REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

R E C H I E M

VOLUMEN 10
1
2016
ISSN 0718-1213

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diseño y Diagramación de la Edición Digital

Editorial Gráfica: Duográfica Ltda
Contacto: rechiem@sochiem.cl

Revista Chilena de Educación Matemática RECHIEM

VOLUMEN 8 N° 1-2014
ISSN N° 0718-1213

Revista RECHIEM, es una publicación de la Sociedad Chilena de Educación Matemática.
Las opiniones señaladas en notas o artículos firmados no representan las del Comité Editorial ni de la Sociedad.
LA dirección se reserva el derecho de publicar o sintetizar los artículos que estime conveniente. Correspondencia dirigirla a: rechiem@sochiem.cl

RECHIEM©
Inscripción N°143.059
ISSN n°0718-1213

Diseño de portada: Miguel Díaz Flores
Diseño y Diagramación (Edición Digital): Duográfica Ltda.
Noviembre 2016

Índice de contenidos

Índice de contenidos

Editorial

En este volumen, la revista RECHIEM, se presenta un breve análisis de las situaciones concretas de la Educación Matemática en América Latina, particularmente en Chile. Proponemos examinar más a fondo, algunas esferas de interés para quienes propugnan procesos de reforma en la región: la dinámica del proceso de cambios propiamente tales; la evaluación del rendimiento educativo matemático; la formación y habilitación docente, tanto en los niveles Básicos, Medios y Superiores, es por ello que los autores de los artículos presentados aquí, se concentran en la identificación y evaluación de las principales tendencias y problemas ad hoc, así como también de las opciones a las que podría recurrirse.

La idea de que el fracaso en Matemática es un problema para la democracia y la equidad, se debe entender como parte de una configuración histórica donde el logro de los individuos y la población se conecta con el desarrollo de capital humano y el progreso social y económico. El deseo de una población con más capacidades matemáticas, va de la mano de la generación de mecanismos de ordenación y clasificación de la población y la inclusión (exclusión) con relación al éxito (fracaso) en las matemáticas escolares. La investigación internacional en educación matemática ha abordado este problema desde distintas posiciones teóricas. Dos de ellas se identifican: la posición del empoderamiento supone que las matemáticas transfieren sus atributos de poder a quienes las aprenden, o bien por sus características intrínsecas, o por sus aplicaciones, o por su carácter crítico. La posición de la desigualdad supone que las matemáticas como formas de conocimiento en sí o como parte de las prácticas escolares se entrelazan con mecanismos de clasificación social de acuerdo con otras categorías, como la habilidad, el género, el lenguaje, etc. Las tensiones que emergen en el campo de la educación matemática por la co-existencia de esta diversidad de visiones llama a tomar una posición ética y política sobre qué posibilidades hay para la investigación y la práctica.

Por otra parte, la tendencia de la modelación en Educación Matemática pone de relieve una visión de la Matemática, como conocimientos y procedimientos en acción, y uso en la construcción de modelos matemáticos como parte de sistemas científicos, tecnológicos y sociales de acción, a través de los cuales se abordan problemas complejos. El propósito principal de esta publicación es, entonces, facilitar que se comprenda la Matemática, como una herramienta poderosa que se puede conectar con una diversidad de aspectos de la vida natural y social. Así la adquisición de la competencia de modelación matemática potencia el conocimiento, pero también asegura el avance de la sostenibilidad del bienestar de la salud, la educación y el medio ambiente, que conlleva a una reducción de la pobreza.

Carlos Silva Córdova
Presidente
Sociedad Chilena Educación Matemática - SOCHIEM

Exclusión-inclusión: Un fenómeno dialéctico en el profesor de matemáticas

Daniela Soto S.
Universidad de Santiago de Chile, Chile
daniela.soto.s@usach.cl

Resumen

El estudio que presentamos pretende dar visibilidad, desde la teoría Socioepistemológica, a la dialéctica exclusión – inclusión en el campo de la Matemática Escolar. En particular, estudiaremos las prácticas del profesor de matemáticas de enseñanza media cuando transita, en un ir y venir, entre la *Construcción Social del Conocimiento Matemático* (*CSCM*) y el *discurso Matemático Escolar* (*dME*). Analizaremos una situación de aprendizaje, donde observaremos –*grosso modo*– la confrontación entre estas dos epistemologías del conocimiento matemático (*dME* y *CSCM*).

Introducción

Este estudio parte de la siguiente premisa; el *discurso Matemático Escolar* (*dME*) "nos" excluye de la *Construcción Social del Conocimiento Matemático* (*CSCM*). Para profundizar sobre este hecho, decidimos ampliar la perspectiva preguntándonos ¿qué significaría una matemática inclusiva desde la perspectiva Socioepistemológica?

En el primer estudio que realizamos (Soto y Cantoral, 2014), logramos identificar, caracterizar y ejemplificar el fenómeno de exclusión que provoca el propio saber matemático escolar. Tomamos un ejemplo concreto del *dME*, un saber típico del cálculo diferencial; el teorema de L'Hôpital, y analizamos cómo se presenta en los textos de estudio del cálculo y en su génesis histórica. A partir de esto, logramos proponer un *modelo de exclusión* que nos permitió caracterizar al *dME* como un *sistema de razón* que produce un tipo sutil de exclusión, a saber: la *violencia simbólica.*

En la presente investigación nos propusimos observar cómo vive este fenómeno en uno de los actores principales del escenario educativo: el *profesor de matemáticas*. Consideramos los elementos discursivos y de su práctica que le permiten una construcción de conocimiento matemático inclusivo.

Para esto, fue necesario construir "categorías" que nos permitirán el análisis de los elementos discursivos del actor en cuestión. Dichas categorías, que en un principio tomaban una forma dicotómica simple; ubicando al profesor como un reproductor del *dME* o como un innovador que se aproxima a las ideas de la *CSCM*, fueron evolucionando hacia una postura dialéctica (Figura 1).

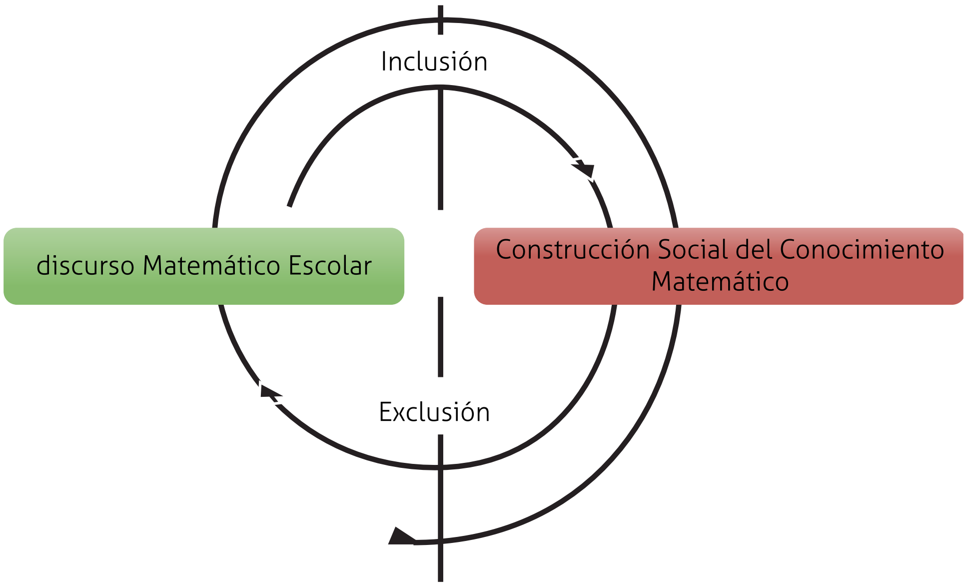


Figura 1. Dialéctica exclusión-inclusión.

De esta forma, la idea dicotómica de la exclusión y la inclusión fue desvanecida ante la toma de datos, pues encontramos que el profesor transita en todo momento entre la *CSCM* y el *dME*, Así, concluimos, en una primera etapa, que la relación entre estas categorías contrarias era dialéctica.

Ante esta nueva postura, surgieron nuevas preguntas: ¿Cómo transita el profesor de matemáticas en esta relación dialéctica? o ¿Cuáles son los elementos que le permiten transitar? Es decir ¿Cuáles son los elementos que le permiten cambiar o mantener sus prácticas?

El análisis del profesor de matemáticas de bachillerato se desarrolló a partir de la noción de campo de Bourdieu (2008). Por una parte, caracterizaremos el campo del profesor de matemáticas de bachillerato en México a través de datos estadísticos que proporcionó la muestra de estudio: profesores partícipes del Diplomado "Desarrollo de estrategias de aprendizaje para las matemáticas del bachillerato: la transversalidad curricular de las matemáticas" desarrollado por el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV bajo convenio con la Subsecretaria de Educación Media Superior de la SEP. Mediante la elección de casos de estudio analizamos en profundidad los discursos de los profesores con la técnica del *Análisis Crítico del Discurso* (*ACD*) (Soto, 2014).

Los resultados de esta investigación mostraron el tránsito vivido por el profesor de matemáticas entre la *CSCM* y el *dME*, donde la confrontación entre argumentaciones, la interacción entre argumentaciones, significaciones y procedimientos, y la institucionalización como mecanismo; se conjugan para hacer funcionar esta dialéctica en torno al conocimiento matemático. Asimismo, se identificaron tres condiciones que propician el tránsito: la economía como principio en la construcción de situaciones, la jerarquización del pensamiento matemático y el empoderamiento del profesor.

Para fines de este escrito reflexionaremos sobre la confrontación entre el *dME* y la *CSCM*. Para ello, consideraremos un ejemplo concreto; la graficación. Observaremos un episodio donde el profesor propone, en un foro del Diplomado, una situación para aplicar en su clase e inferiremos el desarrollo de la misma, a través de los cuadernos de los estudiantes.

Problemática

Desde la postura socioepistemológica la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se han caracterizado por una centralidad excesiva en el objeto matemático. Olvidando que es el sujeto en comunidad quien construye el conocimiento (Cantoral, 2003; Cordero, 2001). Las investigaciones han señalado la conformación social de un discurso que ha fundamentado a la matemática escolar actual. Este discurso, el cual lo entendemos -en esta investigación- como un *sistema de razón* que norma las prácticas y las representaciones sociales de los actores del sistema educativo, se ha denominado: *discurso Matemático Escolar* (*dME*).

En Soto y Cantoral (2014) caracterizamos un fenómeno que podría estar produciendo el *dME*: un tipo de exclusión que se expresa en una imposición de significaciones, argumentaciones y procedimientos centrados en los objetos matemáticos, del cual los agentes del sistema educativo somos víctimas involuntarias. Inclusive aquellos que parecen ser exitosos dentro de la Matemática Escolar, como es el caso del profesor de matemáticas. Esto es la *violencia simbólica*. Es así, como desde la Socioepistemología se hace necesario el rediseño del *dME* a partir de la *Construcción Social del Conocimiento Matemático (CSCM)*.

Asumimos que el profesor de matemáticas también vive un proceso de exclusión, pero además, es uno de los agentes encargado de reproducirla. Por tanto, es fundamental tener, estudios acerca de él, de su campo y de la estructura del *dME* que en él se materializa.

Es en el proceso de reproducción donde nos enfocaremos, en decir, en su quehacer profesional. En particular en su práctica discursiva. Creemos que es en este punto donde podemos encontrar elementos que nos permitan sistematizar la inclusión desde nuestra postura epistemológica.

Antecedentes

Una realidad social que vivimos en Latinoamérica, en particular en México, es la hibridez de la población de profesores de matemáticas, esto quiere decir que, en general, los profesionales que se desempeñan haciendo clases de matemáticas han tenido una formación, si bien relacionada con ámbitos de la matemática, no necesariamente es una formación que se vincule con su enseñanza y aprendizaje (Soto, 2014; Reyes y Cantoral, 2014). En otras palabras, un profesor en México puede no tener experiencias con los contenidos pedagógicos o didácticos y sólo apoyarse de su propia experiencia como estudiante y como profesor.

Esta situación no dista mucho de nuestra realidad, por ejemplo: en enseñanza media tenemos otros profesionales que dictan clases de matemáticas. Esto es importante en el sentido que debemos profesionalizar a los profesores que hoy tenemos en nuestras aulas. Debemos resaltar que esta realidad no es considerada por algunos modelos teóricos que se desarrollan fueran de la región latinoamericana (Cordero y Silva-Crocci, 2012), por esto la pertinencia de este estudio.

El Diplomado que cursaron los profesores, sujetos de estudio de esta investigación, se relaciona estrechamente con entender que el conocimiento matemático es una construcción social, para ello se *problematizó el saber* a través de las cuatro dimensiones sistémicamente consideradas, a saber: didáctica, cognitiva, epistemológica y social. Además, se promovió la resignificación de los contenidos de la matemática escolar, es decir, se mostraron otros contextos de significación y se reflexionó acerca de la coherencia en su comunidad. Se analizó y razonó sobre las problemáticas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y las diferentes posturas epistemológicas y se las vinculó con su práctica docente, al incentivar la construcción de situaciones de aprendizaje.

Nuestra mirada del fenómeno de exclusión-inclusión es dialéctica, por tanto, consideramos que existe una lucha de contrarios: en este caso el *dME* y la *CSCM*, que permite el cambio y la transformación. Por tanto, la pregunta específica que nos hacemos en esta investigación es ¿Cuáles son los elementos que permiten el tránsito entre una y otra epistemología? Y en esa lucha de contrarios ¿Cuál es la síntesis?

La graficación

Primero partiremos diciendo que la gráfica usualmente en el *dME* aparece como la representación de una función, es decir, la gráfica siempre está vinculada con la idea de función algebraica (analítica). En ella se expresa la idea de la figura que representa a la función y sus características. Sin embargo, hemos documentado que el uso de la gráfica, tanto en su génesis histórica como en su funcionalidad cotidiana permite la construcción de conocimiento por sí sola. Este hecho ha originado la construcción de una categoría para el conocimiento que debemos abordar: el *uso de la gráfica*

El nacimiento de esta categoría tiene su origen en asumir que la graficación es una práctica social (Cordero, 2001; Cordero y Solís, 2001, Domínguez, 2003; Cordero y Flores 2007; Rosado, 2004: Morales y Cordero, 2014; entre otros). Existe evidencia que desde el comienzo de la historia de la humanidad han existido formas gráficas que le permitían al hombre desarrollarse y comunicarse. En la escuela, el universo de gráficas que debemos conocer es amplio y constituye una red de conocimientos. Ahora bien, es importante reconocer que para la perspectiva socioepistemológica la gráfica no sólo vive en la escuela, sino además en otros escenarios.

Se ha analizado el *uso de la gráfica* en diversas situaciones específicas, por ejemplo: el uso de la gráfica en la situación de linealidad del polinomio. Rosado (2004) pone en escena una situación para resignificar el concepto de derivada, a través del comportamiento tendencial de las funciones. Esto es de suma importancia, ya que si bien la resignificación es de un objeto matemático, el núcleo central, "la función", no es considerada tradicionalmente como un objeto o proceso matemático, sino como una práctica; una instrucción que organiza comportamientos. Al resignificar el concepto de función, la derivada también se resignifica.

El análisis del uso de las gráficas en lo histórico se ha desarrollado principalmente en la obra de Oresme (1379) (Suárez, 2008; Suárez y Cordero, 2010; Zaldívar y Cordero, 2012), en ella se reconoce cómo son usadas las gráficas para argumentar los cambios y la variación de un fenómeno mediante el estudio de sus cualidades (aquello que cambia, como la velocidad, la distancia o el calor), y su devenir (la manera en que crece o disminuye esa cualidad). Oresme expresa este devenir mediante un gráfico de dos dimensiones, en el que plasma los cambios y la variación mediante gráficas que adquieren formas particulares según el devenir de las cualidades. En esta obra se parte del principio que el instante de una cantidad continua es representado por un segmento rectilíneo (Cordero. Cen, y Suárez, 2010)

En esta obra (Oresme, 1379) las gráficas no consistían en describir posiciones de los puntos respecto de coordenadas específicas, sino que la figura en sí era la cualidad de la cantidad continua, en este sentido las figuras adquieren un significado global de trayectoria.

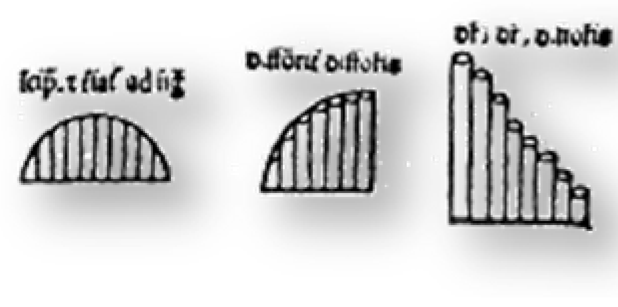


Figura 2: La cualidad de la cantidad continua (Oresme, 1379).

Hoy las investigaciones han evidenciado que el significado de trayectoria, es intrínseco al humano. Por ejemplo, al proponer una situación de movimiento lo primero que desarrollan los estudiantes son representaciones gráficas de un recorrido o trayectoria (Briceño, 2013; Zaldívar, 2009). Teniendo este antecedente se pueden formular situaciones donde el uso de la gráfica se resignifique. Por ejemplo, que exista la necesidad de considerar el tiempo dentro de sus expresiones gráficas. Esto permite el tránsito de una argumentación desde la trayectoria a la gráfica cartesiana.

Otro uso de la gráfica que se ha logrado documentar es en el sistema educativo. Se han realizado algunas investigaciones que nos señalan cómo se usa la gráfica en la escuela, entre ellas: Cen (2006), quien documenta el uso en el bachillerato y Flores (2005) en el nivel básico. Por ejemplo, se documenta que la gráfica aparece desde los comienzos de la educación primaria, pero que no es explícita en los programas de estudio, ni el texto, aun así vive, se resignifica y se usa para resolver problemas. Existe en un comienzo un síntoma de la gráfica, que se manifiesta en formas de mapas, ilustraciones, planos, entre otras, apoyándose de estrategias como la ubicación, la comparación y el trazado de trayectorias (Cordero y Flores, 2007). Luego se configura un segundo momento que es el uso de la gráfica de la función. En este momento, curricularmente se menciona la palabra gráfica, sin hacer alusión al concepto de función y un tercer momento que es el uso de la gráfica en la curva.

En el bachillerato se identificaron los siguientes momentos del uso de la gráfica: comportamiento geométrico, análisis de las curvas, cálculo de áreas, cálculo de volúmenes y análisis de la información (Cen, 2006).

Para cerrar, en necesario decir que consideramos la categoría *uso de la gráfica* como un eje del rediseño del dME desde la *CSCM*, creemos que ella nos permite reconocer nuevas las argumentaciones, significaciones y los procedimientos que permiten hacer emergee el conocimiento matemático en la escuela y fuera de ella.

A continuación, mostraremos un episodio de rediseño por parte de uno de los profesores, casos de estudio de esta investigación. En él podremos observar cómo existe una confrontación entre lo que se propone y lo que finalmente se lleva a cabo.

Un episodio

Este es el caso de un profesor participante del Diplomado. Él en un foro especifico propone la siguiente actividad para desarrollar en su clase (ver análisis completo en Soto, 2014).

Módulo 3, Foro 5
Para rediseño del dME propongo la siguiente actividad iniciando con un reto: ¿Cuál es el comportamiento del agua potable en los cambios de temperatura hasta el momento del cambio de estado? ¿Cuál es el comportamiento del agua de mar en los cambios de temperatura hasta el momento del cambio de estado? ¿Existe alguna diferencia? Para estudiar el fenómeno se propone lo siguiente; formar ocho equipos, equipos; cuatro estudiaran su comportamiento elevando su temperatura por medio de un mechero calentando el agua a punto de evaporación; cuatro equipos, reduciendo su temperatura en un congelador al punto de congelación. Cada equipo deberá presentar una gráfica de temperatura con intervalos de tiempo de 2 minutos y contestar las siguientes interrogantes. ¿Qué tipo de comportamiento te muestra la gráfica (lineal o en forma de curva)? ¿Existe variación en el volumen? ¿Qué variables se presentan en el fenómeno? En función de quien se presentan los cambios de las variables y comenta la dependencia de las variables (es decir quién depende de quién). Asigna una letra a cada variable y aproxima una ecuación que describa tu comportamiento gráfico. Gráfica tu ecuación en winplot y verifica si describe la misma gráfica; si no fuera de esta manera cambia los valores y las variables hasta lograr una aproximación mayor. ¿Existió alguna diferencia entre las gráficas del agua potable y el agua de mar? ¿Si se mesclan ambas muestras de agua que tipo de gráfica se obtendrá? En esta actividad los alumnos manejarán variables hasta construir el concepto de función, en forma gráfica obtendrán la función identidad, misma que se puede conectar con otros temas de matemáticas. Esta actividad se conecta además con otros temas de física, por ejemplo, pueden calcular la energía suministrada por medio de la primera ley de la termodinámica. Esto es solo un bosquejo, se le tiene que dar una forma más explícita.

Al observar el cuaderno de los estudiantes reconocimos la gráfica que se construyó a partir de la observación del fenómeno (Figura 3) y las preguntas de la actividad (Figura 4), que se titula el congelamiento del agua del mar.

