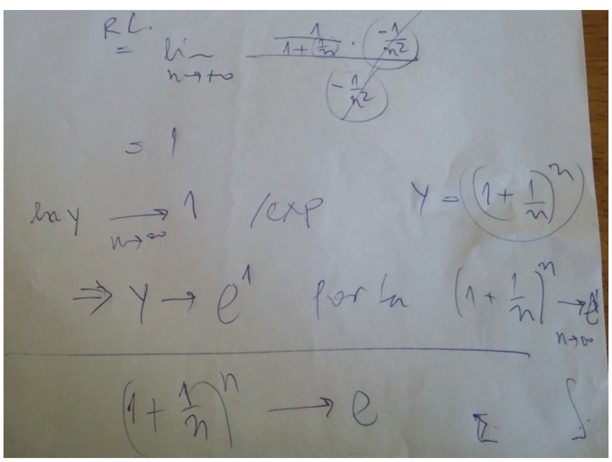


Figura 4. Propuesta de PU2 (continuación).
Fuente: Verdugo-Hernández (2016, p. 99)

En los cálculos realizados (Figura 4), PU2 da por hecho que el número e existe cuando calcula el límite. Sin embargo, el número e existe porque se le puede definir como el límite de la sucesión analizada, es decir, lo que hace PU2 es utilizar precisamente lo que hay que probar que existe (el límite de la sucesión analizada en este trabajo). Existen además otras formas de definir el número e (por ejemplo, definir la función logaritmo natural por medio de una integral definida, y enseguida definir el número e como la base de dicho logaritmo), pero la idea central que deseamos rescatar es que, al menos en el nivel universitario, hay que definir tal número antes de proceder a utilizarlo.

Por otro lado, tal como fue mencionado anteriormente, PU2 calculó el límite de la sucesión aplicando la regla de L'Hôpital, en lugar de aplicar el criterio de sucesiones monótonas y acotadas, por la razón que el mismo PU2 señaló. Para utilizar el criterio mencionado, PU2 debería haber probado que la sucesión $(a_n)n \in \mathbb{N}$ es monótona y acotada (en este caso, se puede probar que $(a_n)n \in \mathbb{N}$ es creciente y acotada superiormente). De hecho, con el fin de abordar los aspectos previos, PU2 propuso espontáneamente las siguientes indicaciones (sin demostración), las cuales él dejaría a cargo de los estudiantes:

(1) Probar que $(a_n)n \in \mathbb{N}$ es creciente usando el teorema del binomio y que $1 - i/n < 1 - i/(n+1)$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

(2) Para demostrar que $(a_n)n \in \mathbb{N}$ es acotada usar que $i! > 2i - 1$, para cada $i \in N$ (mostrar la desigualdad por inducción).

Desde nuestro marco, se observa que PU2 utilizó una herramienta de las funciones de variable real (la regla de L'Hôpital) con el objetivo de calcular el límite. Luego, sugiere implícitamente (pues no lo menciona) utilizar el criterio de las sucesiones monótonas y acotadas, para lo cual propuso los puntos (1) y (2), los cuales quedan completamente dentro del referencial de las sucesiones (sin recurrir a herramientas pertenecientes a las funciones), con el fin de probar que $(a_n)n \in \mathbb{N}$ es creciente y acotada superiormente. Consideramos que en esta propuesta

[1] *Para un mayor detalle, remitirse teorema 3 presente en el texto de J. Stewart (2012, p. 678).*
[2] *Ver Figura 6 (Stewart, 2012, p. 678).*
[3] *Suponemos que PU2 propone las indicaciones transcritas debido a que considera importante probar la monotonía y el acotamiento de (an), ya que posiblemente cree que el cálculo del límite con la regla de L'Hôpital es insuficiente.*

se activaron la génesis instrumental, en el sentido de las herramientas utilizadas (artefactos teóricos), y la génesis semiótica, activando el plano vertical [Sem-Ins]. Además, se induce la activación del plano vertical [Sem-Dis] en el momento que PU2 deja propuestos los puntos (1) y (2), invitando a los estudiantes a realizar dichas pruebas.

Por último, la propuesta se centra en el paradigma de Análisis-Calculatorio (AC), puesto que utiliza reglas explícitas del cálculo (la regla de L'Hôpital), sin cuestionarse la naturaleza de los objetos matemáticos involucrados, ya que, de hecho, desde el problema original que consiste en analizar una sucesión, pasa implícitamente a estudiar el límite de una función, sin cuestionarse ni el paso ni el nuevo objeto introducido (la función). En este sentido, notemos que hay aspectos importantes que subyacen al paso de lo discreto a lo continuo. En efecto, para diferenciar adecuadamente ambos conceptos (discreto y continuo), hay que tener en cuenta la completitud, ya que "lo continuo" hace referencia en realidad a aquello que "no tiene agujeros". Esa sutil diferencia constituye el por qué las sucesiones son tratadas de manera especial y no como funciones ordinarias de variable real, aspecto que pensamos que merece ser bien estudiado en clases por parte de los docentes.