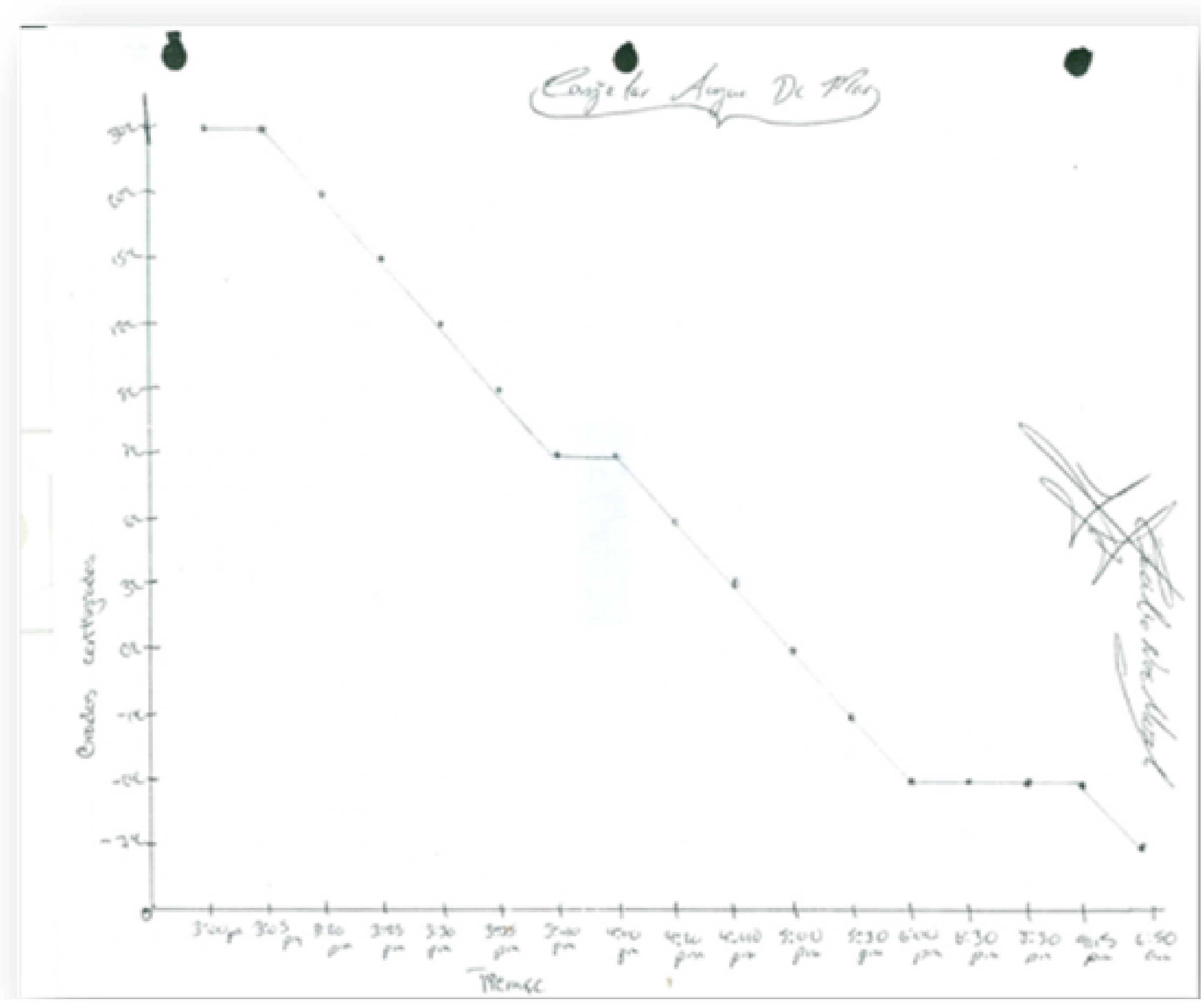
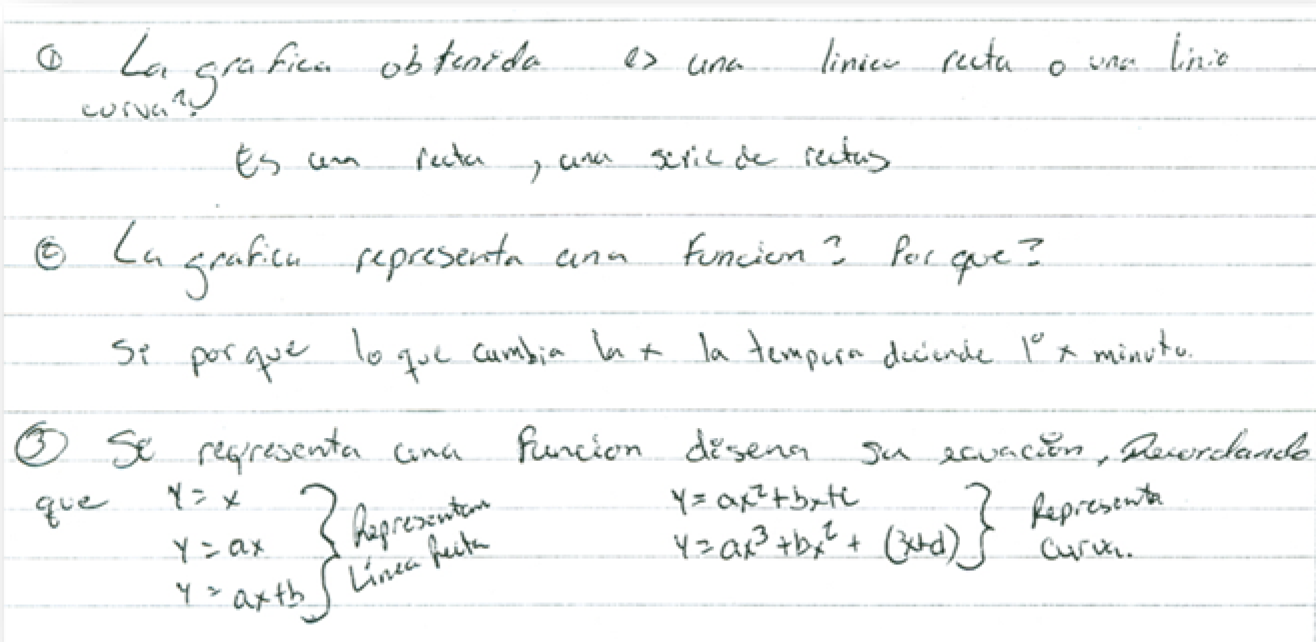


Figura 3: **Gráfica de la congelación del agua del mar extraída del cuaderno de un estudiante del Caso 2.**

Si observamos las preguntas que se llevaron a cabo en la actividad (Figura 4), interpretamos, que si bien se desarrollan actividades que permiten involucrar situaciones específicas, las preguntas que se generan para el análisis de la gráfica son relativas a las funciones que forman las gráficas obtenidas de los datos del fenómeno (Figura 3). Es decir, a pesar de que se proponen situaciones específicas de fenómenos y su análisis gráfico, la centralidad sigue estando en el objeto "función".



① La grafica obtenida es una linea recta o una linea curva?
Es una recta, una serie de rectas
② La grafica representa una funcion? Por que?
Si porque lo que cambia la x la tempera decinde 1° x minuto.
③ Si representa una funcion diseña su ecuación, Recordando que
$Y = x$, $Y = ax$, $Y = ax+b$ } Representan Línea recta
$Y = ax^2+bx+c$, $Y = ax^3+bx^2+(cx+d)$ } Representa curva.

Figura 4: Pregunta de la actividad "congelamiento del agua del mar".

De esta forma observamos que el *dME* expresa a la gráfica como una representación de la función. Esta es una postura epistemológica que centra su atención en el objeto matemático la cual, inferimos, produce una imposición de argumentaciones, significaciones y procedimientos, donde el fenómeno estudiado aparece como un contexto artificial de la función lineal. De esa forma se pierden argumentaciones, procedimientos y significados que provienen del fenómeno específico. Por ejemplo, cuando se estabiliza la temperatura.

A modo de conclusión

En este mini análisis de un dato específico, intentamos mostrar cómo frente al uso de la gráfica, dos epistemologías se confrontan. En este caso, el *sistema de razón* norma la acción y las representaciones del agente especifico, el profesor de matemáticas. Si bien, él propuso una actividad que provocaba el análisis de un fenómeno especifico, de la cual emergerían argumentaciones, significaciones, procedimientos y objetos matemáticos, durante la tarea matemática la centralidad está en la función lineal que representa la gráfica.

Es importante señalar que este estudio es parte de una investigación detallada sobre las prácticas y discursos de casos específicos de profesores de matemáticas mexicanos (Soto, 2014). La cual obtuvo como resultados, a través de la triangulación de datos, seis elementos que permiten o no, la inclusión del profesor de matemáticas en la *CSCM*, estas fueron: la confrontación entre argumentaciones durante la situación específica, la interacción entre argumentaciones, significaciones y procedimientos que emergen de la situación, y la institucionalización-resignifición como mecanismos que nos permiten transitar en la dialéctica, la economía como principio en la construcción de situaciones, la jerarquización del pensamiento matemático y el empoderamiento del profesor.

Debemos cerrar diciendo que estos resultados, si bien no son elementos que no se hayan discutido en torno al profesor de matemáticas, hoy miramos estas condiciones desde la producción de un fenómeno específico: la exclusión, y su contrario la inclusión a partir de la dialéctica.

Referencias

Bourdieu, P. (2008). Los usos sociales de la ciencia. (Trad. H. Pons y A. Busch). Buenos Aires, Argentina: Nueva Visión. (Original en Francés, 1997)

Briceño, E. (2013). El uso de la gráfica como instrumento de argumentación situacional con recursos tecnológicos. Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav-IPN, D.F, México.

Cantoral, R. (2003). La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente. [CD-ROM] XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática. Tema: Educación Matemática & Desafíos y Perspectivas. Blumenau.

Cen, C. (2006). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de textos. Una práctica institucional en el bahillerato. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav-IPN, D.F, México.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana., Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4(2), 103-128.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de la gráfica en el discurso matemático escolar. Un estudio sociepistemológico en el nivel básico a través de los libros de textos. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10(1), 7-38.

Cordero, F. y Silva-Crocci, H. (2012). Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica. El quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. Revista latinoamericana de Matemática Educativa, 15 (3): 295-318.

Cordero, F. y Solís, M. (2001). Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo. Edición especial. Casio (3ra edición). Serie: Cuadernos de didáctica. México: Grupo editorial Iberoamericana.

Cordero, F.; Cen, C. y Suárez, L. (2010) Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13(2), 187-214.

Domínguez, I. (2003). La resignificacion de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica. Tesis de (maestría) no publicada, Cinvestav- IPN, México, D.F.

Flores, R. (2005). El Uso de la gráfica en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de textos. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav- IPN, México, D.F.

Rosado, P. (2004). Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav-IPN, D.F, México.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). El discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión Socioepistemologica. Bolema- Boletim de Educação matemática, 28 (50), 1525-1544.

Soto, D, (2014). La dialéctica exclusión-inclusión entre el discurso matemático escolar y la construcción social del conocimiento. Tesis de doctorado no pub-

licada. Cinvestav-IPN, D.F, México.

Suárez, L. (2008). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. Tesis de (Doctorado) no publicada. Cinvestav-IPN, D.F, México.

Suárez, L., y Cordero, F. (2010). Modelación – Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13(4), 319-334.

Zaldívar, D. & Cordero, F. (2012). Un estudio socioepistemológico de lo estable. Consideraciones en un marco de la divulgación del conocimiento matemático. Memorias del Primer Coloquio de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav – IPN, 203-212.

Rol de profesor para promover la competencia de argumentación en la clase de matemáticas

Horacio Solar Bezmalinovic
Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
hsolar@uc.cl

Resumen

Sobre la base de un seminario con profesores que tiene como propósito la gestión de la argumentación en el aula de matemáticas, presentamos el caso de una clase en que se describen los procesos de argumentación utilizando el modelo de Toulmin, y se analiza la gestión de la argumentación docente por medio de estrategias comunicativas. Con ellos se discute de qué maneras las estrategias comunicativas promueven la argumentación en al aula de matemáticas.

Introducción

Si bien la mayoría de las investigaciones han tratado el desarrollo de la argumentación en el aula, hay pocos estudios que exploren los elementos que la promueven en ella. El estudio consiste en identificar las causas que promueven la argumentación en cursos de matemática de enseñanza básica. Estos resultados tendrían como implicación didáctica proporcionar lineamientos para la formación de profesores de matemáticas, que permitan organizar situaciones de desarrollo de la competencia de argumentación.

En general, los análisis de argumentación en el aula se sustentan en el modelo argumentativo propuesto por Toulmin (1958), que sigue un proceso lineal desde los datos hasta las conclusiones. Esta secuencia consta de seis elementos (Goizueta & Planas, 2013): Datos, Conclusión, Garantía, Respaldo, Calificador modal, Refutadores (figura 1).

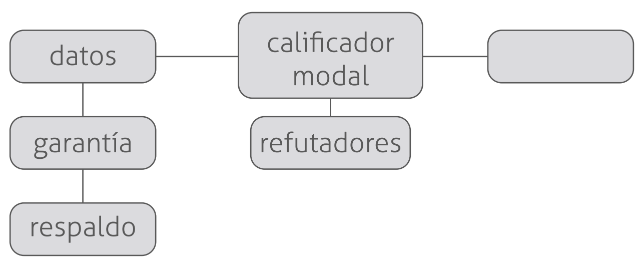


Figura 1: Modelo de Toulmin (1958)

Algunos trabajos en educación matemática han estudiado la construcción individual de los argumentos en el aula de matemáticas, mientras que otros han destacado la argumentación colectiva como una parte importante del discurso en el aula de matemáticas (Krummheuer, 1995). Los trabajos recientes en argumentación colectiva implican el estudio del aprendizaje de los estudiantes a través de este foco; Conner et al. (2014) estudian el papel del profesor en la argumentación colectiva, centrándose tanto en las partes de los argumentos que el docente proporciona, o para responder a los argumentos suministraddos por los estudiantes. La argumentación colectiva incluye cualquier instancia en que el profesor y los estudiantes hacen una sentencia matemática y presentan evidencias que la apoyen.

Para nuestro análisis interpretamos los componentes del modelo argumentativo de Toulmin como procesos matemáticos. En Solar, Azcárate & Deulofeu (2012) se muestra un estudio realizado en un curso de 8° básico sobre qué procesos argumentativos de la estructura de Toulmin (1958) emergen en la implementación de una unidad didáctica de interpretación de graficas funcionales, obteniendo como resultado agregar el proceso de interpretación a la estructura argumentativa.

Si bien la mayoría de los trabajos se enfocan a estudiar la argumentación en el aula de matemáticas, recientemente han aparecido investigaciones que han trasladado el foco a cómo el profesor entiende el desarrollo de la argumentación. Goizueta & Planas (2013) estudian las interpretaciones sobre la argumentación en clase de matemáticas de un grupo de profesores. De los resultados se destaca la difícil distinción que hacen los profesores de la estructura argumentativa. Una manera de estudiar la gestión de la argumentación, es por medio de las estrategias comunicativas. Varios autores han puesto el foco en la importancia del espacio de comunicación y discusión en el aula de matemáticas (Chapin, O'Connor, & Anderson, 2009), dichos autores han estudiado movimientos discursivos del profesor, y el tipo de preguntas para una discusión efectiva en el aula de matemáticas. En particular tenemos especial interés en las acciones docentes para promover una comunicación en el aula, a lo que hemos llamado estrategias comunicativas. Para ello nos hemos basado en Lee (2010) quien señala diversas estrategias que puede utilizar el profesor para incluir a todos los estudiantes en el discurso matemático, entre ellas: hacer preguntas y desarrollar actividades que todos los alumnos consideren que merecen reflexión; fijar objetivos que dejen claro que el profesor espera que todo el mundo contribuya; que el profesor se asegure de que todos tengan la oportunidad de aportar algo en un conjunto de temas; asegurar a sus alumnos que las respuestas equivocadas revelan errores que el profesor necesita aclarar. Otra estrategia tiene relación con el tipo preguntas que hace el profesor para guiar el discurso matemático. Ponte et al. (1997) señalan que una de las formas más importantes que tiene el profesor para orientar el discurso en clase es haciendo preguntas a los alumnos, cuestionándolos el profesor puede detectar dificultades en el nivel de comprensión de los conceptos y de los procesos matemáticos.

Las estrategias comunicativas señaladas nos parecen claves para analizar la gestión de la argumentación. Nuestro objetivo es estudiar de qué manera las estrategias comunicativas contribuyen a promover la argumentación en el aula de matemáticas.

Metodología

La metodología que utilizaremos para el logro del objetivo se enmarca en un enfoque cualitativo interpretativo. Para estudiar el desarrollo de la argumentación era necesario contar con un cuerpo de profesores que la promoviera en el aula, por ello se seleccionó a ocho profesores de enseñanza básica de establecimientos educacionales de la ciudad de Concepción para participar de un seminario de formación que ha tenido como propósito estudiar el desarrollo de la argumentación en el aula de matemáticas por medio de estrategias comunicativas.

En la primera etapa del seminario se han recogidos datos por medio de una observación no participante que se realiza a los profesores en el aula. Se grabaron seis clases correspondientes a seis profesores del seminario. Además de las grabaciones, se diseñó una pauta de observación en los focos de la investigación: condiciones de la argumentación y estrategias comunicación.

Como criterio de reducción de datos, consideramos de que debe existir una estructura de Toulmin que contemple como mínimo presencia de: dato, garantía, refutación y conclusión en un proceso de argumentación.

Se diseñó un instrumento de análisis para caracterizar las estrategias comunicativas que utiliza el profesor, basándonos principalmente en la propuesta de Lee (2010). Dado la generalidad de estas estrategias, fue necesario elaborar indicadores para cada una las estrategias comunicativas, las que se han especificado por el equipo de formadores del seminario y compartida con los profesores, lo que ha tenido como consecuencia una continua revisión de estos indicadores. Una vez que se tuvo una primera versión del instrumento fue validada por medio de un juez experto quien analizó los datos, logrando más de 70% de acuerdo en el chequeo cruzado, logrando así validar los indicadores según los criterios de Miles y Huberman (1994).

Para efectos de esta comunicación, presentamos uno de los episodios analizados para analizar la relación entre las estrategias comunicativas y el desarrollo de la argumentación en el aula.

Análisis de datos

El episodio que analizaremos corresponde a un curso de 7° básico (12-13 años) de un establecimiento educacional subvencionado de la ciudad de Concepción en Chile. La profesora del curso Matilde ha trabajado con el equipo de formadores en proyectos anteriores y antes del seminario ya tenía ciertos conocimientos sobre el desarrollo de la argumentación en el aula. La clase observada a la profesora tenía como intención promover la argumentación, pero sin contar una planificación para ello ni tampoco un estudio de las estrategias comunicativas.

Argumentación en el aula de matemáticas

En el curso de 7 básico se están estudiando los números enteros y Matilde presenta el siguiente problema: "Un número entero y su inverso distan en la recta 12 unidades. ¿qué números son? ".

Los números que está buscando Matilde que respondan los estudiantes son –6 y 6, para ello dibuja una recta numérica para situar los números, ella escucha que la respuesta genérica de los estudiantes son los números– 12 y 12.

Para generar un conflicto Matilde pregunta cuál será la distancia entre -12 y 12, el desarrollo de dicha pregunta genera una estructura argumentativa que mostraremos por medio del esquema de Toulmin. Para comprender como actúa este esquema se transcribe el episodio.

Matilde: Ya, ¿y qué distancia habría del -12, Daniel,

al +12?
Alumnos: 24.
A: No, 12 señorita.
Roberto: O sea no, sería 12.
Matilde: Tenemos...
Roberto: Porque del 0 se empieza a contar de nuevo.
A: Sí.
A: No.
Matilde: Ya, si de aquí hasta aquí tenemos una distancia de 12, ¿he llegado al inverso de -12? [Señala en la pizarra la distancia que hay de -12 hasta 0]
Alumnos: No.
Matilde: Miren, voy de -12 a su inverso, avanzo, ¿cuánto llevo hasta aquí? [Marcando el 0 en la recta numérica]
Alumnos: 12.
Matilde: Si sigo...
Javier: Es como multiplicarlo por 2 y sería 24.
Arturo: 24.
Matilde: ¿Cuánto avancé para llegar al inverso?
Alumnos: 24.
Matilde: ¿Cuál es la distancia de -12 hasta 12?
Alumnos: 24.
Matilde: Distan 24 unidades entre estos dos valores.
Alumnos: Sería del -6 al 6 entonces.

El esquema de Toulmin que corresponde a una argumentación colectiva, comienza con el dato, para este caso sería la pregunta de la profesora Matilde. Luego vienen dos respuestas que actúan como conclusiones diferentes 24 y 12, pero para efectos de seguir el proceso argumentativo tomaremos como conclusión falsa el 12. En los cuadros se han puesto las intervenciones tanto de Matilde como de los alumnos que son parte de la estructura argumentativa, en cambio, en los globos se han puesto las intervenciones de Matilde que contribuye por medio de preguntas a que aparezca la refutación a la falsa conclusión y luego a la conclusión verdadera (figura 2).

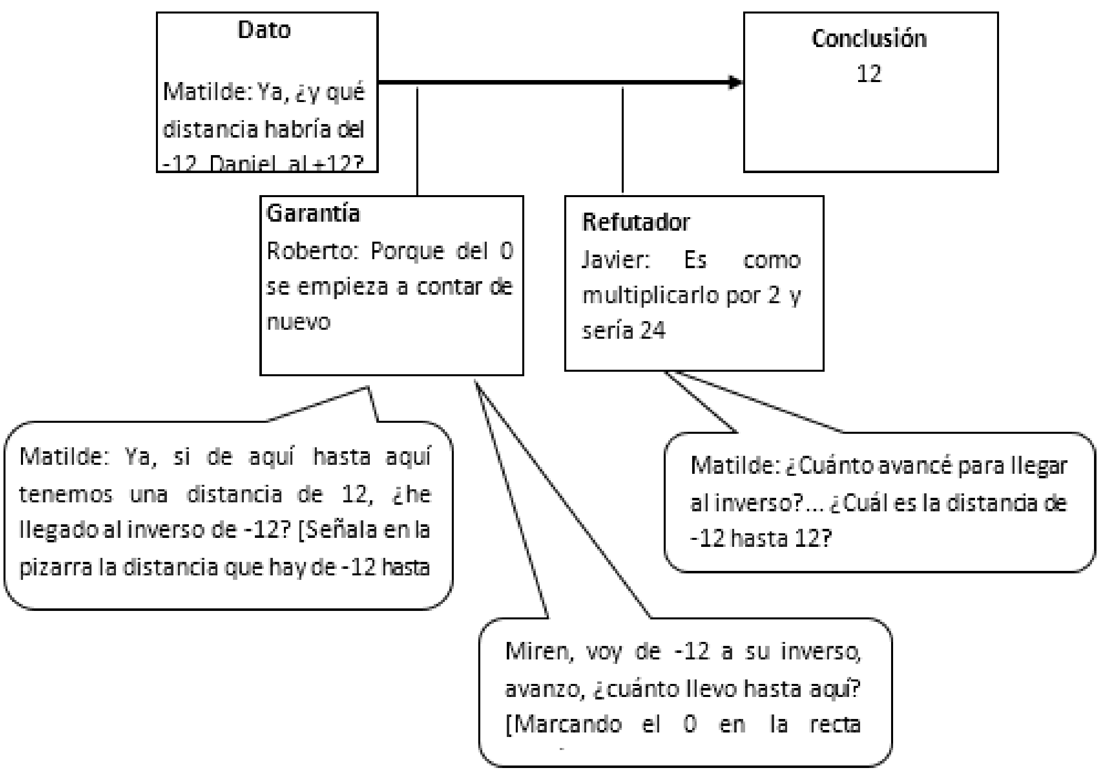


Figura 1: Mapa de la argumentación colectiva según el modelo de Toulmin.

En la clase de Matilde aparecen diferentes momentos argumentativos, pero hemos escogido este momento para ser analizado con la estructura de Toulmin porque la conclusión original es falsa y emerge la refutación por medio de las preguntas de Matilde. Si bien es la profesora quien comienza con el proceso de argumentación por medio del dato, son los propios alumnos los que van desarrollando la argumentación. Las dos preguntas seguidas que hace Matilde gatillan que Javier refute la garantía de Roberto, en ese sentido se aprecia la importancia que tienen las intervenciones de la profesora para gestionar el error por medio de la indagación en el curso, en vez de que ella tenga una posición de validar las respuestas de los alumnos.

Estrategias comunicativas

Una vez analizada el desarrollo de la competencia de argumentación en la clase de Matilde, nuestro objetivo es caracterizar la gestión de la argumentación de Matilde desde el punto de vista de las estrategias comunicativas. Para ello se ha aplicado un instrumento de análisis con ocho estrategias comunicativas con sus respectivos indicadores; en la tabla 1 se han seleccionado las tres estrategias más representativas con los indicadores representativos.

Tabla 1: Estrategias comunicativas presentes en la clase.

Estrategias comunicativas	Indicadores
Oportunidades de participación: asegurar que todos tengan la oportunidad de aportar	No validar las respuestas de los alumnos antes de la socialización de algunas respuestas y de las explicaciones de las técnicas, ni en la pizarra, ni puesto por puesto. Gestionar con flexibilidad el hecho que los alumnos puedan interrumpir al profesor.
Gestión del error: con asegurar a los estudiantes que sus ideas/respuestas equivocadas son importantes para construir el conocimiento matemático	Gestionar el error socializando de manera colectiva los conocimientos matemáticos que van mejorando la respuesta inicial No revisar en forma anticipada los errores, sino hasta después que los alumnos se han dado cuenta del error. .
Tipo de preguntas: formulación de preguntas adecuadas por parte del docente	Realizar actividades con preguntas que favorezcan la explicación por sobre un sí o no No hacer preguntas retoricas, es decir, hacer la pregunta y responder inmediatamente Plantear preguntas que no cambien de un foco a otro muy rápidamente; tratar que las preguntas promuevan que las ideas evolucionen

Las tres estrategias comunicativas descritas son especialmente relevantes para gestionar la argumentación, en particular vemos que el tipo de preguntas ha sido especialmente importante para la gestión especializada de la argumentación, en cambio, las otras dos sirven de apoyo para que se dé la argumentación. Sin participación es difícil que aparezca argumentación, y la gestión del error promueve la contraposición de ideas.

Conclusiones

El profesor tiene poca familiaridad con el desarrollo de la competencia de argumentación puesto que no es un foco de la actividad matemática que usualmente él desarrolle en su formación inicial y, hasta hace muy poco, no era un tema relevante en los procesos de formación continua, ya que la preocupación del profesor estaba más en el aprendizaje de contenidos en vez del desarrollo de competencias. En consecuencia, éste maneja pocas herramientas para la gestión de la argumentación en el aula de matemáticas. No obstante, dada la realidad actual, el profesor se ha hecho consiente de la importancia de desarrollar competencias como la argumentación en clase, lo que vemos reflejado en el interés que despertó en el profesorado el seminario de formación en torno a la argumentación. En el caso de la profesora Matilde existieron varios momentos en que los estudiantes requirieron refutar, y ello fue promovido por medio de las estrategias comunicativas de ella. La gestión que hemos visto no es algo común dentro de este cuerpo de profesores del seminario, pues otros profesores que se ha observado no han logrado que se den procesos argumentativos en su clase con estas características. Más aún podemos señalar que no es habitual encontrar prácticas de argumentación en las clases de matemáticas, pues ello no depende solo del docente, sino de que los estudiantes estén acostumbrados a debatir sobre sus ideas, y ello se logra por medio de las normas en la clase de matemáticas.

Las estrategias comunicativas contribuyen a promover el desarrollo de la argumentación, en especial hemos visto que tres de éstas: oportunidades de participación, gestión del error, y tipo de preguntas, han sido las más relevantes en la clase analizada de Matilde. Existen otras estrategias comunicativas que también son relevantes para la gestión de la argumentación, y que se pueden dar en otras clases. Por ello creemos que el profesor utilice estrategias comunicativas es una de las condiciones principales para que se promueva argumentación en el aula de matemáticas.

Referencias

Chapin, S. H., O'Connor, C. & Anderson, N.C. (2009). Classroom Discussions: Using Math Talk to Help Students Learn. Math Solutions.

Conner, A. M., Singletary, L., Smith, R. C., Wagner, P. A. & Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. Educational Studies in Mathematics, 86, 401-401.

Goizueta, M. & Planas, N. (2013). Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. Enseñanza de las Ciencias, 31 (1), 61-78.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures (pp. 229-269). Hillsdale, NJ:

Lawrence Erlbaum.

Lee, C. (2010). El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas. Madrid: Ediciones Morata.

Miles, M. B. & Huberman, A. M. (1994). Qualitative data analysis: an expanded sourcebook (2ª ed.). Thousand Oaks: Sage Publication.

Ponte, J., Boavida, A., Graça, M. y Abrantes, P. (1997). Funcionamiento de la clase de matemáticas. Didáctica da matemática, (pp. 71-95). Lisboa, Portugal: Ministerio de Educaçao. Recuperado de: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_sp.htm

Solar, H., Azcárate, C. & Deulofeu, J. (2012). Competencia de argumentación en la interpretación de gráficas funcionales. Enseñanza de las Ciencias. 30 (3), 133-154.

Toulmin, S. (1958). The uses of argument. Cambridge: Cambridge University Press

Las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje: concepciones de futuros profesores en formación

Esteban Candia L, Fabiola Sepulveda U, Rodrigo Panes Ch, Miguel Friz C.
Universidad del Bío-Bío, Chile
mfriz@ubiobio.cl, rpanes@ubiobio.cl, fjsepulveda@alumnos.ubiobio.cl

Resumen

Los propósitos del estudio fueron analizar las concepciones que estudiantes de primer año y quinto año de una escuela de formación de profesores de matemáticas manifiestan hacia lo que es la ciencia matemática, la utilidad de la matemática y los procesos de enseñanza y aprendizaje; para ello se adoptó un enfoque metodológico cuantitativo con diseño no experimental del tipo encuesta. El análisis de los datos se realizó a través del programa estadístico PSPP y las técnicas utilizadas fueron principalmente estadístico-descriptivos de tendencia central (media) y dispersión (desviación típica), cálculo de frecuencias, porcentajes y la prueba t para la comparación de medias entre grupos. Los resultados generales dan cuenta de una alta valoración hacia la matemática como ciencia que ayuda en el transcurso de nuestra vida a la solución de problemas cotidianos y su relación con las artes y la música. Así mismo los estudiantes valoran las actividades matemáticas que apelan a la motivación y la conexión con situaciones reales. Se encontraron diferencias significativas en los reactivos asociados al uso de reglas y operaciones en la matemática, en el valor formativo cultural e histórico de la matemática y en aquellas actividades matemáticas que desarrollan ejercicios y destrezas.

Introducción

La formación de profesores de matemáticas de enseñanza media es un área de interés en Educación Matemática, ya que la labor de los docentes tiene una gran repercusión en la enseñanza de las matemáticas del presente y del futuro. Esta importancia se acrecienta en períodos de reforma educativa, ya que difícilmente se podrá aplicar dicha reforma si los profesores, como principales agentes que tienen que ponerla en práctica, no la sienten como necesaria, no la asumen como propia y no aportan los esfuerzos necesarios para realizarla.

Es de significar que diferentes autores coinciden en señalar la importancia de analizar y explicitar las concepciones de los estudiantes para profesores como paso previo en su proceso de formación inicial. Carrillo (1998) destaca la importancia del estudio de las concepciones de los profesores porque ayudan a desarrollar y mejorar el desempeño profesional de estos.

"Las concepciones del profesor son uno de los operadores que actúan en el proceso de transformación del conocimiento a la situación didáctica y en el propio control alumno de la interacción alumno- situación. Por ello resulta natural pensar en las concepciones como eje transversal de la evolución profesional del profesor." (Carrillo, 1998, 47).

El Ministerio de Educación regula la Educación media a través del currículum, en el que se considera explícitamente que las matemáticas deben presentarse a los alumnos más como un proceso de búsqueda, de ensayos y errores, que persigue la fundamentación de sus métodos y la construcción del significado a través de la resolución de problemas, que como un cuerpo de conocimientos organizado y acabado. Con ello se nos sitúa ante una concepción constructivista de las matemáticas.

En esta investigación, se trabajó con estudiantes en proceso de formación para profesor de educación matemática de una universidad pública y regional del sur de Chile, que cursan primer año de formación y los que tienen el grado de licenciatura en educación (quinto año de su carrera) con el objetivo de analizar las concepciones que manifiestan acerca de la ciencia matemática, la utilidad de éstas y del proceso de enseñanza y aprendizaje ,en la lógica de visualizar su apreciaciones y de hipotetizar una posible diferencia atribuida a la formación.

Objetivos

La investigación tiene como propósito analizar las concepciones sobre la ciencia matemática, su utilidad y su enseñanza y aprendizaje que manifiestan estudiantes en formación para profesores de matemática de una universidad pública del sur de Chile. Específicamente la investigación se centró en:

- Identificar las concepciones hacia la ciencia matemática, su utilidad y su enseñanza y aprendizaje que manifiestan los estudiantes en formación para profesores.
- Determinar diferencias estadísticamente significativas en las concepciones hacia la ciencia matemática, su utilidad y su proceso de enseñanza y aprendizaje que manifiestan estudiantes de primer año y quinto año de una escuela de formación de profesores de matemática

Metodología

La investigación se adscribe a un enfoque metodológico cuantitativo, diseño no-experimental descriptivo del tipo encuesta, en coherencia con el problema en estudio (Gay y Airasian 2000). La recogida de la información se obtuvo a través de una escala de tipo Likert creada y validada por expertos, su análisis de fiabilidad entrego un Alpha de Cronbach de 0,71.

En cuanto al género la distribución fue de mujeres (64%) y hombres (36%). Las edades de los participantes fluctuaban entre 18 y 29 años. Tales participantes del estudio se adscriben según su formación como estudiantes de primer y de quinto año.

El análisis de datos se realizó utilizando el programa PSPP y las técnicas utilizadas fueron principalmente estadísticos descriptivos de tendencia central y dispersión, cálculo de frecuencias, porcentajes y prueba t para comparación de medias entre grupos.

Conclusiones

Los resultados generales dan cuenta de una alta valoración hacia la matemática como ciencia que ayuda en el transcurso de nuestra vida a la solución de problemas cotidianos y su relación con las artes y la música. Así mismo los estudiantes valoran las actividades matemáticas que apelan a la motivación y la conexión con situaciones reales.

El análisis estadístico por estudiantes de primer año y quinto año de la universidad en estudio da cuenta de diferencias significativas para la dimensión Ciencia matemática, en los reactivos:

- La matemática es una ciencia que nos ayuda en el transcurso de nuestra vida a la solución de problemas cotidianos [t (48)= -2,03; sign=0,048]
- Las matemáticas son construidas socialmente [t (48)= -3,07; sign=0,004]
- La matemática sólo se rige por reglas y operaciones [t (48)= 2,27; sign=0,028].
- Las matemáticas nos proveen de herramientas necesarias para en trabajo en otras ciencias" [t (48)= -3,11; sign=0,003]
- La matemática promueve un valor formativo, cultural e histórico [t (48)= -2,18; sign=0,034].

En la Dimensión Utilidad de la Matemática se encontraron diferencias significativas en los reactivos:

- Las matemáticas se relacionan con el arte y la música [t (48)= -2,49; sign=0,016].
- Las matemáticas se relacionan con la asignatura de lenguaje y comunicación [t (48)= -4,01; sign=0,000].
- Las destrezas o habilidades utilizadas en las clases de matemáticas para resolver problemas no tienen nada que ver con las utilizadas para resolver problemas en la vida cotidiana [t (48)= 3,53; sign=0,001].

En la dimensión Proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la matemática se encontraron diferencias significativas en los reactivos:

- Las matemáticas son importantes para todas las asignaturas de los alumnos [t (48)= -2,19; sign=0,033]
- En la enseñanza secundaria obligatoria, las actividades más adecuadas para enseñar matemáticas son las que destacan la utilidad y conexión con situaciones reales [t (48)= --5,41; sign=0,000].
- En la enseñanza secundaria obligatoria, las actividades más adecuadas para enseñar matemáticas son las que destacan la realización de ejercicios y prácticas para adquirir destrezas [t (48)= 3,00; sign=0,004]
- "Conozco diversos modelos y representaciones de los conceptos matemáticos." El análisis encuentra una diferencia significativa [t (48)= -2,02; sign=0,049]

Estos resultados preliminares nos permiten concluir que existen en los futuros profesores en etapa de formación distintas concepciones sobre la ciencia matemática, su utilidad y sus procesos de enseñanza y aprendizaje y que la formación adquirida podría influir en la forma en que estas cambian, se desarrollan y afianzan.

Referencias

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. En C. Keitel (Ed.) Mathematics Education and Society, (pp. 99-101). Document Series 35. UNESCO.

Gay, L. y Airasian, P. (2000). Educational Research: Competencies for analysis and application. New York: Merrill/Prentice Hall.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4(2), 129-159.

Godino, J. Batanero, C. Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para Maestros. Recuperable en Internet en: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Gómez-Chacón, I. (2003). La tarea intelectual en matemáticas, afecto, meta-afecto y sistemas de creencias. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10 (2), 225-248.

Experiencia del grupo de estudio de clases insuco en la elaboración de la lección "Regularidades Numéricas en el Triángulo de Pascal"

Sergio Morales Candia, Fabiola Zúñiga, Pablo Chamorro, Eduardo Vargas, Edith Estay, Diana Pino, Jorge Stumptner.
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso e Instituto Superior de Comercio Francisco Araya Bennett, Chile.
Sergio.morales.candia@gmail.com

Introducción

Este trabajo da cuenta de la primera experiencia en Estudio de Clases, de un grupo de profesores de matemáticas que imparte clases en un liceo municipal de Valparaíso, que frente a las problemáticas institucionales decide investigar sobre cómo desarrollar mejores lecciones, dando paso así a un proceso de desarrollo profesional continuo al interior del establecimiento. En particular, este informe reporta y analiza la experiencia vivida por el grupo en las distintas etapas de su primer Estudio de Clases: diseño del plan de la lección, implementación y observación, y mejora de la lección. Este Estudio de Clases tenía por objetivo diseñar una clase en que los alumnos disfrutaran de una actividad lectiva de matemática mientras identificaban y describían regularidades numéricas. El trabajo culmina con el análisis de las respuestas dadas por cada integrante del grupo respecto a preguntas sobre su experiencia, lo que permite evidenciar que los profesores reconocen un desarrollo de sus conocimientos disciplinarios, en su competencia para trabajar en equipo, en su capacidad crítica y auto crítica, así como también evidencian una valoración positiva respecto a las potencialidades de la implementación de Estudio de Clases. Esta experiencia forma parte de una serie de iniciativas de investigación en torno al Estudio de Clases, entre las cuales se destaca como producto, la publicación de un capítulo en libro NCTM, National Council of Teachers of Mathematic durante el 2014.

Esta experiencia se desarrolla en un liceo municipal de Valparaíso que posee más de 1000 estudiantes que cursan desde primero a cuarto año medio, y se inicia luego de identificar en la Institución, durante el 2012, las siguientes problemáticas:

- Distintas creencias
- Falta de trabajo en equipo
- Alumnos desmotivados
- Distancia entre universidad y escuela
- Clases centradas en el profesor
- Realidad compleja del Liceo
- Falta de tiempo para preparación de clases y reflexión

Dadas las problemáticas mencionadas, los profesores de matemáticas deciden conformar un Grupo de Estudio de Clases, con los siguientes objetivos:

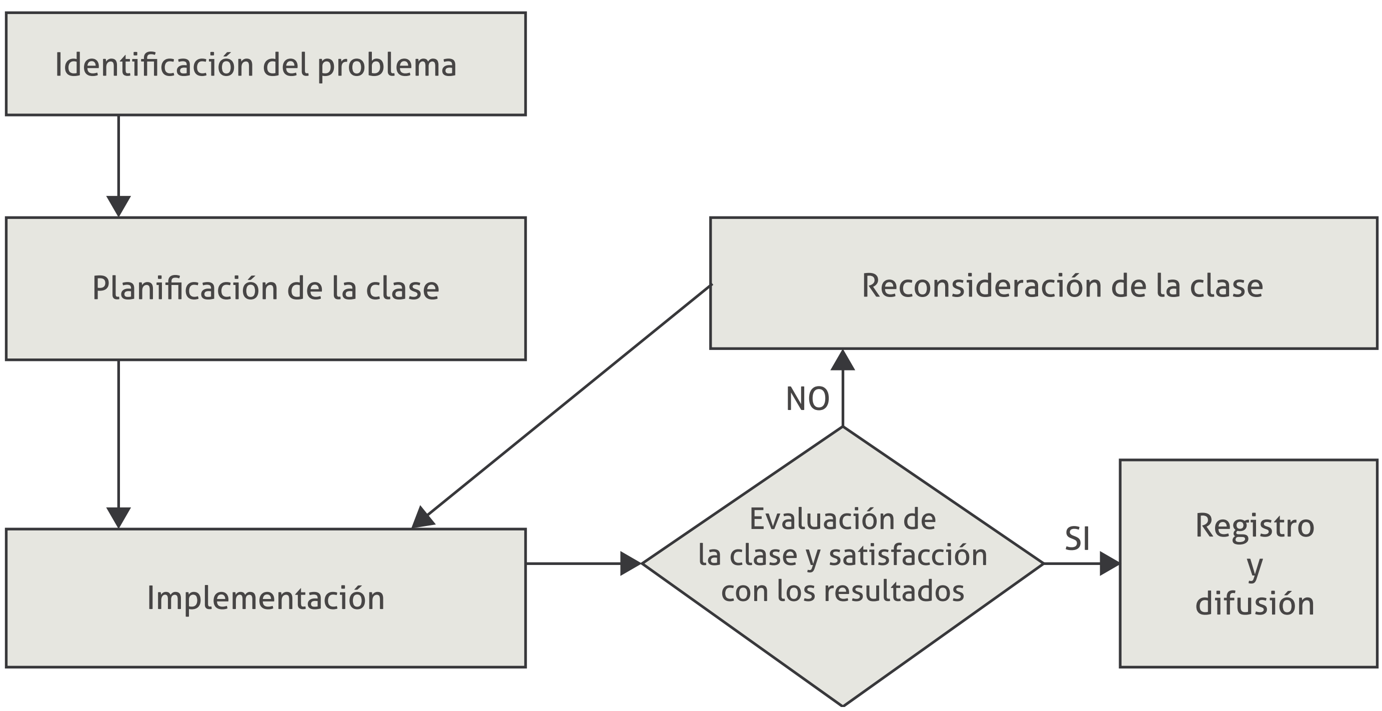
- Generar instancias de desarrollo profesional.
- Desarrollar conocimientos matemáticos, didácticos y pedagógicos.
- Socializar y aunar creencias entre

profesores.
- Potenciar capacidad de enseñanza.
- Desarrollar trabajo en equipo en base a la crítica y autocrítica

¿Qué es el Estudio de Clases?

Es una actividad científica que desarrollan profesores al interior de una escuela que buscan construir sus propias teorías para desarrollar y compartir buenas prácticas. Consiste básicamente en planificar clases, implementarlas y mejorarlas continuamente, siendo un proceso cíclico. Por otro lado, el Estudio de Clases tiene la potencialidad de articular la didáctica de las matemáticas, las teorías de enseñanza y la práctica misma. Variados estudios muestran que el Estudio de Clases puede beneficiar a profesores y futuros profesores en distintos aspectos de la práctica. Por ejemplo, Leavy (2010) reconoce que el Estudio de Clases apoya el desarrollo del conocimiento del contenido de los profesores en formación; en la misma línea Corcoran y Pepperell (2011) evidenciaron que el Estudio de Clases fomenta el desarrollo colectivo del conocimiento matemático; mientras que Olfos, Estrella y Morales (2013) se refieren al impacto del Estudio de Clases en las creencias de los profesores. Cohan y Honigsfeld (2007) reportan que el Estudio de Clases mejora la planificación, la presentación y las evaluaciones de la lección. Particularmente Murata et al. (2012) muestran cómo el uso de Estudio de Clases conlleva cambios en las prácticas de los profesores.

La siguiente imagen, extraída de Isoda, Arcavi y Mena (2007), describe básicamente el ciclo de Estudio de Clases seguido por el grupo de Estudio de Clases INSUCO.