4.3 ETM idóneo de PU3

A continuación, mostraremos la producción del docente PU3. Preliminarmente, PU3 señaló que aplicaría algunas herramientas de cursos previos tales como el teorema del binomio, el que, si bien es cierto que en términos del ETM en otro curso podría ser parte del referencial teórico, en este, donde se estudian sucesiones, deviene una herramienta operatoria (Verdugo-Hernández, 2018) que permite comprobar que la sucesión analizada es acotada.

> **PU3**: Conocidas algunas definiciones y desigualdades básicas en los cursos de Matemática, como son el teorema del binomio, ser acotado y la monotonía de una sucesión, por el teorema del binomio, se tiene que:

$$a_n = 1+\left(\frac{1}{n}\right)n = \Sigma_{k}^{n} = 0\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right) = 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n+1)}{2;}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)}{n;}\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2;}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\frac{1}{n;}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

A continuación, PU3 introdujo tres sucesiones $(a_n)n\in\mathrm{N}$, $(b_n)n\in\mathrm{N}$ y $(c_n)n\in\mathrm{N}$. Este sugirió entonces comparar término a término dichas sucesiones a partir de $n=3$, con el fin de concluir que la sucesión $(a_n)n\in\mathrm{N}$ es acotada.

> **PU3:** Se comprueba que la sucesión está acotada, para lo cual se consideran las siguientes expresiones:

$$a_n = 2+\frac{1}{2;}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3;}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$b_n = 2+\frac{1}{2;}+\frac{1}{3;}+\ldots+\frac{1}{n;}$$

$$c_n = 2+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}}_{\text{progresión geométrica}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}}$$

En efecto, comparando término a término a partir de $n=3$ se verifica que: $2<a_n<b_n<c_n=3-1/2^{n-1}$, de donde $2<a_n<3$; luego, la sucesión $(a_n)n\in\mathrm{N}$ es acotada.

Ahora se demuestra que la sucesión es estrictamente creciente de la siguiente manera:

$$M.A>M.G \Leftrightarrow \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} > n+1\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\Leftrightarrow n\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$\Leftrightarrow a_{n+1} > a_n$ Luego, $(a_n)n\in\mathrm{N}$ es monótona creciente.

Así PU3 concluyó, considerando los dos aspectos anteriores (acotamiento y monotonía) que $(a_n)n\in\mathrm{N}$ es convergente. Además, señaló que, en consecuencia, "tiene límite finito". Ese límite es precisamente el número e, irracional y trascendente, la demostración anterior activa la génesis discursiva. Para visualizar este resultado el docente consideró el siguiente gráfico (Figura 5) que indica el comportamiento de la sucesión, convergiendo al número e, activando la génesis instrumental. PU3 indica que *"el comportamiento de convergencia hacia el valor de e por medio del gráfico es lento"*, lo cual significa que numéricamente la sucesión se demora en acercarse hacia la recta $y = e$ (en el gráfico aún no se aprecia claramente que los puntos se acerquen a la recta $y = e$; creemos que hubiese hecho falta graficar más puntos de la sucesión para acercarse de mejor forma).

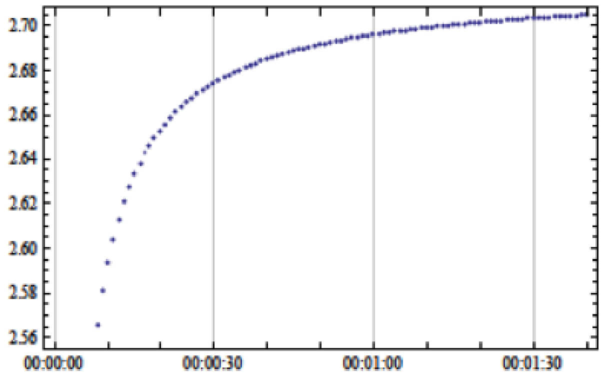


Figura 5. Gráfico de la sucesión $(a_n)n \in \mathbb{N}$.
Fuente: Verdugo-Hernández (2016, p. 101)

En términos del ETM, PU3 realizó una propuesta en donde se activaron las génesis discursiva e instrumental, evidenciando la activación de los planos verticales [Sem-Dis] y [Sem-Ins]. El plano vertical [Sem-Ins] se evidencia debido a que el docente activa la génesis instrumental a través del gráfico realizado por medio del *software* Maple. El plano vertical [Sem-Dis] se activa debido a que el docente activa la génesis discursiva en dirección de la prueba, ya que demuestra el acotamiento y la monotonía de la sucesión $(a_n)n \in \mathbb{N}$.