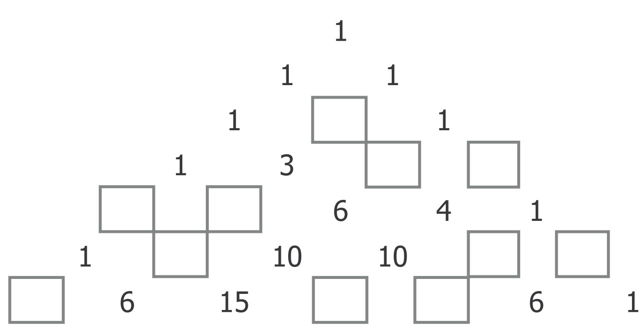


Diseño de la Clase de Regularidades Numéricas en el Triángulo de Pascal

El Estudio de Clases se inicia con la definición del objetivo de la lección "Identificar y describir regularidades numéricas" y con el objetivo transversal "que los alumnos disfruten de la clase". Esta decisión y la definición del objetivo implicaron cerca de 2 sesiones de trabajo.

Para motivar a los estudiantes se decidió diseñar una lección basada en la resolución de problemas, para así posicionar al alumno como el actor principal de la clase. Ésta decisión dio a los profesores la oportunidad de diseñar un problema que abordara el objetivo propuesto y que además atendiera a la diversidad de alumnos que componen un curso. El diseño de este problema llevó a los profesores a utilizar el triángulo de Pascal, centrando la clase en la pregunta "¿qué números faltan?", por lo cual durante dos sesiones los profesores discutieron sobre ¿qué números eliminar?, ¿cuántos eliminar? y ¿por qué eliminar esos números y esa cantidad? Las discusiones dieron como resultado el siguiente producto:

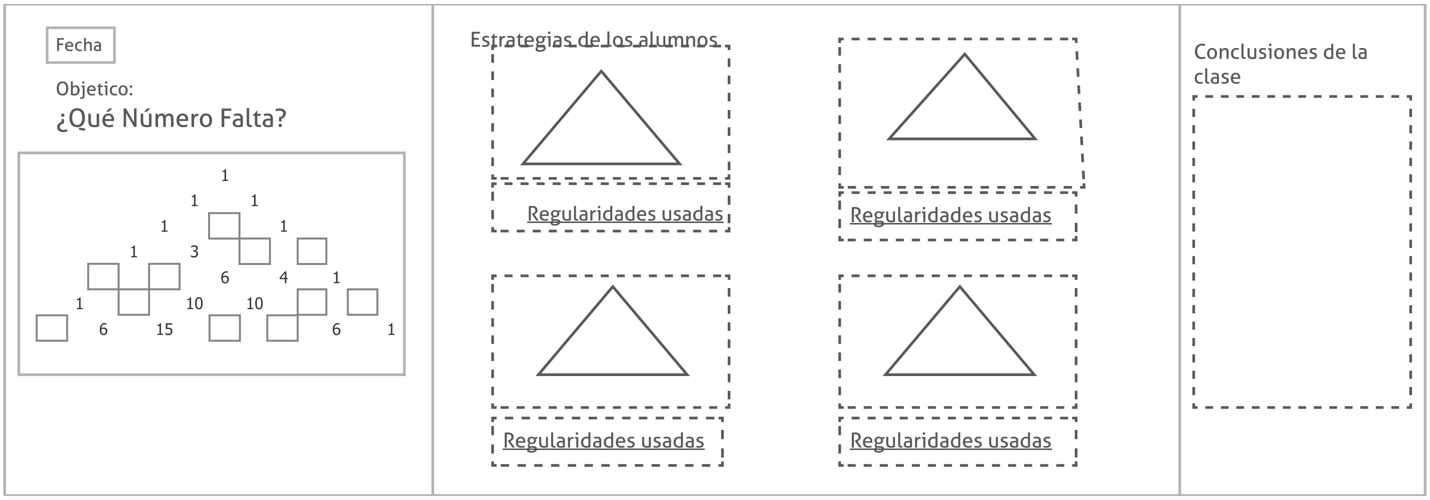
3.1 ¿Qué números faltan?



Es interesante el hecho de que el problema da la posibilidad de que todos los alumnos encuentren por lo menos un número, mientras que aquellos que se aventuren a completar el triángulo, por la elección de los números que faltan, están obligados a utilizar más de una regularidad para poder completar el triángulo. Lo anterior fue intencionado por los profesores, lo que da cuenta de la existencia de un análisis a priori de las posibles estrategias de los alumnos ante el problema, en el cual registraron columnas de uno, números naturales, simetría, sumas de filas que dan potencias de dos y el patrón de construcción del triángulo de Pascal.

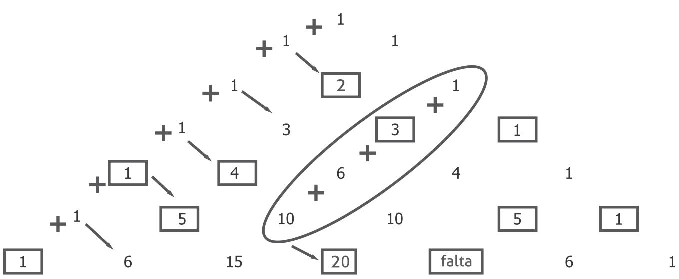
Para presentar el problema, el grupo decidió utilizar una cartulina enrollada, dado que se pensó que el ir desenrollándola mientras se va mostrando lentamente el triángulo podría generar un impacto positivo en la motivación de los alumnos. Este proceso significó un trabajo de 3 sesiones aproximadamente.

Una vez diseñado y analizado el problema de la clase, el grupo prosiguió con la elaboración del plan de ella, el cual estaba compuesto por cinco filas que describen las etapas de la clase, y por tres columnas que describen: actividades de aprendizaje, intervención docente, y evaluación de la marcha de la clase. El plan también incluye cuadros en los que se registraron posibles intervenciones de los alumnos, posibles estrategias y errores. La construcción del plan implicó un trabajo de 2 sesiones aproximadamente. La etapa de planificación culminó con la planificación de la pizarra:



La planificación de la pizarra ayudó a los profesores a imaginar cómo se desarrollaría la clase y cómo plasmarían el plan de clases en la pizarra. En esta etapa se respondieron preguntas como ¿En qué lugar de la pizarra es conveniente pegar el problema? ¿Es conveniente plasmar en la pizarra algunas estrategias de los alumnos? De ser así, ¿quién las escribe? ¿Es necesario definir un orden en las estrategias de resolución? ¿Cuál sería ese orden? ¿Por qué?, ¿Cómo utilizar las estrategias de los alumnos para concluir? ¿Cómo se debe registrar la conclusión? ¿Qué se debe registrar?

La lección fue implementada tres veces, por distintos profesores y en distintos cursos. Es importante mencionar que en cada implementación los objetivos de la clase se cumplieron, y que en cada clase los alumnos generaron estrategias que los profesores no imaginaron, como por ejemplo:



La experiencia culminó con la implementación de la clase de Regularidades Numéricas en el Triángulo de Pascal en dos clases públicas de matemáticas, las cuales fueron observadas y analizadas por más de 100 profesores de Valparaíso.

Finalmente se les preguntó a los integrantes del Grupo de Estudio de Clases INSUCO:

1) ¿Cuáles son las fortalezas de esta actividad?
    a) 3 de 6 se refirieron a posicionar a los alumnos como protagonistas que crean su propio aprendizaje.
    b) 6 de 6 afirmaron que la actividad promueve la colaboración, el intercambio de experiencias, la solidaridad y desarrolla la capacidad crítica y auto crítica.
    c) 5 de 6 profesores mencionaron que la actividad les ayudó a profundizar sus conocimientos.
2) ¿Cuáles son las debilidades de la actividad?

a) 2 de 6 afirmaron que una debilidad era el tiempo insuficiente.

b) 2 de 6 aseguraban que una debilidad tenía que ver con la disposición de colegas al trabajo y compromiso del establecimiento y del sistema para generar un impacto mayor.

3) ¿Cómo evaluaría los siguientes criterios, considerando una escala de 1 a 10?

CRITERIOS A EVALUAR	PUNTAJE PROMEDIO
Potencialidad para el desarrollo profesional docente	8.7
Impacto positivo que el estudio de clases ha generado en su práctica	8.7
Impacto positivo que podría generar, en un plazo de 5 años, la implementación de Estudio de Clases en una institución educativa	9
Impacto positivo que podría generar la implementación de Estudio de Clases en el país	9.2
Debiera ser un elemento protagónico en la formación inicial docente	9.3
Desarrolla los conocimientos disciplinarios de los profesores	8.5
Desarrolla habilidades para diseñar e implementar clases efectivas	9

Referencias

Cohan, A. (2007). Incorporating "Lesson Study" in Teacher Preparation. The Educational Forum, 81-92.

Corcoran, D. &. (2011). Learning to Teach Mathematics Using Lesson Study. New York: Springer.

Estrella, S., Olfos, R. Morales, S. (2014). What Can We Learn from Natural Disasters to Prevent Loss of Life in the Future? En Lessons Learned from Across the World-PreK-8. NCTM, National Council of Teachers of Mathematics.

Isoda, Arcavi y Mena (2007). El Estudio de Clases en Matemáticas. Valparaíso: Ediciones Universitarias.

Leavy, A. (2010). The challenge of preparing preservice teachers to teach informal inferential reasoning. Statistics education research journal, 46-67.

Murata, A. B. (2012). Making Connections Among Student Learning, Content, and Teaching: Teacher Talk Paths in Elementary Mathematics Lesson Study. Journal for Research in Mathematics Education.

Olfos, R., Estrella, S., & Morales, S. (2013). The open class impact on thebeliefs of teachers about teaching. En ICER13: The 6th International Conference on Educatinal Research Challenging Education for Future Change. Faculty of Education. Khon: University Thailand.

El Teorema de Tales en la formación inicial de profesores de educación media: El tránsito entre los enfoques sintético y vectorial

Daniel Farías Rojas, Carolina Henríquez Rivas
Universidad Alberto Hurtado, Chile
dfariasr85@gmail.com, carohenriquezrivas@gmail.com

Resumen

El propósito de este reporte es mostrar los avances obtenidos en una investigación que trata sobre el aprendizaje del Teorema de Tales en la formación inicial de profesores de Matemática, en relación a la articulación entre los enfoques geométricos sintético y vectorial. El trabajo se sustenta en la teoría Espacio de Trabajo Matemático (ETM), específicamente se analiza el ETM de referencia del futuro profesor. Esta investigación pretende aportar en la formación inicial de profesores y entregar herramientas teóricas para el profesor de secundaria.

Antecedentes

La investigación tiene como propósito la problemática general que alude a la enseñanza del Teorema de Tales, como es su paso de un enfoque sintético a uno vectorial, en la formación inicial de profesores de matemática, ya que según los Estándares Orientadores para Carreras de Pedagogía en Educación Media para Matemática (MINEDUC 2012), en el estándar 15 de Geometría dice:

"Conoce la articulación de los contenidos con vectores con otros presentes en el Currículo escolar" (p. 121)

Por lo tanto, un profesor debería saber articular, por ejemplo el Teorema de Tales con el concepto de vector y eso no queda claro al revisar, en general, los programas de estudio de las carreras de Pedagogía en Matemática que tienen en sus programas cursos de Geometría en los cuales se incluye el Teorema de Tales tanto en su demostración como en su aplicación, pero sólo se muestra que se enseña en su forma euclidiana, sin coordenadas y nada se dice sobre su vinculación a un enfoque vectorial.

Al parecer esta dicotomía en la enseñanza del Teorema de Tales en los futuros profesores está afectando la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes a nivel escolar de dicho Teorema, el cual es parte de los contenidos del Currículo Escolar de Segundo Año Medio (MINEDUC 2011).

Según las publicaciones ("psu en El Mercurio", 2007–2014) de preguntas de la Prueba de Selección Universitaria (PSU) que hace el Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional (DEMRE), más del 60% de los estudiantes no responde bien u omite las preguntas referidas al tema.

Lo anterior puede deberse a la forma en que se les enseña geometría a los futuros profesores de las escuelas de pedagogía, las que tienen un enfoque formal, estructurado y con parcelación del conocimiento (Aravena & Caamaño, 2013) lo que ha provocado que ellos reproduzcan este tipo de enseñanza en las escuelas, teniendo como consecuencia que los estudiantes no logren comprender los conceptos y los procesos geométricos que se les quieren enseñar (Latorre, 2004)

Entonces, según el informe Mckinsey (2007), sobre cómo lograron los países que tienen un buen desempeño educativo detentar un alto rendimiento, indica que el conocimiento matemático de un profesor impacta sobremanera en el rendimiento de los estudiantes, pues si posee un alto rendimiento impactará positivamente en el rendimiento de los estudiantes, caso contrario si no posee tal alto rendimiento impactará negativamente en los estudiantes.

Según el trabajo de Cheuquepán y Barbé (2012), los profesores de educación media le dedican más tiempo a temas como Álgebra y Funciones que a Geometría, siendo que en algunos cursos por Currículo escolar se debería dedicar mucho más tiempo a Geometría; o simplemente desplazan tanto los contenidos de Geometría hacia las últimas unidades didácticas de su planificación escolar, llegándose a prescindir de ellos en muchos cursos de nivel medio (Pérez & Guillén, 2009).

El trabajo doctoral de MRabet (2013) realizado en Túnez sobre la articulación entre los enfoques sintético y vectorial en el Teorema de Tales en estudiantes de secundaria, indica que una vez que se ha enseñado el Teorema de Tales con un enfoque sintético y más tarde con un enfoque vectorial, los estudiantes no son capaces de relacionar ambos, pues para ellos son dominios separados ya que no existe una transición entre ellos.

Esto puede deberse a que, por lo según este autor, no se encuentran transposiciones didácticas sobre el tema o que existen muy pocas por lo que los profesores tienen dificultades al relacionar ambos tasuntos y, por lo tanto, una de las formas de atacar la problemática es en la formación inicial de profesores, ya que como lo dice Latorre, los buenos profesores marcan una clara diferencia en los aprendizajes que logren sus alumnos, en sus rendimientos y, en definitiva, en su éxito escolar.

En lo que sigue se presenta el marco teórico que sustenta la investigación, llamado *Espacio de Trabajo Matemático.*

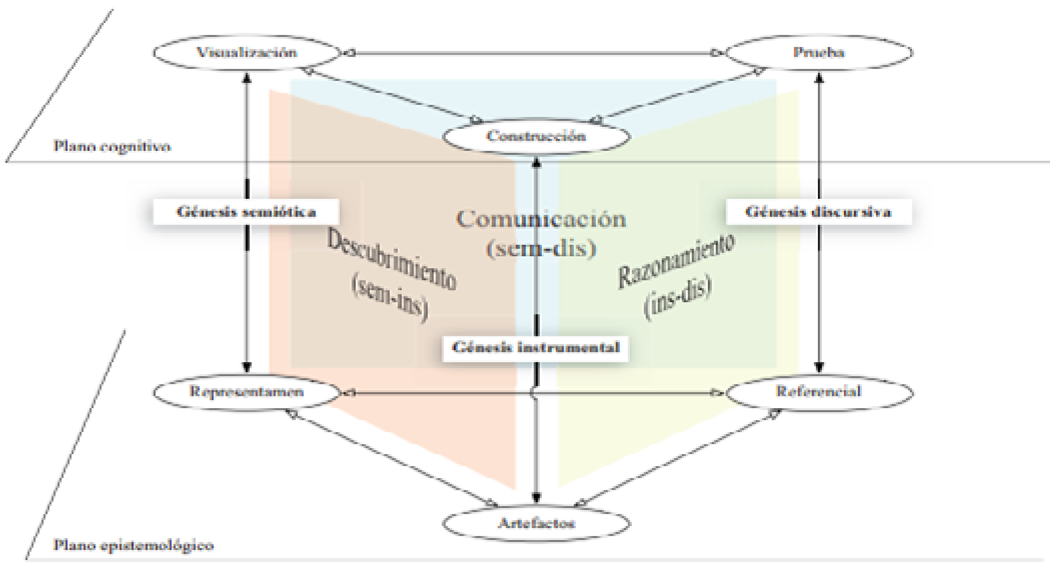
Marco Teórico

La investigación se hará bajo el Marco Teórico del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) que es una ampliación del Espacio de Trabajo Geométrico (ETG) ya que no solamente sirve para la geometría, sino que para la matemática en general. Es un espacio de trabajo organizado para favorecer el trabajo matemático, en un contexto educativo. Que en este caso se aplicará a un concepto de Geometría como lo es el Teorema de Tales. Según Kuzniak (2011) se basa en dos planos: Plano Cognitivo y Plano Epistemológico

Génesis del ETM: Para describir la relación de estos planos se han considerado tres tipos de génesis (Kuzniak, 2011) que permiten realizar relaciones. Estas génesis no son independientes y se relacionan con las componentes del espacio de trabajo

- Génesis Discursiva: Dará un sentido a las propiedades y definiciones matemáticas para ponerlas al servicio del razonamiento matemático
- Génesis Semiótica: Se basa en los registros de representación semióticos que aseguran los objetos tangibles del ETM, tengan nivel de objeto matemático operatorio
- Génesis Instrumental: Permite hacer operatorios los artefactos en el proceso constructivo

Lo anteriormente dicho se analizará con el siguiente esquema, según Kuzniak y Richard (2014), Coutat y Richard (2011):



Se analizará en qué ETM trabajan los futuros profesores de matemática, para ello se necesita saber el concepto de paradigma, el cual está inspirado en la noción de Khun (1962):

Paradigma Geométrico: es un conjunto de creencias, técnicas y valores que comparte una comunidad científica y se considerará tal como Kuzniak (2006), tres paradigmas geométricos:

Geometría Natural (GI): Refleja la existencia de una relación con la realidad: objetos materiales, trazos sobre un papel o cualquier otro objeto que pueda ser manipulado que venga hecho o que pueda ser construido, por lo general son dibujos (líneas, círculos). Por ejemplo, un rectángulo puede ser un televisor que tiene cuatro ángulos rectos. En este paradigma geométrico el modelo geométrico está vinculado al mundo real, se trabaja de forma local.

Geometría Axiomática Natural (GII): A diferencia del anterior, aquí ya se habla de figuras geométricas. El razonamiento de validación se fundamenta en un sistema axiomático. La forma de producir conocimiento es a través de teoremas. Aquí los problemas deben ser explícitos ya que se fundamentan en definiciones y teoremas textuales. Esta geometría se basa en un modelo próximo a la realidad, pero cuando se tiene que validar se recurre a la axiomática, por ejemplo, cuando tenemos un problema con dibujo, se acepta que la información provenga de él, pero a la hora de validarlo se necesita de una deducción lógica a través de axiomas

Geometría Axiomática Formalista (GIII): El razonamiento en este paradigma es exclusivamente a través del sistema formal axiomático de la geometría que se utilice; el uso de instrumentos no está permitido, se habla solamente de instrumentos teóricos, así esta geometría no está relacionada con la realidad. Lo que la diferencia del GII es que aquí la axiomática base ya no se relaciona con la realidad, pues tiende a ser completa, no como GII que es local.

También se necesita saber cual es la noción de ETG y sus componentes:

Espacio de Trabajo Geométrico (ETG): Se llama espacio de trabajo geométrico al ambiente que se organiza por personas, ya sean expertos (matemáticos), profesores o estudiantes a la hora de resolver problemas geométricos. Aunque los problemas no son parte del ETG, si son su razón de ser ya que el ETG es el medio en el que trabajarán los problemas geométricos. Existen tres tipos de ETG:

ETG de Referencia: Es el Espacio de Trabajo definido solamente por criterios matemáticos. Se dice que es utilizado por los expertos y se puede considerar como el ETG Institucional de la comunidad matemática.

ETG Idóneo: En este espacio de trabajo se supone una reflexión sobre la organización didáctica de las componentes del ETG de referencia. Alguien que usa naturalmente este espacio es el profesor.

ETG Personal: Es el espacio utilizado por un estudiante, aunque también puede ser usado por un profesor. Cada uno se apropia de él y lo llena con sus conocimientos matemáticos y sus capacidades cognitivas.

De acuerdo a lo anteriormente expuesto, la necesidad de investigar en esta línea y el marco teórico que sustenta el estudio, es responder a las siguientes preguntas:

¿Cómo se desarrolla el trabajo matemático, con respecto al Teorema de Tales en las escuelas de pedagogía?

¿Cómo se considera el enfoque vectorial en torno al Teorema de Tales en la formación inicial de profesores?

Cabe señalar, que este trabajo se enmarca en una investigación más extensa sobre el tránsito entre los enfoques sintético y vectorial en el Teorema de Tales, donde los objetivos son:

- Estudiar el ETM de Referencia del estudiante, en donde se analizarán los Estándares Orientadores para carreras en Educación Media, el programa de la asignatura de Geometría y las concepciones sobre el Teorema de Tales del profesor formador

- Estudiar el **ETM Personal del estudiante,** en relación a una propuesta de trabajo en que puedan relacionar un enfoque sintético con uno vectorial en el Teorema de Tales

Esta comunicación aborda específicamente el primer objetivo.

Las preguntas se van a intentar responder con el siguiente objetivo:

Formular una propuesta para favorecer el trabajo sobre Teorema de Tales desde el enfoque sintético a un enfoque vectorial en la formación inicial de profesores.

Para ello, se estudiará el ETM de Referencia del futuro profesor, analizando los Estándares Orientadores para Carreras de Pedagogía en Educación Media, también se estudiará los programas de la asignatura de Geometría, así como el profesor formador de los futuros profesores.

En lo que sigue se presenta la metodología que sustenta la investigación:

Metodología

La metodología de la investigación se basará en el Estudio de Casos usando un enfoque cualitativo, y un diseño instrumental, según Sandín (2003).

El propósito es estudiar el ETM de Referencia del futuro profesor de matemática, en torno al Teorema de Tales, en el cual se analizarán los siguientes dispositivos:

- Estándares y Programas: Se diseñará una grilla para estudiar el ETM de ambos dispositivos.

- Profesor formador: Se realizará una entrevista, para saber de qué forma enseña el Teorema de Tales a sus estudiantes y cuáles son sus concepciones sobre él.

En lo que sigue, se presentan los resultados obtenidos en la investigación:

Análisis de Resultados

Una vez analizados, los resultados obtenidos una vez que se estudió el ETM de Referencia del estudiante, permiten obtener la siguiente información:

Los futuros profesores piensan que no hay relación entre ambos enfoques (sintético y vectorial) en el Teorema de Tales ya que la visualización de ambos enfoques es distinta, por lo tanto, si se cambia de registro en el enfoque sintético no es posible, para ellos, articularlo con el enfoque vectorial. En ambos enfoques el artefacto usado es teórico, por lo que están trabajando en el paradigma GII.

Se pretende, con la información analizada, contribuir hacia mejoras en la enseñanza del Teorema de Tales en la formación inicial de profesores, para que así el futuro profesor tenga una mayor comprensión del Teorema, al poder aplicarlo en distintos enfoques con una articulación entre ellos.

Referencias

Aravena, A. y Caamaño, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule. Talca, Chile. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16 (2), 139-178.

Cheuquepán, D.; Barbé, J. (2012). Propuesta Didáctica para las traslaciones en el plano Cartesiano con el uso de planilla de cálculo. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 29, 131-154.

Houdement C., Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. Annales de didactique et de sciences cognitives, 11, 175-193. IREM de Strasbourg.

Latorre M. (2004). Aportes para el análisis de las racionalidades presentes en las prácticas pedagógi-

cas. Estudios pedagógicos, 30, 75-91.

MINEDUC (2011). Currículum escolar Segundo Año medio, del sitio web de Mineduc:http://www.curriculumnacional.cl

MINEDUC (2012). Estándares Orientadores para Carreras de Pedagogía en Educación Media para Matemática, del sitio web:http://www.mineduc.cl/usuarios/cpeip/doc/201206011651510.LibroEstAndaresEducaciOnMedia.pdf

McKinsey & Company. (2007). How the World's Best Performing School Systems Have Come Out on Top. Recuperado de http://mckinseyonsociety.com/how-the-worlds-best-performing-schools-come-out-on-top/

Mrabet, S. (2013). Difficultés des élèves autour du théorème de Thalès. Nantes:17èmeécole d'été de Didactique des Mathématiques.

PSU (2007-2014). Resolución Prueba de Matemática-DEMRE. Recuperado de: http://www.demre.cl/publicaciones.htm.

Sandín M. (2003). Investigación Cualitativa en Educación. Fundamentos y Tradiciones. España: Universidad de Barcelona

Fortaleciendo la identidad del futuro profesor de matemática mediante el curso de introducción de la pedagogía en matemática y computación

Patricio Montero Lagos, Rogelio Riquelme Sanfeliu
Universidad de Santiago de Chile, Chile
patricio.montero@usach.cl, rogelio.riquelme@usach.cl

Resumen

La identidad profesional del profesor de matemática se conecta con ser parte de una clase profesional cuyos miembros reconocen la especificidad de su hacer y de su ser, de acuerdo a características que une a una profesión (De Sousa, 2014). Su examen se basa en las cuatro categorías de análisis presentadas por Corvalán y Montero (2013) vinculadas con quienes practican la profesión, las utilizaciones de sus conocimientos y sus dimensiones éticas, los ámbitos o dominios de la profesión y la existencia de grupos de interés que observan y demandan la profesión.

La Pedagogía y Licenciatura en Educación Matemática y Computación de la USACH, desde 1975, ha estado formando profesores de matemática con un proceso formativo dirigido a fortalecer una identidad como educador matemático. En la última actualización curricular de la Carrera se incluyó a partir del año 2012, en el primer semestre del plan de estudios, el curso "Introducción a la Pedagogía y Licenciatura en Educación Matemática y Computación". A través de una metodología activa, con actividades centradas en el alumno, este curso, pretendió contribuir, al autoconocimiento de los estudiantes, de sus intereses, motivaciones, capacidades, habilidades, destrezas y disposiciones sobre aspectos centrales de la Carrera. Asimismo, pretendió que los estudiantes pudiesen analizar alternativas de desarrollo personal, profesional, laboral, continuación de estudios y de integración social con una identidad profesional distintiva de educador matemático.

Antecedentes previos (Montero y Riquelme, 2013) revelaron que el curso ha tenido efectos en las motivaciones y expectativas de los estudiantes para estudiar la carrera. En este estudio, las tendencias de las opiniones en las tres cohortes de estudiantes (2012, 2013 y 2014) y sus observaciones cualitativas, sustentan, confirman y recomiendan importantes contribuciones para su futura identidad profesional como un educador matemático, que cuenta con competencias profesionales distintivas para desempeñarse eficientemente en sus ámbitos profesionales.

Antecedentes y propósito del estudio

La coexistencia de una variedad de procesos formativos llevan a una identidad profesional particular del profesor de matemática para abordar con eficacia dinámicas situaciones complejas propias de su rol social De acuerdo con Dubar (1997) la formación es fundamental en el proceso de construcción de identidades profesionales , ya que facilita la incorporación de conocimiento importante en la estructuración de la carrera profesional y su relación con el mundo del trabajo , el intercambio de conocimientos y formas de relacionarse y reconocerse como los miembros del mismo grupo . Para construirse profesionalmente, el individuo asumirá como sus formas de ser una profesión dentro de un proceso de formación a veces y en lugares de interacción que ofrecen modos de estar en la profesión, que llevan a afirmar y fortalecer la identidad profesional Dubar (2005, 2006).

La formación es la fuerza que renueva el sentido del ser a un profesional. (De Sousa, 2014). La identidad profesional del profesor está relacionado con cursos iniciales de formación, los espacios y condiciones de trabajo, la socialización y su participación en comunidades de práctica (Wenger, 2001). Se considera esencial la existencia de una práctica profesional con resignificaciones culturales de los conocimientos que van más allá de la dominación de normas y técnicas y que contribuyen a su identidad profesional, a su desarrollo profesional y al trabajo colectivo.

La formación debe estar relacionada con los cambios existentes en las profesiones que afectan su identidad, los cuales, de acuerdo con Gadner (2001) son el resultado de la interacción entre cuatro factores: 1) nuevas herramientas, procedimientos y conocimientos; 2) creencias y valores culturales; 3) cambios en los ambientes sociales; y 4) contribuciones de creadores y líderes.

El primer factor está asociado a la aparición de nuevas herramientas, procedimientos y conocimientos, debido a los aportes de la ciencia y la tecnología, que generan cambios en el ejercicio profesional y modifican la percepción social de cómo se entiende el objeto de estudio de la profesión; o bien, respecto de la forma de abordar la solución de los problemas de los que se ocupan los profesionales respectivos.

El segundo factor está constituido por las creencias y valores culturales, sobre lo que una persona considera propio o impropio de llevar a cabo; es decir, se trata de los referentes, actitudes, disposiciones y valores fundados en lo que se considera moral y profesionalmente correcto. El ejercicio profesional se encuentra ligado a las creencias y valores que un grupo o una sociedad comparten y esperan que se respete en la aplicación de los conocimientos y técnicas que los profesionales emplean para cumplir su rol social.

El tercer factor está asociado a los cambios en las profesiones según los ambientes sociales. Es decir, en función de las demandas y necesidades sociales, que impactan en el valor y relevancia que las sociedades asignan a determinadas profesiones en el tiempo y el espacio. Las sociedades cambian en el tiempo el nivel de reconocimiento social que le asignan a determinadas profesiones, en función de cómo perciben que éstas responden a sus necesidades e intereses.

Finalmente, sobre las contribuciones de líderes y creadores, es posible reconocer la influencia que éstos tienen en las innovaciones desarrolladas por miembros de la profesión (CEDETEC, 2007).

Este trabajo estudia los efectos del curso Introducción a la Pedagogía y Licenciatura en

Educación Matemática y Computación en la identidad profesional del futuro profesor de matemática de acuerdo a su aplicación en las cohortes de estudiantes de los años 2012, 2013 y 2014.

Metodología

El curso y su implementación

Consistente con el objetivo general del curso, sus experiencias formativas están dirigidas a que cada estudiante escriba un ensayo personal que presenta sus principales motivaciones y expectativas a sus estudios y sus posibilidades de desarrollo profesional y personal. El ensayo, con la satisfacción de aspectos formales y de fundamentaciones, comprende una introducción, un desarrollo que describe, relaciona y proyecta sus motivaciones, expectativas, fortalezas, debilidades y proyecciones y, un comentario final con conclusiones, recomendaciones y proyecciones de su carrera.

Para el logro de ese propósito en el curso, mediante variedad de tipos de actividades centradas en el estudiante y recursos educativos presenciales y virtuales, se estructuraron y organizaron las experiencias de los estudiantes para que al término del semestre cada alumno esté en condiciones de: a) Describir el rol social del Profesor de Matemática y Computación; b) Explicar los rasgos distintivos del Profesor de Matemática y Computación de la USACH; c) Explicitar y fundamentar sus motivaciones y expectativas principales y posibilidades de desarrollo profesional con la Carrera de Profesor de Matemática y Computación de la USACH. Una primera exploración sobre el curso y sus efectos fue realizada por (Jorquera, 2012).

Los productos intermedios fueron cuidadosamente seleccionados de acuerdo a una hipótesis evolutiva del estudiante de modo de enriquecer competencias sustentadoras claves como son las comunicativas e interpersonales y, eliminar temores o preconcepciones equivocadas acerca de la carrera y su desarrollo profesional. Las actividades son individuales, grupales y colectivas dirigidas a concretar desafíos mediante reglas de operación que junto con contribuir a un clima positivo, permita a los estudiantes vivenciar o en forma vicaria modelos de construcción de soluciones en forma analítica y colaborativa. A pesar de que las tres versiones del curso tuvieron contextos muy diversos y la participación de dos profesores, la estructura general y la mayoría de las actividades fueron replicables.

Obtención y análisis de evidencias.

En forma sistemática se fue obteniendo información de los estudiantes. Generalmente todas las clases estuvieron orientadas al logro de productos intermedios alineados con el producto final esperado. Inicialmente se tuvo un diagnóstico y sistemáticamente los estudiantes, combinando las actividades individuales, con las grupales y colectivas, generaron productos escritos y presentaciones personales y grupales. Las pruebas escritas solo sirvieron para distinguir niveles de logro de los trabajos grupales los que generalmente coincidieron con las otras evaluaciones individuales. Todos los estudiantes entregaron el ensayo satisfaciendo un estándar mínimo de desempeño y también contestaron una encuesta de opinión.

Con el propósito de explorar posibles diferencias entre las cohortes se aplicó en los tres años una escala de opiniones provistas de una escala ordinal de cinco opciones (Totalmente de acuerdo, de acuerdo, indiferente, en desacuerdo y totalmente en desacuerdo). Los estudiantes que ingresaron, especialmente los del año 2014 presentaron diferencias de ingresos especialmente debido al efecto del ranking.

Resultados

Los resultados obtenidos de la triangulación de la información de las dos ejecuciones del programa revelaron que, aunque existen algunas diferencias en los procesos en las tres mediciones con sujetos diferentes. se obtuvieron características y efectos similares en las tres cohortes en los resultados esperados en el diseño del curso en los estudiantes.

AFIRMACIÓN	ESCALA					AÑOS
	TA	A	I	D	TD	
Con el curso obtuve una nueva visión de la profesión de Profesor de Estado en Matemática y Computación.	66	31	3	0	0	2012
	53	28	13	6	0	2013
	69	31				2014
El curso me orientó respecto a la Carrera que he escogido.	55	35	10	0	0	2012
	34	56	9	0	0	2013
	25	50	25	0	0	2014
El curso cambió mi percepción acerca del trabajo que realiza el profesor de Matemática.	35	48	10	7	0	2012
	34	41	25	0	0	2013
	25	63	12	0	0	2014
El curso me ayudó a conocer mejor mis expectativas de desarrollo profesional.	69	28	3	0	0	2012
	44	47	9	0	0	2013
	19	63	12	0	0	2014
Distingo aspectos de esta carrera que no la poseen otras.	41	42	17	0	0	2012
	28	38	19	9	3	2013
	44	50	6	0	0	2014
El curso me contribuyó a mirar de otra manera los estudios de la Carrera.	21	62	14	3	0	2012
	28	56	16	0	0	2013
	19	69	6	6	0	2014
Gracias al curso me siento más identificado con la carrera.	41	38	17	4	0	2012
	44	41	9	6	0	2013
	19	44	31	6		2014
El curso aumentó mis motivaciones por la Carrera.	41	41	14	4	0	2012
	75	25	0	0	0	2013
	38	62	0	0	0	2014
Recomendaría este curso a estudiantes de la Carrera que no lo han tenido.	35	48	14	3	0	2012
	28	63	6	3	0	2013
	69	25	0	0	6	2014

Evidencias Cualitativas

Se obtuvieron evidencias cualitativas mediante grupos focales y fundamentaciones escritas entregadas por los estudiantes que permiten ilustrar sus efectos principales. Una selección de ellas de las tres cohortes se presenta a continuación:

... "como que nos ubican en donde estamos, a ver si nosotros queremos lo que la carrera pretende lograr con nosotros, entonces encuentro que fue bastante bueno el programa". (Estudiante cohorte 2012).

- ..."es que el ramo en si lo que más era es eso, te cuestionaba, ¿quieres ser realmente profesor?, ¿Qué esperas tu como profesor?, no es como que te planteaba algo, sino que te hacia preguntas". (Estudiante cohorte 2013).

- "Me siento seguro sobre mi decisión que estudiaré lo que realmente quiero.

Gracias a muchas de las explicaciones que se dieron durante de las clases, me ido aferrando un poco más a lo que es la carrera, universidad y profesores, ya que al entrar creí que solo nos hablarían la "parte bonita" de la carrera, y por el contrario, nos recalcaban siempre que somos los más expuestos a críticas, estoy bastante seguro que esta carrera es la que buscaba".(Estudiante cohorte 2014)

- ... "uno viene de una situación de colegio, por ejemplo, uno tiene una cierta perspectiva de lo que es un profesor, pero uno llega acá y con las ciertas cuestiones o preguntas que hacíamos clase a clase podíamos compartir las ideas de lo que era un buen profesional, la idea que tenia uno o la idea que tenían los demás, las ideas que tenia el profesor, e ir armándose así una idea de lo que es un buen profesor y así mirar a futuro también y querer llegar a ser eso". (Estudiante cohorte 2012)

- ..." en ese sentido como que tuvo un cambio porque uno pensaba, como decía el alumno..., que uno iba a ir a enseñar matemática y se acabó la clase y con esto se da cuenta uno que no es tan así, que uno es como un profesor, pero también tiene que estar interesado en sus alumnos, tiene que ser ... no un amigo tampoco, pero si tiene ser como alguien que se preocupe por los alumnos, no una persona que venga, se pare y haga clases porque si no para eso se queda el alumno en la casa y aprende solo (Estudiante cohorte 2013)."

..." Con este curso visualicé los desafíos que debo enfrentar en mi futuro profesional. La adaptación a los tiempos, los alumnos y el sistema. Son la clave para el éxito profesional. Más aún en un contexto de una transición importante en la educación. Por ejemplo, desde la primera clase estableciendo la actitud y convicción de anticiparse a lo que nuestros alumnos nos pedirán, llamándonos "leopardos". Además, en la crítica de lo que pasa hoy en la educación, se nos deja a nosotros como la cara visible de la educación, llamándolo el profesor como la profesión más privada pero pública de todas"

Conclusiones

La conclusión general de este trabajo es que el curso de Introducción a la Pedagogía en Matemática y Computación es un buen recurso para contribuir a optar con información al desarrollo de una identidad profesional, concordante con el rol social del profesor de matemática o para tempranamente dejar esta opción. En términos más específicos, la replicabilidad de aspectos centrales del curso en tres cohortes de estudiantes contribuye a modificar varias de las preconcepciones que traen los estudiantes y ampliar sus posibilidades de desarrollo profesional. Aún cuando en las versiones del curso ha habido variaciones en las actividades con la participación de los docentes, sus efectos principales han sido replicados. Ello debido a que las actividades del curso se vinculan con: a) un perfil de egreso con dominios y competencias profesionales claramente establecidas que fortalecen su rol social y futura proyección, b) un escalamiento de las competencias del perfil de egreso y la integración de los diferentes tipos de conocimientos para la actuación competente del profesor de matemática, permitiéndole a los alumnos resignificar e integrar desempeños formativos con crecientes niveles de dificultad incorporados en la malla del plan de estudios de la carrera y c) que su formación académica esté dirigida a la obtención de una Licenciatura en Educación Matemática como disciplina y no a una Licenciatura en Educación o a una Licenciatura en Matemática como se encuentra frecuentemente en otras ofertas educativas.

En suma, el curso además de sus efectos motivacionales tiene importantes implicaciones para fortalecer una identidad profesional con varias opciones de desarrollo. La replicabilidad y posible transferencia de aspectos centrales del enfoque del curso, lo hacen muy recomendable para ser incorporados en la formación de profesores de matemáticas que estén alineados con una identidad profesional de educación matemática distintiva e integradora, que cuenta con competencias profesionales para desempeñarse eficientemente en su futuro rol social y desarrollo profesional, con alto reconocimiento social.

Referencias

CEDETEC (2007). Guía para la Construcción de perfiles de egreso. Santiago: USACH.

De Sousa. (2014). A identidade profissional do professor de matemática em formação continuada – o caso Maria Manuela Simões. Curitiva-Brasil: Editora CRV,.

Dubar, C. (2006). La crisis de las identidades: la interpretación de una mutación. Puerto: Afrontamento.

Dubar, C. (2005). La socialización: la construcción de identidades sociales y profesionales. Nueva York: Routledge.

Dubar, C. (1997). Formación, trabajo y identidade profissionais. En Canario, R. (ed.) La formación y las situaciones de trabajo. Porto: Porto Editora, p. 43-52.

Gadner, H. (2001). Good work: Where Excellenece and Ethics meet. New Cork: Basic Books.

Jorquera, M (2012). Percepciones sobre su profesión de los nuevos estudiantes de la carrera de Pedagogía y Licenciatura en Educación Matemática y Computación. Trabajo de Titulación, LEMC, USACH.

Wenger, T. (1998). Comunidades de Práctica: Aprendizaje, sentido e identidad. Cambridge: Cambridge University Press.

Hacia el diseño de un modelo para el aprendizaje del concepto de los vectores en tres dimensiones (3D) mediante el apoyo de la herramienta Cabri para el cálculo de volúmenes

Luís Albeiro Zabala Jaramillo, Marcela Parraguez González
Universidad de Medellín, Colombia, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
lzabala@udem.edu.co, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen

La propuesta presenta un reporte de los aspectos Histórico-Epistemológico (Martínez y Benoit, 2008) sobre el que se sustenta la construcción del conocimiento matemático del producto vectorial. Como resultado de la indagación, se puede decir que dicho concepto matemático puede ser interpretado como elemento organizador de los sistemas simbólicos cartesianos, así también se puede concebir como un concepto geométrico de volumen (Ricardo, 2012), a partir de las diferentes figuras geométricas que se encuentran al interior del paralelepípedo. Estas dos interpretaciones sustentan construcciones y mecanismos mentales provistas en la Teoría APOE (Arnon et al, 2014) para implementar y diseñar un modelo para el aprendizaje del concepto de los vectores en tres dimensiones, en aprendices del álgebra lineal, mediados con software Cabri (Artigue, 2011).

Introducción

Cabri para el cálculo de volúmenes

Al inicio del curso de álgebra lineal se suelen presentar las magnitudes vectoriales, cuando se trata de dar interpretación geométrica a los distintos productos (escalar, vectorial, mixto) que se pueden definir entre vectores de un espacio vectorial. Esto permite medir ángulos, áreas y volúmenes orientados; en particular, el volumen orientado del paralelepípedo que se puede formar a partir de tres vectores linealmente independientes. Por ejemplo, con el software Cabri 3D Vs 2 (Díaz-Barriga, 2006), se identifican las diferentes figuras conexas que se forman al interior de un paralelepípedo, usando diferentes recursos –pinceles oculares– que el programa permite al usuario: cortes transversales, pirámides y troncos de pirámides -2D-, esferas tangentes a las paredes del paralelepípedo si su base es cuadrada, o sólo tangentes a dos caras si las bases no son cuadradas o rómbicas -3D-, entre otras figuras que se forman al interior de éstas.

Marco teórico

Se hizo uso de la teoría APOE como sustento teórico para interpretar las construcciones mentales de los estudiantes, necesarias para construir el esquema del concepto geométrico de volumen como una de las aplicaciones del producto mixto de vectores en 3D en sus tres interpretaciones geométricas, longitudes, áreas y volúmenes, asociadas a los distintos productos –escalar, vectorial, mixto–. Además, se incluyó el Software Cabri en nuestro estudio, el cual sustenta las actividades que son parte de una aproximación pedagógica particular en el llamado ciclo de enseñanza ACE (Actividades, Aprendizaje Colaborativo, Ejercicios).

Marco teórico

Se hizo uso de la teoría APOE como sustento teórico para interpretar las construcciones mentales de los estudiantes, necesarias para construir el esquema del concepto geométrico de volumen como una de las aplicaciones del producto mixto de vectores en 3D en sus tres interpretaciones geométricas, longitudes, áreas y volúmenes, asociadas a los distintos productos –escalar, vectorial, mixto–. Además, se incluyó el Software Cabri en nuestro estudio, el cual sustenta las actividades que son parte de una aproximación pedagógica particular en el llamado ciclo de enseñanza ACE (Actividades, Aprendizaje Colaborativo, Ejercicios).

La Teoría APOE

Teoría APOE (Acción–Proceso–Objeto–Esquema), creada por Ed Dubinsky (1991) y el grupo de investigación RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community); actualmente en Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller (2014) quienes presentan los elementos de la teoría y su uso para las investigaciones en Educación Matemática. Dubinsky fundamenta la problemática en el interés por la descripción de las construcciones de esquemas mentales que los estudiantes puedan realizar para aprender conceptos, desde la propia matemática, donde un estudiante no lograría internalizar conceptos matemáticos directamente, sino que necesita estructuras mentales adecuadas, que en caso de no poseerlas será casi imposible aprender cualquier concepto matemático. Las estructuras para cada concepto necesitan conectarse con otras previas.