Además, se realiza una segunda entrevista a PU3 para consultarle si él genera regularmente actividades con Maple en sus clases, a lo cual él afirma que sí, aunque dicha información no se pudo corroborar.

Se puede constatar que el trabajo matemático desarrollado por el docente se encuentra en el paradigma AC, ya que este utiliza reglas del cálculo, sin necesariamente profundizar en la naturaleza de los objetos. Podemos señalar además que la propuesta de PU3 posee un razonamiento propio del dominio específico de las sucesiones, dado que utiliza herramientas relacionadas con estas, demostrando detalladamente el acotamiento y la monotonía. La importancia de estos aspectos radica en la utilización del referencial propio de las sucesiones, ya que, por lo dicho anteriormente, una de las herramientas fundamentales para el estudio de la convergencia de las sucesiones es el criterio de convergencia de las sucesiones monótonas y acotadas. Entonces, de hecho, para aplicar este criterio, ni siquiera se necesita calcular el límite (el cual se debería calcular una vez que se sabe que la sucesión es convergente, si es posible), sino que basta con probar la monotonía y el acotamiento para demostrar la convergencia. Por esa razón es una herramienta teórica importante, ya que ni siquiera se requiere conocer explícitamente el término general de una sucesión para probar que es convergente.

5. Conclusiones

En esta investigación hemos realizado un estudio de caso para abordar las posibles formas de enseñanza de la sucesión $(a_n)n \in \mathbb{N}$, por medio del análisis de las producciones de tres docentes universitarios en relación a cómo ellos tratarían esta cuestión frente a sus eventuales estudiantes. Para esto, hemos aplicado el modelo del ETM del análisis real, analizando particularmente el ETM idóneo universitario, considerando las distintas componentes, génesis y planos, así como también los distintos paradigmas del análisis real.

Desde el punto de vista teórico, hemos analizado el ETM idóneo, a partir de lo cual evidenciamos que PU1 trabaja mucho más en el desarrollo de la génesis semiótica en su propuesta, mientras que los otros dos profesores universitarios abordan lo solicitado activando también las otras dos génesis. En concordancia con lo anterior, los tres docentes activan distintos planos verticales, evidenciando que PU2 y PU3 privilegian por sobre todo la prueba. Sin embargo, esto podría obedecer a distintas razones, entre las cuales estaría el tipo de carrera hacia donde están dirigidas las clases, dado que PU2 y PU3 enseñan en carreras de Ingeniería Civil, donde supuestamente la complejidad matemática debería ser mayor, mientras que PU1 realiza clases en Ingeniera Comercial, donde la complejidad apuntaría a otras áreas del conocimiento.

En relación a los paradigmas, constatamos que el trabajo de estos tres profesores universitarios se posiciona en los paradigmas AG y AC. Debemos señalar que en este estudio de caso, en donde nos centramos solamente en la producción de los docentes relativa al tratamiento de la sucesión $(a_n)n \in \mathbb{N}$, no evidenciamos el paradigma AR, cuestión que era esperable, ya que para lo anterior requeriríamos considerar otros elementos que contribuyan al ETM idóneo, tales como el estudio teórico de las sucesiones, donde se introduzca al menos la noción de convergencia, involucrando la completitud del sistema de los números reales. Asimismo, a pesar de que los ETM idóneos estudiados se enmarcan, como ya hemos mencionado, en distintos paradigmas, destacamos que el artefacto (*software* en este caso) podría jugar un rol importante en la estructuración del ETM idóneo. Por otro lado, es interesante destacar un tipo de trabajo que privilegia la utilización de herramientas teóricas de las funciones (la regla de L'Hôpital), y otro tipo que no las incluye, pero que incorpora herramientas operatorias, las cuales pertenecen a otros dominios de las matemáticas (el teorema del binomio), dando cuenta de dos líneas de trabajo bien diferenciadas en relación a las sucesiones.