Dubinsky (1991) propone desde la teoría APOE las estructuras mentales necesarias para construir un concepto: Acción (se realizan al interior del alumno: se hace paso a paso y obedecen a estímulos que son y perciben como externos), Proceso (sin realizar cada paso, el alumno puede imaginar lo que hay qué hacer, para revertir y coordinar en nuevos procesos), Objeto (el alumno puede trabajar –un fragmento matemático con ellas como un todo–), Esquema (es una colección de acciones, procesos y objetos que están coherentemente dispuestos en la mente del estudiante, de tal forma que la coherencia es la herramienta mental con la cual el estudiante se apoya en este recurso para resolver la situación matemática que se le está presentando).

En APOE los mecanismos mentales para construir dichas estructuras son las reflexiones abstractas: La interiorización (cuando el alumno reflexiona sobre la repetición de una acción determinada y está alejada de influencias externas), la coordinación (se da mediante procesos múltiples relacionados de los cuales surgen nuevos procesos), la reversión (puede mirar un nuevo proceso en donde puede analizar cómo fue concebido el proceso inicial), la encapsulación y desencapsulación (cuando ha reflexionado sobre un proceso y con una acción lo ha transformado, se puede decir que se ha convertido en un objeto, desencapsulándolo para analizarlo bajo un nuevo proceso).

Diseño metodológico

Se analizaron los procesos mentales que muestran los alumnos al relacionar el concepto geométrico de volúmenes con vectores en tres dimensiones. Se detallan los mecanismos y las construcciones que los estudiantes realizaron con la asistencia de la tecnología (Cabri) y de qué forma estos se apropiaron de los conceptos del Álgebra Lineal; por lo que usamos la teoría APOE.

Estudio de Casos Múltiples

Se aplicó con estudiantes de ingeniería colombianos, del segundo año de universidad

Ciclo de investigación de APOE

A los casos de estudio se les aplicó el ciclo de investigación previsto en la teoría APOE: un análisis teórico, conocido como Descomposición Genética, (DG); un diseño, basado en la DG teórica, y aplicación de instrumentos; seguido de un análisis y verificación de datos (Asiala et al., 1996); y a partir del análisis de los datos obtenidos, se le puede repetir, para refinar tanto el análisis teórico como los instrumentos.

Análisis Histórico–Epistemológico

Se hizo un estudio tanto histórico como epistemológico, pretendiendo mantener la conceptualización o distinción que hace Bachelard (1972) entre el trabajo del historiador de la ciencia y el del epistemólogo: "El historiador de la ciencia debe tomar las ideas como hechos. El epistemólogo debe tomar los hechos como ideas, insertándolas en un sistema de pensamientos". (Bachelard, 1972, p 20). Se vio un enfoque en el Producto Exterior de Grassmann y su representación geométrica de los trabajos realizados por los estudiantes en los casos de estudio y la forma cómo calculan el volumen de un paralelepípedo.

Del Producto Vectorial

La primera parte del análisis Histórico – Epistemológico (Martínez y Benoit, 2008) permite dar cuenta de tres etapas que históricamente corresponden a una epistemología del producto vectorial: a) Nacimiento de los Cuaterniones, b) Desarrollo y Maduración del Cálculo de Cuaterniones, c) Evolución del Cuaternión al Cálculo Vectorial Moderno

Del Concepto de Volumen

La segunda parte del elemento Histórico – Epistemológico del concepto de medida se remonta a más de 5000 años, que emerge del manejo de longitudes, áreas y volúmenes fundamentalmente y de la necesidad de su cálculo. Estos tres aspectos particulares de medidas son los que han servido como guía para sacar a la luz el concepto matemático de medida que de por sí están unidos.

Del Producto Exterior

Grassmann (1809 –1877) un matemático incomprendido y un lingüista reconocido, al igual que Hamilton, un año después del descubrimiento de la multiplicación correcta de los cuaterniones por Hamilton (1844), éste publica unas ideas parecidas en su tratado titulado "Die linealeAusdehnungslehre; einNeuerZweig der Mathematik" –Teoría de la Extensión Lineal; una Nueva Rama de la Matemática–. Grassmann fue el primero en concebir la geometría de varias dimensiones, una de sus obras más importantes fue "Enseñanza de la Dilatación" (1862), donde desarrolló un cálculo operativo para las diversas magnitudes geométricas, posteriormente definió también el "Producto Exterior", operación clave en el álgebra conocida como "Álgebra Externa".

Su Representación Algebraica

El aporte esencial de Grassmann al producto vectorial fue una generalización, guiándose por su intuición geométrica: Él concibió el área barrida por un segmento que se desliza sobre otro y sobre una línea quebrada dotada de una orientación, y por lo tanto, de un signo, según se recorriera el perímetro del área en un sentido u otro. Con esto, definió un nuevo producto, el producto que en la actualidad se llama producto exterior, $[ab] = ab = a \wedge b$ y que él llamaba producto escalón, íntimamente relacionado con el producto vectorial, y que, empero, a diferencia de éste, no está restringido a una dimensionalidad fija como en el caso del producto vectorial. (González, nd, p. 10)

Definición del Producto Exterior

En matemáticas la definición del producto exterior –o como se conocía anteriormente producto cuña o escalón–, es una anti-simetrización del producto tensorial, o como mejor definición que es de cualquier número de vectores como su producto antisimétrico, es decir, el único producto distributivo respecto a la suma de vectores que cambia de signo bajo cualquier permutación de un par de ellos:

$$v_1 \wedge \cdots v_i \wedge \cdots v_j \wedge \cdots v_n \wedge = -v_1 \wedge \cdots v_j \wedge \cdots v_i \wedge \cdots v_n \quad \forall\, i \neq j$$

Esta definición del producto exterior $-[ab] = ab = a \wedge b$ – es única, salvo un factor constante. Para ello se identifica el producto exterior de vectores perpendiculares con el producto de sus módulos para una constante igual a 1.

Su Representación Geométrica en 3D.

Para la representación geométrica en 3D "cada producto exterior por un nuevo vector es una multiplicación por su componente perpendicular al espacio generado por los vectores", (González, 2012, p. 44). Dados tres vectores {u, v, w} cualesquiera e independientes en el espacio euclídeo –de la forma como fue concebida por Grassmann para analizar la forma del cómo los aprendices realizan la construcción del paralelepípedo– se observa el producto exterior y la forma geométrica:

> El producto exterior del primero por el segundo es igual a la longitud del primero por la componente perpendicular del segundo respecto al primero (figura 1), es decir, el área del paralelogramo que forman:
>
> $u \wedge u = uv_{\perp u}$
>
> Ahora multipliquémoslo exteriormente por el tercero y obtendremos el producto del área del paralelogramo que forman los dos

primeros por la componente perpendicular del tercero respecto al plano formado por los dos primeros. Eso es igual al área de la base por la altura, es decir, el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores (figura 2):

$$u \wedge u \wedge w = u v_{\perp u} w_{\perp uv}$$

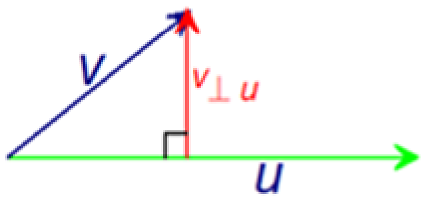


Figura 1

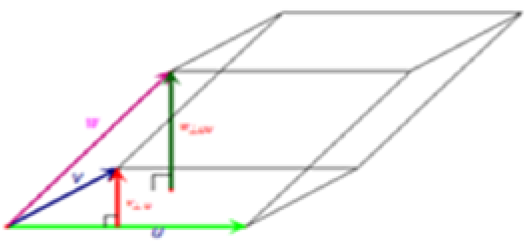


Figura 2

De ahí el nombre que le dio Grassmann: producto exterior ya que siempre da como resultado un aumento de dimensión geométrica respecto a la dimensión geométrica del recinto anterior. El título de su obra Die Ausdehnungslehre fue traducido muy acertadamente al español como Teoría de la extensión. (González, 2012, p. 44)

Articulación de la Teoría APOE, el Producto Exterior y Cabri desde los Casos de Estudio

Acción:

Del concepto matemático del producto mixto: Dadas las fórmulas para las operaciones entre vectores, el estudiante puede determinar las operaciones de estos, en particular con sus respectivas componentes y direcciones.

ESTUDIANTE “B”: ACCIONES MECÁNICAS

Ya poseía los 3 vectores en el espacio, por lo tanto solucioné una gran parte del reto que se me había propuesto, pero ahora lo que tenía que hacer era encontrar la forma de que esos vectores me construyeran una figura en particular, era necesario tener presente cuáles eran las cualidades de un paralelepípedo, recordaba que matemáticamente el volumen era el triple producto mixto de los vectores, pero gráficamente no lo tenía relacionado, recordé en qué consistía el producto mixto, el cual era un producto cruz, y con este resultado se realizaba un producto escalar con el vector faltante

Del Software Cabri bajo el concepto geométrico del producto exterior: (Grassmann): Dados los vectores, el estudiante puede encontrar las formas de representación de estos en un espacio, en particular con sus respectivas componentes y direcciones.

ESTUDIANTE “C”: ACCIONES EN VÍAS DE INTERIORIZARSE EN LA CONSTRUCCIÓN PROCESO DEL CONCEPTO VECTOR EN EL ESPACIO

Pensé en unir las dimensiones en X y Y en el plano XY para esto tracé rectas paralelas a los vectores que Cabri presenta como ejes y trasladé los valores al eje X y al eje Y para luego trazar rectas paralelas en los puntos contrarios, es decir, en el punto del eje X tracé una recta paralela al eje Y y viceversa.

Luego donde se unían estas dos rectas tracé punto de intersección y se subió las unidades correspondientes en el eje Z, como resultado es un punto opuesto al punto (0,0,0) origen, es decir, el punto que buscaba es la punta opuesta de un prisma con una punta en el origen y el vector es una diagonal del prisma con cola en (0,0,0) y cabeza en un punto (x, y, z) hallado de la forma ya explicada

Proceso:

Del concepto matemático sobre el producto mixto: Capacidad de describir algunos aspectos de la gráfica de la operación de tres vectores –operándolos indistintamente–, sin obtener directamente valores específicos.

Del Software Cabri bajo el concepto geométrico del producto exterior (Grassmann): Capacidad del estudiante de describir algunos aspectos de la gráfica en la representación de los tres vectores -operándolos indistintamente, con proyecciones-. Además, es capaz de hacer transformaciones al objeto matemático de manera interna, incluso de pensar en los posibles poliedros al interior de la gráfica.

ESTUDIANTE "B": PROCESOS COMO RESULTADO DE INTERIORIZAR ACCIONES, GRASSMANN

Cada cara era un paralelogramo y es un prisma donde su base es un paralelogramo, estas fueron las que más me ayudó a realizar la construcción ya que únicamente era determinar la base y una altura para la figura, donde concluí que dos vectores me podían determinar una base con forma de paralelogramo y el tercer vector seria la altura.

Entonces ya poseía una forma de que los 3 vectores me determinaran el paralelepípedo.

Objeto:

Del concepto matemático sobre el producto mixto: El estudiante puede hacer acciones en el objeto de la gráfica resultante del producto mixto a partir de la proyección de estos en el espacio 3D.
Del Software Cabri bajo el concepto geométrico del producto exterior (Grassmann) : El estudiante puede discernir sobre la gráfica resultante del producto mixto a partir de la proyección de estos en el espacio 3D y verificar las diferentes figuras que se forman al interior de esta.

ESTUDIANTE "B": TRATA DE HACER ACCIONES SOBRE UN OBJETO

Intenté realizarle unas transformaciones al ejercicio, por ejemplo, que los puntos se encuentren en el mismo plano, en este caso la figura no tendría una altura, logrando que se formara una figura plana.

Esquema:

Del concepto matemático sobre el producto mixto: Un estudiante puede ordenar, clasificar, categorizar y aplicar las propiedades resultantes del producto mixto en el espacio 3D y las representaciones geométricas de los vectores en este espacio.

Del Software Cabri bajo el concepto geométrico del producto exterior (Grassmann): Un estudiante puede graficar y clasificar en forma de categorías y aplicar las propiedades resultantes del producto mixto en el espacio 3D.

ESTUDIANTE "B": TEMATIZA EL ESQUEMA EN OBJETO

La cantidad de figuras resultantes en el producto del producto mixto fueron demasiadas, primero porque entre dos vectores sería posible formar un plano, y en este plano sería fácil visualizar cualquier figura plana (círculos, cuadrados, triángulos, robos, trapecios, etc.), y si se le diera una altura a partir del otro vector formaría un prisma que sería acorde a la figura de la base. Entre estos resalté el cilindro, aunque su base no tenía lados se cumplía el mismo principio.

Conclusiones

Se han presentado los resultados del estudio realizado para indagar sobre los aspectos históricos – epistemológicos del producto vectorial, del concepto de volumen y del producto exterior. Con esta indagación se pretendió desglosar y observar cómo fue surgiendo no sólo el concepto de producto vectorial, sino de la forma cómo se construye el concepto de volumen y en especial en la tercera parte que es donde se observa del cómo los estudiantes "ven" o mejor se imaginan los pasos para la construcción geométrica del paralelepípedo que estos tres vectores forman, y en el producto exterior se encuentran las explicaciones a las construcciones que éstos hacen.

Referencias

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). APOS Theory. New York: Springer.

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Año 6. Número 8. pp 13-33. Costa Rica.

Bachelard, G. (1972). La formación del espíritu científico. (p 20), Buenos Aires: Siglo XI. (Original en francés de 1938).

Díaz-Barriga, E. (2006). Geometría dinámica con Cabri-Géomètre. México: Editorial Kali.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, en D. Tall (ed.): Advanced mathematical thinking (pp. 95-123). Dordrecht. Kluwer A. P.

González, J. (nd). El producto vectorial. Recuperado el 02 de julio de 2014 de http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/fchamizo/realquiler/fich/jfgh.pdf

González, R. (2012). Producto exterior y sus aplicaciones. Recuperado el 02 de julio de 2014 de http://www.xtec.cat/~rgonzal1/espacio.htm y de http://www.xtec.cat/~rgonzal1/espacio04.pdf

Martínez, G. y Benoit, P. (2008). Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial. Latin American Journal of PhysicsEducation, 2(2), 122-129.

Ricardo, F. (2012). Apuntes de la Teoría de la Medida. Departamento de Matemáticas. Universidad de Extremadura. España.

VOL10 - NUM 1

Modelación de ún móvil sobre una trayectoria en espiral, modulando la amplitud de modelos senosoidales

Francisco Jofré Vidal, Carolina Wa Kay Galarza, Jaime Arrieta Vera
Universidad de Santiago de Chile, Chile. Universidad Autónoma de Guerrero, México.
francisco.jofre@usach.cl, carolina.wakay@usach.cl, jaime.arrieta@gmail.com

Resumen

Este trabajo reporta el análisis de las producciones de estudiantes que participan en un diseño de aprendizaje basado en la modelación del movimiento de un móvil sobre una trayectoria espiral con velocidad constante por modelos senosoidales modulados por exponenciales. Se monta un arreglo experimental donde se filma el móvil y a partir de los datos recogidos con el software Tracker se ajustan gráficamente con el software LDM. Interesa analizar argumentos, herramientas y procedimientos de los estudiantes con la intención de caracterizar procedimientos para la modulación de la amplitud de modelos senosoidales. La metodología de esta investigación es la ingeniería didáctica y la perspectiva teórica en que sustentamos nuestro trabajo es la socioepistemología.

Problemática

Montiel (2005) reporta que los estudiantes al ingresar a la educación superior no poseen una concepción de funcionalidad de los conceptos trigonométricos, es decir, conservan la noción de razón trigonométrica y sus unidades de medida como instrumento de resolución de problemas que se relacionen con el seno, coseno, tangente y sus inversos. Además, señala que el empleo del círculo trigonométrico como estrategia de enseñanza obstaculiza la construcción de la función trigonométrica en un contexto analítico. Finalmente, concluye que se deben considerar contextos o problemas donde las funciones trigonométricas se usen para explicar fenómenos. Sumado a esto, López (2005) evidencia que generalmente las clases de matemática pretenden el aprendizaje sin experimentación, sin laboratorios, resolviendo problemas de tipo artificial, manipulando formulas y operando entes algebraicos, todo esto estando exento de lo que denomina como *ruido de datos.*

Al enlazar los dos puntos de vista antes descritos y como recomiendan Cantoral y Farfán (2004), se concluye que es necesario resignificar la función trigonométrica como herramienta predictiva, despojándola del contexto geométrico-estático de las razones trigonométricas. Dado esto, se propone llevar al aula una propuesta basada en la construcción social de la función seno.

La Modelación como práctica

Entendemos la modelación como una práctica recurrente de diversas comunidades. La modelación es una práctica social que articula dos entidades con la intención de intervenir en una, llamada el modelo, a partir de la otra, llamada lo modelado. La primera fase de la modelación es la interacción con el fenómeno o la experimentación en sentido amplio. El planteamiento consiste en revalorar el papel del experimento en la generación del conocimiento, relacionar las demás ciencias y a la matemática con prácticas diferentes a las que actualmente las enlazan. Se propone la modelación como vínculo entre las ciencias y la matemática.

Análisis a priori

El fenómeno a modelar consiste en la trayectoria que sigue una masa atada a una cuerda enrollándose en un poste al girar, donde el móvil sigue una trayectoria en espiral y la recopilación de su trayectoria. Para esto se pretende que los estudiantes:

- Interactúen libremente con el software, siendo este un ente motivador hacia sus acciones y construcciones mentales.
- Dada la situación expuesta, se espera que reconozcan en una primera aproximación un comportamiento oscilante, relacionado con una función senosoidal.
- Dejen de privilegiar el recurso de realizar operaciones algebraicas y se abran paso a establecer comportamientos de las formas curvas, variando los parámetros de la función e interactuando con los entes didácticos puestos a disposición.
- Identifiquen relaciones entre los parámetros de la función y las características de la curva, determinando regularidades y conclusiones.
- Construyan argumentos de la función, como una expresión que organiza comportamientos, y contrasten sus propios conocimientos.

Experimentación

La experimentación respecto al fenómeno a modelar considera una situación didáctica, donde se realizan diferentes análisis a los productos obtenidos.

En la puesta de escena del diseño participan estudiantes de pedagogía en matemática de último año de la USACH. Esta se desarrolló en 2 sesiones de 4 horas pedagógicas. Se realiza un seguimiento a las producciones de los actores, para analizar los argumentos que esgrimen, las herramientas que utilizan y los procedimientos que siguen.

A continuación, describimos las actividades de la situación didáctica:

1. La toma de datos: Se presenta el fenómeno a modelar, el cual consiste en la trayectoria que sigue una masa atada a una cuerda enrollándose en un poste al girar, donde el móvil sigue una trayectoria en espiral. Esta situación es grabada colocando una cámara de video encima del plano que permite tomar evidencias del experimento. Luego, las evidencias recopiladas son analizadas utilizando el software Tracker.

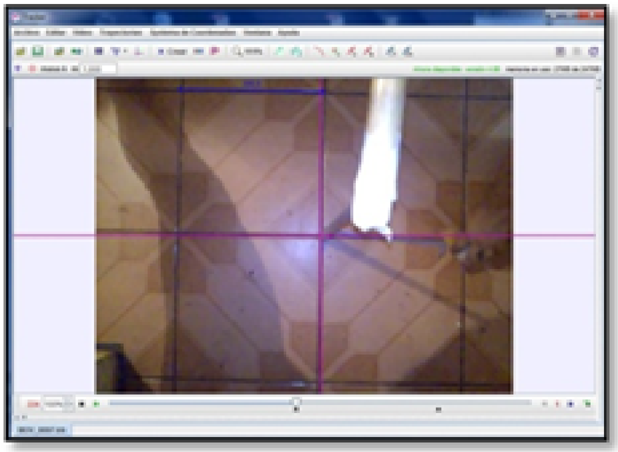


Figura 1: Video subido al tracker.

2. La predicción: Consiste en pronosticar los modelos gráficos de la función al contrastar el tiempo con la ubicación x de la masa, y luego el tiempo con la ubicación y de la masa. Argumentado al respecto, determinando regularidades y conclusiones.

3. La interacción: Ya que, con los datos en el tracker, se realiza el seguimiento de la masa en movimiento mediante un punteo. Se interactúa con las posibilidades de visualización que entrega el software graficando (t, x) tiempo v/s. posición de x, (t, y) tiempo v/s. posición de y. Se verifican los resultados de las producciones anteriores.

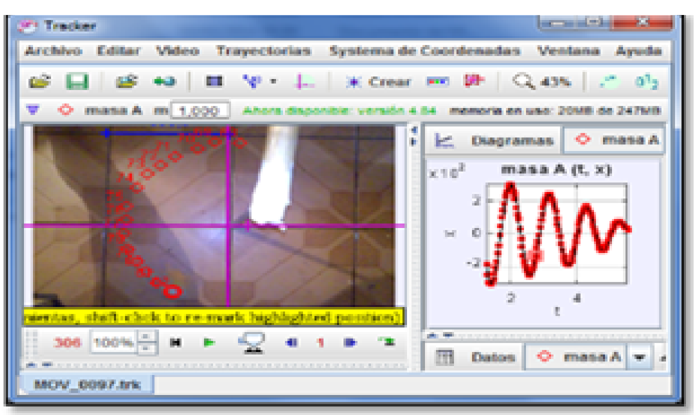


Figura 2: Móvil siguiendo trayectoria en espiral.

4. La construcción de modelos: Se considera el modelo construido anteriormente y se incluyen los modelos velocidad vertical y horizontal con respecto al tiempo (vx-t, vy-t), los modelos aceleración horizontal y vertical con respecto del tiempo (ax-t, ay-t), y los modelos clásicos x-y, vx-x, vy-y, ax-x, ay-y.

Luego se importan los datos numéricos al Laboratorio Didáctico Matemático (LDM). Aquí son elaborados los modelos analíticos a construir, ajustando los datos numéricos por el método gráfico.

Los actores reconocen el modelo senosoidal, pero con la amplitud decreciendo. Esta es una de las opciones gráficas del menú del LDM modulada por un decrecimiento exponencial, como se muestra en la figura 3. Esta opción es la que los actores eligen debido a las características de la gráfica respecto a los datos experimentales.

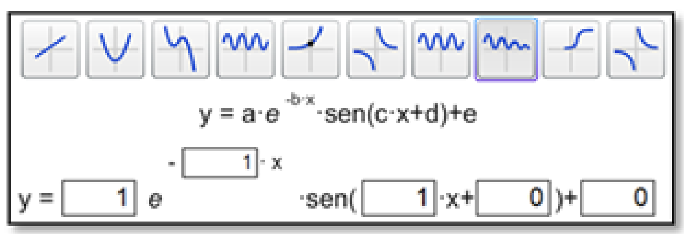


Figura 3: Senosoidal modulada por exponencial.

Se varían los parámetros de la expresión analítica de la función que representa el modelo, e identifican patrones del comportamiento de la gráfica. Luego montan la nube de datos, lo que se aprecia en la figura 4.

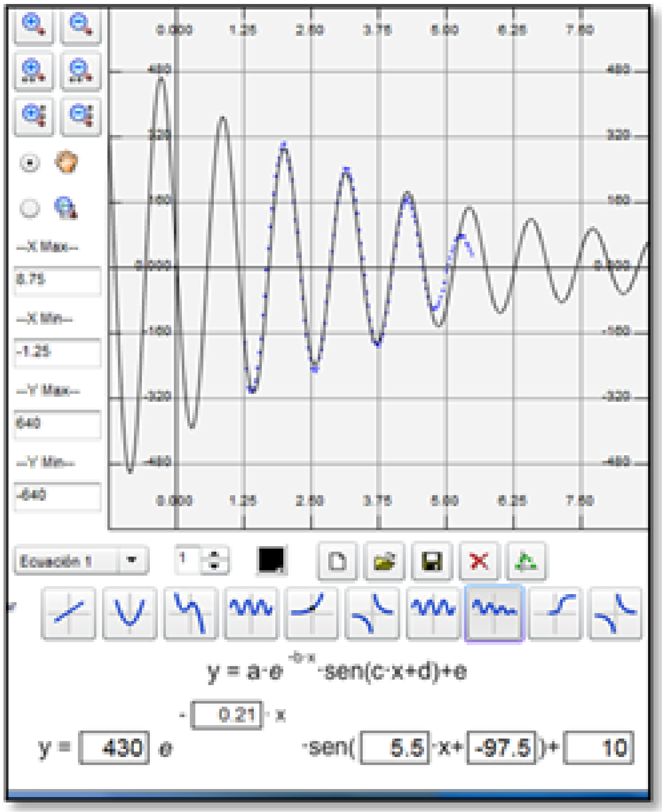


Figura 4: Curva ajustada a datos experimentales.

5. La resignificación: Se realiza sobre la base de las conclusiones obtenidas de los estudiantes en torno a la situación didáctica. Se responden preguntas respecto de los cambios que experimentaría el modelo obtenido si varian las características físicas de los elementos utilizados (tamaño de la masa, longitud de la cuerda) en la realización del fenómeno.

Análisis posteriori

La situación didáctica presentada al estudiante es lo que sustenta la modulación de la amplitud de modelos senosoidales, en este caso por un modelo exponencial. Se identifica que los estudiantes lograron:

- Interactuar con el software y explorar con las alternativas de visualización que este ofrece.

- Identificar un comportamiento repetitivo de forma oscilante en torno a la posición de la masa a medida que pasa el tiempo.

- Relacionar aspectos de la situación de movimiento mediante la significación y las gráficas obtenidas a partir de la grabación.

- Dar explicaciones de lo que sucede con la situación: identificaron que el parámetro "a" corresponde a la amplitud de la onda inicial, el parámetro "b" se relaciona con la exponencial, definiendo si se va amortiguando o no la onda (dependiendo del signo), además lo relacionan con la velocidad de amortiguamiento; el parámetro "c" determina la frecuencia de la onda, mientras el parámetro "d" corresponde al desplazamiento horizontal del modelo; y que el parámetro "e" al desplazamiento vertical de modelo.

- Articular los parámetros del modelo analitico con los parámetros del modelo gráfico. La articulación de los parámetros del modelo con los del fenómeno se realiza mediante la discusión de predicción acerca de cómo sería el fenómemo si se modifican los parámetros del modelo y viceversa.

- Generar significados de una apreciación cualitativa y cuantitativa de la velocidad durante el recorrido a partir de la gráfica de la posición respecto al tiempo, mediante la comparación entre instantes donde se tiene menor o mayor velocidad.

- Argumentar sus conclusiones, mediante las regularidades que encontraron en el desarrollo de la situación didáctica.

- Resignificar el conocimiento obtenido, identificando posibles cambios en la gráfica y los modelos al modificar las características físicas de los elementos involucrados en el fenómeno.

Conclusiones

La interacción con datos, gráficas y fórmulas que modelen fenómenos, es de fundamental importancia, pues permite la construcción de argumentos para interactuar con los demás estudiantes y el docente.

El proceso de modelación promovió la investigación y la reflexión crítica por parte de los estudiantes, además de la realización de conjeturas, y la confrontación de distintas perspectivas. Lograron establecer el modelo final, identificando como se modula la amplitud del modelo senosoidal con un modelo exponencial.

Se concluye que el diseño de situaciones de aprendizaje que involucren a la modelación como práctica social, considera la realización de múltiples realizaciones, lo que constituye un sistema dinámico. Se recomienda realizar prácticas de este tipo, con el objetivo de conectar la matemática con fenómenos de la vida cotidiana.

Referencias

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de la modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Cantoral, R y Farfán, R. (2004). Desarrollo conceptual del cálculo. México: Thomson.

Cordero, F. (2003). Lo social en el conocimiento matemático: los argumentos y la reconstrucción de significados. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 16, Tomo1, (pp. 73-78).

López, C. (2005). El laboratorio Didáctico de Matemáticas (LDM): Un software elaborado para la construcción del conocimiento matemático en el aula. Tesis de Licenciatura, Instituto Tecnológico de Acapulco, México.

Montiel, G (2005). Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica. Tesis doctoral. Instituto Politécnico Nacional, CICATA-IPN.

Suárez, L. & Cordero, F. (2005). Modelación en Matemática Educativa. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18 (1), 639-644.

Suárez, L. & Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 3(1), 51-58.

Modelar figurando

Byron Miranda, José D. Hernández, Carol Aracena, Leonora Díaz.
Universidad de Valparaíso, Chile
jjtremor@gmail.com, jose.2028@gmail.com, carol.aracena.lopez@gmail.com, leonoradm@gmail.com

Resumen

Se reportan resultados de una experiencia de modelación que se obtuvieron para dar respuesta a la pregunta de investigación ¿Cómo un diseño de enseñanza y evaluación para los aprendizajes propicia que figuras de los estudiantes se constituyan en modelo? Desde una perspectiva teórica que entiende a la modelación como la articulación de dos entidades, una entidad es el fenómeno y la otra un modelo. Se exhiben evidencias de los desarrollos de una secuencia de experimentación y modelación realizada por estudiantes de tercer año de enseñanza media, en donde se identifican figuras, seudográficos e histogramas; muestran poca cercanía con el plano cartesiano. Elaboraron una figura con los datos dados por el diseño de enseñanza y otros predichos por ellos en la propia secuencia de experimentación, logrando modelar con su figura un modelo personal, la que les ayudó a dilucidar el comportamiento de la elasticidad del resorte. Con base en el análisis pormenorizado de las producciones de los estudiantes y el contraste con las conjeturas previas, se levanta un rediseño de una secuencia de modelación para propiciar el desplazamiento de las figuras estudiantiles a la gráfica cartesiana como modelo, incorporando instancias de evaluación auténtica.

Antecedentes

Los currículos chilenos consideran que la modelación debe contemplarse como una de las cuatro estrategias para la enseñanza de las matemáticas en el aula, junto con resolución de problemas, espacio, forma e incertidumbre (MINEDUC, 2013). Citando a González, Rodríguez y Díaz en "Modelando lo cuadrático desde el entorno hacia la escuela" (2014):

> *"Entiende a la modelación como un proceso en que se emplean y aplican modelos. Se seleccionan, se modifican y se construyen modelos matemáticos con base en identificación de patrones característicos de situaciones, objetos o fenómenos que se desea estudiar o resolver. Finalmente se evalúan (Bases Curriculares 2012, p. 3)."*

Como también en diversos trabajos se evidencian el uso de figuraciones no cartesianas por estudiantes y profesorado (Carrasco, 2006; Díaz, 2008; Dolores, Chablé, Canú, Cristy y Crispín, 2009). (Citado en Carrasco, Díaz, Buendía, 2014).

Marco teórico

A inicios de los 2000 los autores Blomhoj y Jensen (2003) afirman que la modelación en el aula de matemáticas es una secuencia ordenada de pasos. A saber, la formulación de un problema, la sistematización, la traducción de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático, el uso de métodos matemáticos, la interpretación de los resultados y la evaluación de la validez del modelo.

Uno de esos autores seis años después, M. Blomhoj (2009) con base en la matriz de Kayser y Sriraman (2006) citado en Blomhoj (2009) distingue para la modelación en educación matemática seis perspectivas, estas son: a) realista; b) contextual; c) educacional; d) epistemológica; e) cognitiva y f) socio critica; en las que clasifica 15 artículos recibidos por el grupo de estudio temático de modelación en ICME 11 (Monterrey 2008). En su artículo da cuenta del amplio desarrollo que viene presentando la modelación. Por su parte en Brasil Biembengut (2011) categoriza más de ochenta estudios acerca de la modelación en enseñanza secundaria en su país y reporta que ellos responden a tres grandes perspectivas, estas son: a) como método de enseñanza y de investigación; b) como enseñanza alternativa de las matemáticas y c) como ambiente de aprendizaje.

Como mencionan Arrieta y Díaz (2015) en su artículo *"Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología"*, la modelación es una interacción entre dos entes, modelo y lo modelado, donde el primero actúa sobre el segundo. Relaciona con este reporte sobre una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología que los autores llaman modelación-con-vivencia que en esta situación se da desde un fenómeno real a una interacción con lo matemático.

El análisis toma como base lo planteado en Carrasco, Díaz y Buendía (2014) sobre figuración de lo que varía. El artículo analiza figuras que se construyen o que se interpretan.

Aspectos metodológicos

a) Los participantes.

La exploración se realizó a cuatro grupos de estudiantes (dos de tres y dos de cuatro) de un establecimiento de la comuna de Viña del Mar, quienes cursan el tercer año de enseñanza media.

b) Instrumento de exploración.

La secuencia aplicada en esta investigación toma base en la perspectiva de modelación de los autores Arrieta y Díaz (2015). Específicamente se trata de una secuencia didáctica validada científicamente en la tesis doctoral de Arrieta (2003). Inicia con un experimento narrado al que sigue preguntas que indican actividades de modelación tabular, algebraica y gráfica. Aquí se reporta lo relativo a la modelación figural.

b.1) Reactivos y Conjeturas Previas.

Reportamos algunos de los reactivos usados en la exploración los cuales fueron seleccionados, puesto que el primer reactivo elegido se puede relacionar con la gráfica de una recta y los otros dos reactivos escogidos fueron de la segunda parte de la secuencia, los cuales darán a conocer su figura y la posibilidad de esta de constituirse en un modelo.

1. ¿Cuál será la posición del portapesas si se colocan P gramos? ¿Por qué?

Conjetura. Se espera que estudiantes conjeturen una fórmula general para la variación de los resultados predichos por ellos.

2. Ahora graficaremos los datos para crear un modelo gráfico de la elasticidad de los resortes. Grafique los datos de la tabla.

Conjetura. Se espera que estudiantes figuren los datos de peso y elongaciones con que cuentan desde la primera parte de la secuencia.

3. ¿Cómo deberá ser el resorte para que la recta que obtengamos sea "más vertical" que la gráfica de nuestro experimento?

Conjetura. Se espera que los estudiantes identifiquen que a mayores elongaciones y considerando los mismos pesos del experimento inicial figuren una curva más vertical.

Respuestas de los estudiantes

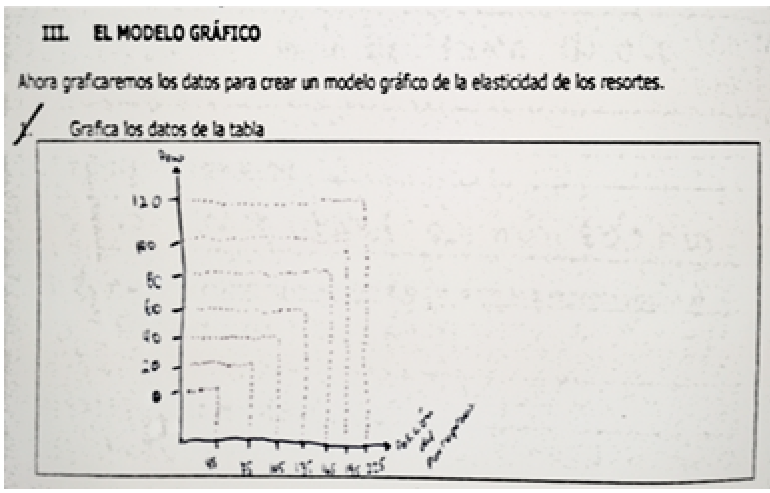
En la tabla siguiente se presentan las respuestas dadas por los estudiantes a cada pregunta.

Tabla 1: Respuestas Estudiantiles.

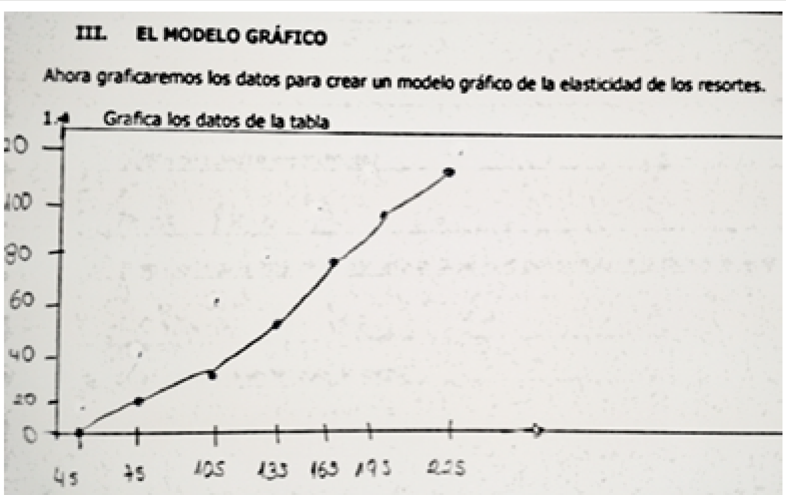
Reactivos	Grupo 1 (G1)	Grupo 2 (G2)	Grupo 3 (G3)	Grupo (G4)
1. ¿Cuál será la posición del portapesas si se colocan P gramos? ¿Por qué?	No se sabría, ya que no tenemos el valor de P. 20 ⟶ 30 P ⟶ X P*30=P*20 1,5 Porque reemplazamos	El portapesas equivale a (P+30) ya que P no se sabe	20=p 30p=20 x 30=x 20 45+(30p/20)=x	$\frac{20}{p}=\frac{30}{x}$ $20x=30p$ $\rightarrow x=\frac{30p}{20}+45$
2. Ahora graficaremos los datos para crear un modelo gráfico de la elasticidad de los resortes. Grafique los datos de la tabla. (*) ¿Qué grafica es?	- Es una recta - Gráfico lineal	Gráfico de la elasticidad del resorte.	Gráfico de barras.	Gráfico de puntos.

3. ¿Cómo deberá ser el resorte para que la recta que obtengamos sea “más vertical” que la gráfica de nuestro experimento?	El resorte deberá ser menos elástico	Más rígido	Inconcluso	Inconcluso

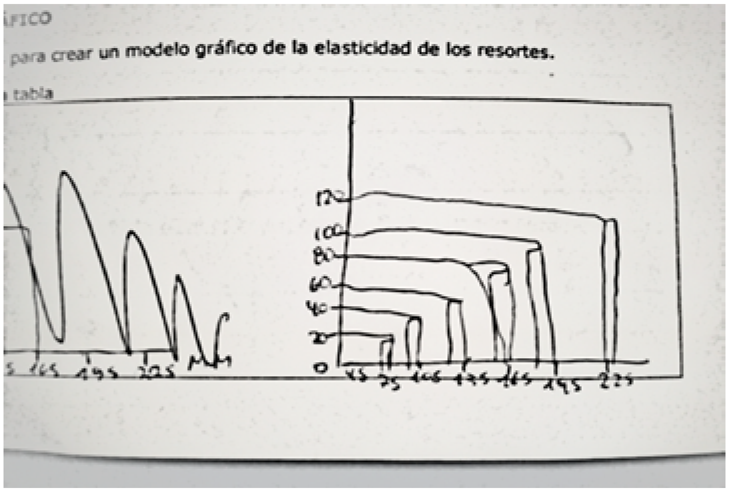
(*)Grupo 1



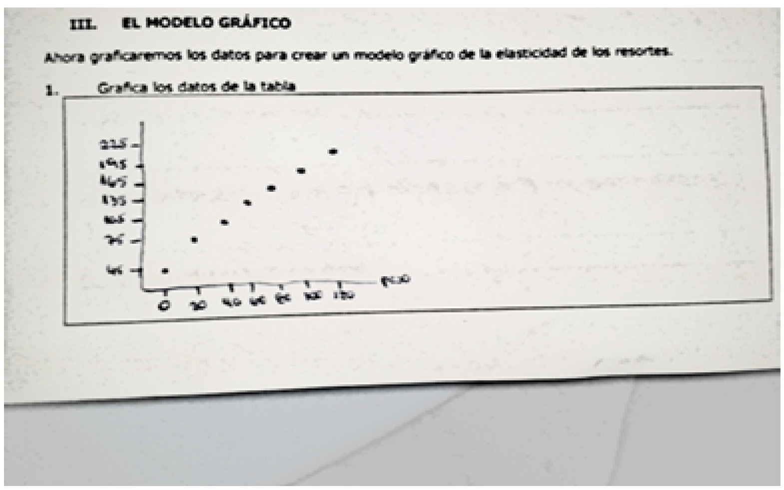
Grupo 2



(*)Grupo 3



Grupo 4



Análisis de Respuestas desde el modelo figural

Reactivo 1

Grupo 1: En primera instancia los estudiantes asumen que no se puede saber la posición de un peso desconocido en este caso "p", luego usan regla de 3 para dar alguna solución, trabajan en los incrementos y encuentran el valor unitario de los incrementos. Grupo 2: Se observa que al preguntar por "p", los estudiantes asumen que "p" es un valor desconocido y lo asocian con el delta posición, es decir, sin importar el valor de ¨p" la posición va aumentando de treinta en treinta.

Grupo 3 y 4: Aquí se aprecia que estos grupos lograron conjeturar una expresión algebraica para dar respuesta al reactivo.

Reactivo 2

Grupo 1: El grupo construyo una figura mediante puntos para representar los valores de la tabla, lo identificaron como una recta o un gráfico lineal. Estuvo presente en esa identificación la estrategia cognitiva de Gestalt, la cual se refiere que en un primer momento no nos fijamos en los detalles, pero luego en nuestra mente formamos patrones organizados y con significado. Otro punto que cabe destacar es que al figurar colocaron el eje de pesos en la vertical y el eje de posiciones en la horizontal, como lo mencionan Carrasco, Díaz y Buendía (2014) esto es atribuido a la forma de conocer y actuar que han cimentado en subsistemas biológicos y socioculturales, siendo esenciales en la cimentación de los saberes.

Grupo 2: Este grupo de estudiantes construyeron un seudográfico lineal mediante unión de puntos para representar las variaciones de los valores de la tabla pese a que intentaron representar la figura en forma lineal, identifica su figura como gráfico de la elasticidad del resorte. Al figurar colocaron el eje de pesos en la vertical y el eje de posiciones en la horizontal, esto atribuido de igual forma a construcciones socioculturales de saberes.

Grupo 3: Este grupo representó los datos de la tabla, mediante un histograma, identificando su figura como un gráfico de barras. De modo análogo a los dos grupos anteriores al figurar colocaron el eje de pesos en la vertical y el eje de posiciones en la horizontal, atribuido construcciones socioculturales de los saberes.

Grupo 4: Este grupo representó su tabla con un seudográfico de puntos, ubicando de forma correcta las variables de pesos y posiciones. Además, identificaron a su figura como un gráfico de puntos.

Reactivo 3

Grupo 1: Este grupo identifica que para que la recta sea más vertical el resorte deberá ser menos elástico, esta respuesta es debido a que los datos de las posiciones (mm) los ubicaron en la horizontal y los datos de los pesos (gr) en la vertical. Esta respuesta es coherente con su figura por lo que no es considerada como errónea.

Grupo 2: Estos estudiantes dicen que para que la recta quede más vertical el resorte tiene que ser más rígido, esta respuesta es debido a que los datos de las posiciones (mm) los ubicaron en la horizontal y los datos de los pesos (gr) en la vertical. Esta respuesta es coherente con su figura por lo que no es considerada como errónea.

Grupos 3 y 4: Estos dos grupos no dan respuesta al reactivo, ellos levantaron histogramas y estos se utiliza para representar gráficamente los datos de una variable continua que han sido agrupados en intervalos.

Contraste entre respuestas y conjeturas

Reactivo 1

Se espera que los estudiantes conjeturen una fórmula general para la variación de los resultados predichos por ellos. El grupo 1 primero indica que no se puede determinar el valor de un peso desconocido, luego usando regla de 3 encuentra el valor del incremento; el grupo 2 asocia el p como el delta de posición y sin importar el valor la posición va aumentando de treinta en treinta; los grupos 3 y 4 conjeturaron una expresión algebraica.