En este trabajo se ha constatado que las propuestas de los docentes privilegian distintas componentes de trabajo en el ETM. En principio no se puede confirmar que alguna de estas propuestas sea mejor que las otras, sin embargo, el estudio del ETM nos indica claramente que algunos docentes han desarrollado más ciertas componentes que otras. En este sentido postulamos que, abarcando una mayor cantidad de génesis y componentes, y generando una mayor circulación entre ellas, es decir, activando los distintos planos verticales, se estaría ofreciendo la posibilidad de una mejor enseñanza y comprensión de las materias. Asimismo, en concordancia con lo anterior, pensamos que el hecho de estructurar la enseñanza basada en los tres paradigmas podría apoyar la concepción de un posible trabajo matemático completo, en el sentido de presentar una propuesta que abarque la integración coherente de ellos, dando cabida a un trabajo de enseñanza más amplio e incorporando un proceso completo en el desarrollo del trabajo del docente.

En consecuencia, creemos que es interesante que los profesores enseñen posicionándose en los tres paradigmas y puedan mostrar las limitaciones y ventajas de usar uno por sobre el otro, y sobre todo las ventajas de integrarlos holísticamente de forma coherente. En este marco de trabajo, sería deseable obtener resultados desde el punto de vista del ETM personal del estudiante, en donde los docentes apliquen un ETM idóneo transitando entre los paradigmas y no solamente privilegiando uno sobre otro. En ese sentido, sería adecuado integrar el aspecto gráfico de las sucesiones con el aspecto teórico, sin descuidar este último, de manera de producir una mayor comprensión en los estudiantes sobre las tareas teóricas que se esperaría que ellos enfrentaran, algunas de las cuales sintetizamos en este trabajo por medio de la sucesión estudiada a través de las producciones de los docentes universitarios. En todo caso, queda abierto analizar si efectivamente los estudiantes lograrían apropiarse más de los conceptos teóricos si se incorporaran los aspectos gráficos de las sucesiones, y asimismo si se integraran todos los paradigmas del análisis, incluyendo los planos verticales y génesis del ETM, importante cuestión que será analizada en otro trabajo.

Agradecimiento:

Proyectos de Investigación Regular (2019-113). Universidad Adventista de Chile.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(1), 40-55. Recuperado desde http://funes.uniandes.edu.co/9584/1/Artigue1998Enseñanza.pdf

Bergé, A. (2008). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 217-235. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9101-5

Bloch, I. (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université. Savoirs, connaissances et conditions relatvies à la validation* (Tesis doctoral). Université Bordeaux I, Burdeos, Francia. Recuperado desde https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01222400/document

Bobadilla, G., y Labarca, R. (2004). *Cálculo*. Santiago: Facultad de Ciencias. Universidad de Santiago de Chile.

Dhombres, J. (1980). *Nombre, mesure et continu: Epistémologie et histoire*. París: CEDIC.

Gómez-Chacón, I. M., Kuzniak, A., y Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema, 30*(54), 1-22. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01

Hairer, E., y Wanner, G. (2000). *L'analyse au fil de l'histoire*. Alemania: Springer-Verlag.

Kuratowski, K. (1962). *Introduction to calculus. Massachusetts*, U.S.A.: Addison-Wesley Publishing Company Inc. Reading.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathematique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 6, 9-24. Recuperado desde https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01060043/document

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., y Vivier, L. (2016). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 5, 237-251. Recuperado desde https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/23942

Kuzniak, A., y Richard, P. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *Relime, 17*(4.1), 17-26. https://doi.org/10.12802/relime.13.1741b

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2-3), 259-288. https://doi.org/10.1023/A:1016004822476

Montoya, E., y Vivier, L. (2016). Mathematical Working Spaces as an analyzing tool for the teaching and learning of calculus. *ZDM, 48*(6), 739-754. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0777-9

Oktaç, A., y Vivier, L. (2016). Conversion, Change, Trnsition... in Research About Analysisi. En B. Hodgson, A. Kuzniak, y J. B. Lagrange (Eds.), *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues* (pp. 87-121). New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-26047-1_5

Robert, A. (1982). *Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur* (Tesis doctoral). Université de Paris VII, París, Francia. Recuperado desde https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01250393/file/thèse%20Robert.pdf

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable.* México: Prentice Hall Hispanoamérica.

Verdugo-Hernández, P. (2018). *Espacio de Trabajo Matemático del Análisis: Enseñanza de las sucesiones en los primeros años de universidad* (Tesis doctoral). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile. Recuperado desde http://repositorio.conicyt.cl/bitstream/handle/10533/208871/ANEXOS.pdf?sequence=4

Verdugo- Hernández, P. (2016). Una Aproximación al ETM idóneo de las Sucesiones: el caso de la Sucesión (1+1/n)n en la Enseñanza Secundaria y Universitaria. En I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, R. Richard y L. Vivier (Eds.), *Acta del Quinto Simposio Internacional ETM* (pp. 95-103). Florina, Grecia.

VOLÚMEN 12
N°2
AGOSTO 2020

RECH
IEM

REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

sochiem