Reactivo 2

Se espera que estudiantes figuren los datos de peso y elongaciones con que cuentan hasta el minuto. El grupo 1 construyó una figura conformada por puntos para representar los valores identificando una recta o un gráfico lineal; el grupo 2 construyó un seudográfico lineal mediante unión de puntos para representar las variaciones de los valores de la tabla e identifican su figura como gráfico de la elasticidad del resorte; el grupo 3 representó los datos de la tabla, mediante un histograma, identificando su figura como un gráfico de barras. Al figurar los grupos 1, 2 y 3 colocaron el eje de pesos en la vertical y el eje de posiciones en la horizontal atribuida a las construcciones socioculturales de los saberes; y por último el grupo 4 representó su tabla con un seudográfico de puntos, ubicando de forma correcta las variables de pesos y posiciones. Además, identificó a su figura como un gráfico de puntos.

Reactivo 3

Se espera que los estudiantes identifiquen que a mayores elongaciones y considerando los mismos pesos del experimento inicial figuren una curva más vertical. El grupo 1: los estudiantes identifican que para que la recta sea más vertical el resorte debe ser menos elástico; el grupo 2: dicen que para que la recta quede más vertical el resorte tiene que ser más rígido. Estos dos grupos colocaron el eje de pesos en la vertical y el eje de posiciones en la horizontal por lo que sus respuestas concuerdan con sus figuras; los grupos 3 y 4: no dan respuesta al reactivo, ellos levantaron histogramas y estos se utilizan para representar gráficamente los datos de una variable continua que han sido agrupados en intervalos.

Conclusiones

El estudio mostró las dificultades (al realizar tanto en los ejes y gráficas cartesianas, como también para lograr modelar el fenómeno dado a través de la figuración) de la mayoría de los estudiantes a los cuales se les tomó la secuencia de experimentación, dilucidando las falencias en el aprendizaje de los contenidos previos que requerían, como por ejemplo las convenciones sobre las gráficas cartesianas, obteniendo así un obstáculo de comunicación entre el sujeto y el experimento. Esto instó al desarrollo de un rediseño de la secuencia, el cual pretende trabajar la modelación del modelo figural, y que esta funcione como herramienta para visualizar aspectos matemáticos que se están trabajando, potenciando el entendimiento, el sentido y la construcción de significados para los conceptos y herramientas matemáticas. Se espera también que la aplicación de la nueva secuencia desarrolle la habilidad de modelación en los estudiantes utilizando la modelación gráfica con base en herramientas, procedimientos y argumentos. Además tomando en cuenta las bases curriculares chilenas sobre la importancia de la modelación se instó a elaborar una estrategia de evaluación auténtica, la cual está guiada por la ponencia propuesta por Cámara y Nardoni (CIAEM 2011) la cual consta de una ficha de aprendizajes, la cual se elaboró en torno a la incomprensión de algunas dificultades, falencias y obstáculos de los estudiantes al realizar la secuencia de experimentación, esta ficha se compone de tres simples preguntas, con las cuales concluimos esta primera etapa de nuestra investigación, que son: ¿qué aprendí en esta actividad?, ¿cómo me sentí trabajando en esta actividad?, ¿cómo le explicaría a un compañero lo que vi en él?.

Referencias

Arrieta y Díaz (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,18 (1), 19-48.

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis de Doctorado no publicada. México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Biembengut, M. S. (2011). Concepções e Tendências de Modelagem Matemática na Educação Brasileira. Cuadernos de investigación y Formación Matemática. Costa Rica, ano 7, n. 10, p. 195-204, 2012. (Artigo apresentado em forma de conferência na XIII CIAEM, Jun. 2011, Recife.)

Blomhøj, M. y Højgaard Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. Teaching mathematics and its applications, 22 (3), 123-139.

Cámara, V., y Nardoni, M. (2011). Evaluación auténtica: el portafolio en Matemática. XIII Conferencia Iteramericana de Educación Matemática, CIAEM XIII. Recife, Brasil.

Carrasco, E., Leonora, D, y Gabriela, B. (2014). Figuración de lo que varía. Revista enseñanza de las ciencias, 32 (3), 365-384.

Cordero, F., y Suarez, L. (2008). Modelación-Graficación. Una categoría en cálculo para resinificar la variación en una situación de modelación de movimiento. Paper of the Topic Study Group, TSG 16: Research and development in the teaching and learning of calculus. http://tsg.icme11.org/document/get/672

Educarchile. (2014). Recuperado el 15 de Julio de 2014, de http://ww2.educarchile.cl/portal.herramientas/sitios_educativos/planificador/sist_evaluacion.htm#kp

Educarchile. (2014). Recuperado el 15 de Julio de 2014, de http://www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?ID=9765

González, D., Rodríguez, P., y Díaz, L. (2014). Modelando lo cuadrático desde el entorno hacia la escuela. 2. Reunión Latinoaméricana de Matemática Educativa 28. Barranquilla, Colombia.

Ministerio de educacion. (2014). Recuperado el 14 de Julio de 2014, de http://mineduc.cl

RAE. (2014). Recuperado el 15 de Julio de 2014, de http://www.rae.es

Actividades asociadas a la construcción objeto conjunto solución de una ecuación lineal homogénea desde la Teoría Apoe

Miguel Alejandro Rodríguez Jara; Marcela Parraguez
Universidad de Playa Ancha; Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
mrodriguez@upla.cl, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen

Se presentan algunas actividades en el marco del diseño y validación de un modelo teórico denominado descomposición genética, (DG), en la cual se explicitan las construcciones los mecanismos mentales que permiten a un estudiante universitario construir un fragmento de conocimiento matemático. En particular se presenta una DG para la construcción objeto conjunto solución. El marco teórico que sustenta esta investigación –la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema)– permite poner en sintonía, los ingredientes cognitivos que se desprenden de dicho análisis, además de proveer elementos para interpretar y organizar los aspectos matemáticos que se pesquisaron.

Introducción

En este apartado se da a conocer, a modo de ejemplo, un conjunto de tareas y actividades matemáticas que se han articulado para configurar un diseño de situaciones que esté en sintonía con la construcción cognitiva de un concepto matemático, en el sentido de la teoría APOE (Arnon et al., 2014). Es decir, promover construcciones y mecanismos mentales, en términos de la teoría APOE, para la construcción de un concepto matemático. En este caso particular, el concepto conjunto solución de una ecuación lineal homogénea (CSELH).

Estas actividades y tareas matemáticas se han pensado para ser incluirlas en el ciclo de enseñanza que propone la teoría APOE, a saber el ciclo ACE (Actividades, Discusión en Clase y Ejercicios) (Arnon et al., 2014), las cuales están enfocadas al trabajo de una Ecuación Lineal Homogénea (ELH) para poner de manifiesto aquellas construcciones y mecanismos mentales que están asociadas a la construcción objeto CSELH. Dichas actividades emergen en el marco del trabajo de Rodríguez & Parraguez (2013), asociado al diseño y validación de Descomposiciones Genéticas (DG) para la construcción de los conceptos espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, desde la teoría APOE.

Marco Teórico: La Teoría APOE

Considerando que nuestro objetivo es proponer tareas y actividades para un diseño de situaciones en sintonía con la construcción de un concepto matemático, el marco teórico que guía esta puesta en escena, es la teoría APOE. Esta teoría trata acerca de la construcción del conocimiento matemático y su desarrollo en el individuo, Dubinsky quien propone esta teoría y la ha desarrollado junto al grupo RUMEC, manifiesta lo siguiente:

> "El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas a fin de manejar las situaciones" (Dubinsky, 1996, p. 24-41)

Si analizamos en detalle la cita anterior podemos apreciar algunos elementos que están involucrados en la comprensión de un concepto matemático. A saber las estructuras mentales: acciones, procesos, objetos y esquemas y, además, tipos de abstracción reflexiva, (desde la perspectiva piagetana) que la teoría llama mecanismos mentales: interiorización, coordinación, inversión y encapsulación, las cuales se articulan con las construcciones mentales. En la figura 1 se puede observar la relación entre las construcciones y los mecanismos que se han mencionado.

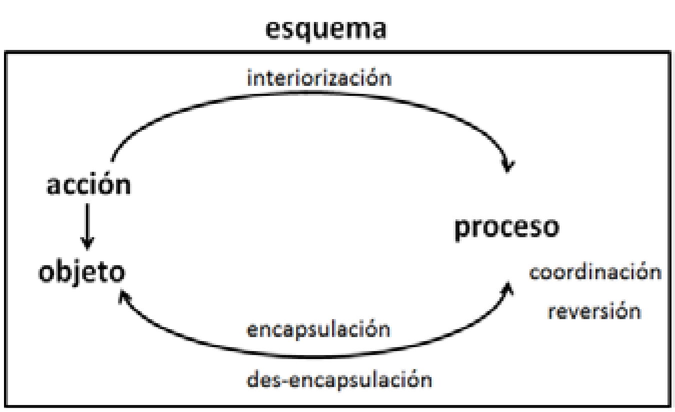


Figura 1: Construcciones y Mecanismos (Asiala et al., 1996) en (Arnon et al., 2014).

En referencia a lo que se mencionará en el resto del escrito se presenta, en el diagrama de la figura 2, una DG preliminar para la construcción del concepto CSELH. Además, en función de dicha DG, se dará cuenta de un diseño de situaciones haciendo conexión con las construcciones y mecanismos que se explicitan desde el diagrama.

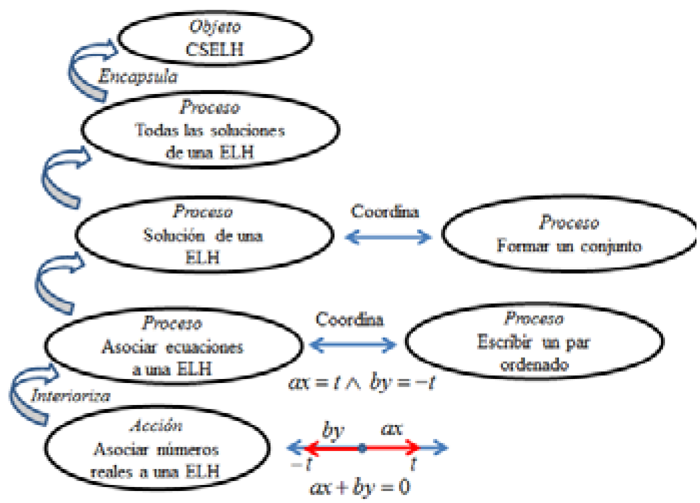


Figura 2: DG preliminar para la construcción del CSELH

Asignar números reales a una ELH para obtener una solución de ésta.

Sin perder generalidad, centremos la atención en una ELH de dos incógnitas para dar cuenta de algunos procedimientos los estudiantes pueden manifestar a la hora de pedirles que obtengan una solución de una ELH o bien escriban el respectivo CSELH.

En el sentido de lo que ya se ha indicado se puede esperar, por ejemplo, lo siguiente:

a) Se asigne un par de números reales, uno el inverso aditivo del otro, a los términos de una ELH, para luego obtener un par de números reales o un par ordenado como solución de la ELH. Por ejemplo: Dada la ecuación $2x+3y=0$ se pueden asignar los números reales 1 y -1 a los términos de la ELH como sigue: $2x=-1 \wedge 3y=1$

y luego establecer que $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ es una solución de la ELH.

b) Se asigne un número real a una de las incógnitas de una ELH para obtener otro número real asociado a la otra incógnita y así considerar un par de números reales o un par ordenado como la solución de la ELH.

c) Expresar una de las incógnitas en función de la otra y luego asignar un número real a la variable independiente, para luego escribir un par de números reales o un par ordenado como solución de una ELH.

En la figura 2, se presenta parte de la respuesta de un estudiante a la solicitud de determinar una solución de la ELH 3x + 2y = 0.

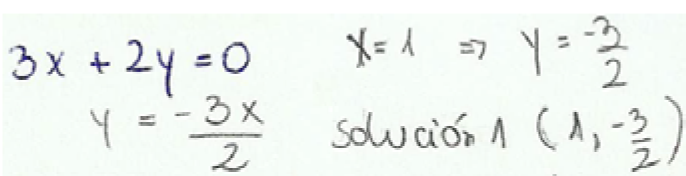
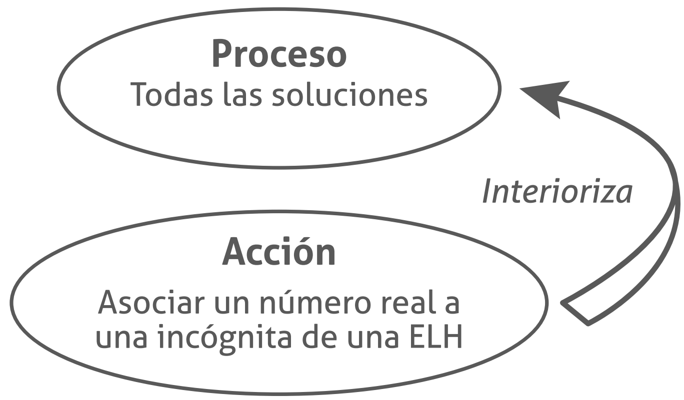


Figura 2: Respuesta de un estudiante para obtener una solución de la ELH 3x + 2y = 0.

Si nos abocamos a hacer un breve análisis del procedimiento dado en b) pensando en la *construcción proceso* todas las soluciones, podríamos considerar que la *acción* asociar un número real puede ser un punto de partida, cognitivamente hablando, para promover dicha *construcción proceso*. Donde la tarea asignar un número real a una de las incógnitas de una ELH, puede formar parte de la actividad obtener una solución de una ELH.

En la figura 3, se pone de relieve la relación entre la tarea y las construcciones y mecanismos mentales que se persigue.



Para la ecuación $3x+2y=0$, si consideramos que $x=t$, se puede establecer que $y=\frac{-3}{2}t$. Así $\left(t, \frac{-3}{2}t\right)$ es el par ordenado que representa a todas las soluciones de la ELH $3x+2y=0$.

Figura 3: Respuesta de un estudiante para obtener una solución de la ELH $3x+2y=0$.

Por otro lado, si nos remitimos a la tarea de la tabla 1, asignar un par de números reales a los términos de una ELH en el marco de la actividad obtener una solución de una ELH, esta puede ser considerada como un punto de partida para que un estudiante de paso a la construcción cognitiva del CSELH.

Tabla 1: Procedimiento para obtener soluciones de una ELH.

Ecuación lineal homogénea: $3x + 5y=0$
Consideremos un par de números reales, uno el inverso aditivo del otro. Para simplicidad en los cálculos consideremos 4 y -4. Luego la ecuación lineal homogénea se puede descomponer de la siguiente manera:
i) $3x=4 \wedge 5y=-4 \Rightarrow x=\frac{4}{3} \wedge y=\frac{-4}{5}$
ii) $3x=-4 \wedge 5y=4 \Rightarrow x=\frac{-4}{3} \wedge y=\frac{4}{5}$
Donde, $\left(\frac{4}{3}, \frac{-4}{5}\right)$ y $\left(\frac{-4}{3}, \frac{4}{5}\right)$ son dos elementos del conjunto solución de la ELH: $S=\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,/\, 3x+5y=0\}$

La *acción,* asociar un par de números reales a los términos de una ELH de dos incógnitas está en sintonía con el procedimiento que se describe en la tabla 1, el que a su vez permite obtener dos soluciones de una ELH al asignar un par de inversos aditivos a los términos de una ELH.

Por otro lado, como se aprecia en la figura 4, la *acción* asociar un par de números reales a los términos de una ELH, de dos incógnitas, se *interioriza* en un proceso, separar una ELH en dos ecuaciones. Relacionar, a través de un conectivo lógico las dos ecuaciones que se asocian a una ELH, actúa como *mecanismo* de *interiorización.* Así, la tarea asignar un par de números reales a los términos de una ELH de dos incógnitas permite inducir una *acción* que dará paso, gradualmente, a la *construcción* objeto CSELH.

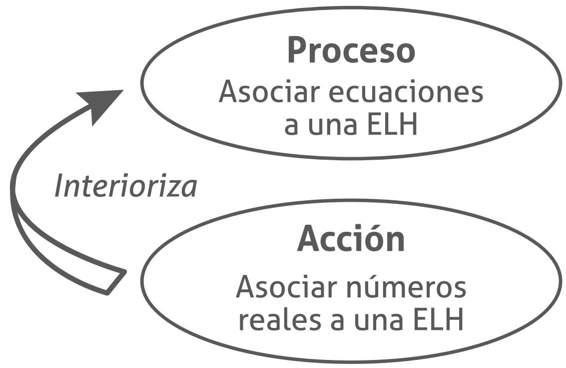


Figura 4: La interiorización de una acción en proceso.

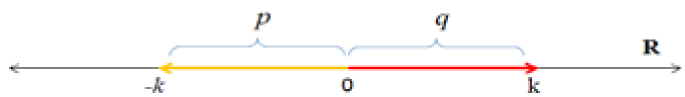
Representar geométricamente una solución de una ELH en la recta real desde un concepto de la física.

Pensemos en una segunda actividad, para ello convengamos en que dos "segmentos dirigidos" con un origen común representan geométricamente a dos fuerzas que actúan en una misma dirección para determinar una fuerza resultante asociada a un tercer segmento dirigido, donde los extremos de dichos segmentos dirigidos se asocian a números reales en una recta real.

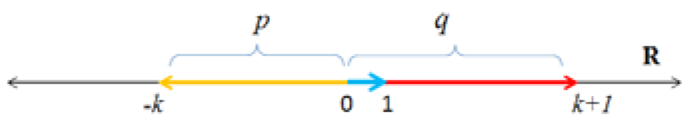
Lo anterior permite plantear una primera tarea, representar geométricamente una ELH y una ELNH entendidas como la interacción de dos fuerzas asociadas a "segmentos dirigidos" en una recta real de un plano geométrico. Así, por ejemplo, dada la ELH ***p+q=0*** y la ecuación ***p+q=1***, éstas pueden representarse como se aprecia en la tabla 2.

Tabla 2: Interpretación geométrica de las soluciones de una ELH o una ELNH de dos incógnitas.

La ecuación ***p+q=0*** se asocia a dos segmentos dirigidos, cuyos extremos están asociados a un par de números inversos aditivos, determinando un segmento dirigido resultante, el segmento nulo, cuyo extremo se asocia al número real 0.



La ecuación ***p+q=1*** se asocia a dos segmentos dirigidos, asociados a dos números reales en sentido apuesto, cuyo segmento resultante se asocia al número real 1.



En primer lugar, notar que desde esta representación gráfica para estas dos ELH's particulares, como se aprecia en la Tabla III, se puede inducir que hay una cantidad no finita de pares de números reales, así como de pares de segmentos dirigidos, que son soluciones para estas ELH's, como pares de inversos aditivos tiene asociado el grupo **(R,+)** para el caso ***p+q=0***. Además, el sentido de los segmentos dirigidos ***p*** y ***q*** en la recta real es arbitrario. Por otro lado, la ELNH ***p+q=1*** tiene asociado un segmento dirigido resultante no nulo y además un número no finito de pares de soluciones.

¿Qué podemos decir de la representación geométrica de las ELH's ***p+q=0***, ***p-q=1*** y ***p-q=-1***?

Consideremos ahora la ELH ***2a+3b=0***. Si pensamos en su representación gráfica, como se ilustra en la figura 5, considerando dos números reales, 6 y - 6, es posible que se piense en lo siguiente:

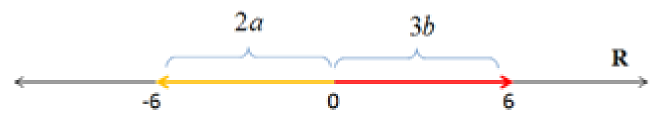


Figura 5: Representación gráfica de una ELH

Lo que además puede llevar, como se aprecia en la figura 6, a determinar geométricamente segmentos dirigidos que se asocian a las incógnitas de una ELH. Lo anterior pone de relieve la relación entre segmentos dirigidos, dando pie a la idea de dilatación o contracción. Desde aquí se puede avanzar a la idea de la acción de un cuerpo sobre un grupo.

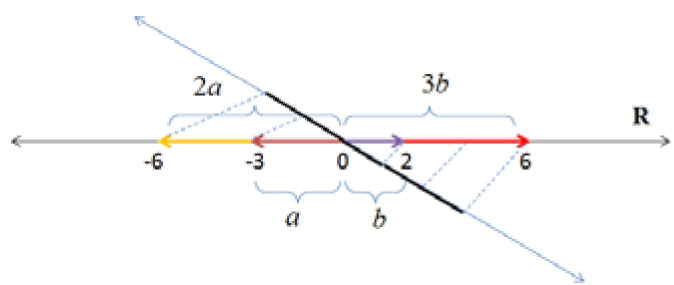


Figura 6: Determinación geométrica de una solución de una ELH

La acción asignar orden a las cantidades de las incógnitas de una ELH en función de la relación de las variables, independiente y dependiente, se interioriza en proceso, solución de una ELH, donde relacionar un par ordenado con el par de cantidades que se asocian a las variables de la ELH actúa como mecanismo de interiorización.

El *proceso* descomponer una ELH se *coordina* con el *proceso* solución de una ELH para obtener el *proceso* todas las soluciones, donde asignar un parámetro a los términos de la ELH actúa como mecanismo de *coordinación*. Luego, la *acción* formar un conjunto con todas las soluciones interioriza en el proceso conjunto de todas las soluciones, donde el asociar cuantificador universal a un parámetro actúa como mecanismo de interiorización. Dicho proceso se encapsula en el objeto CSELH donde relacionar todas las soluciones del CSELH con todas las soluciones del conjunto solución de una ecuación lineal no homogénea (CSELNH), actúa como *mecanismo* de *encapsulación*. En la figura 7 se presentan algunos aspectos matemáticos en sintonía con lo descrito para la construcción objeto CSELH.

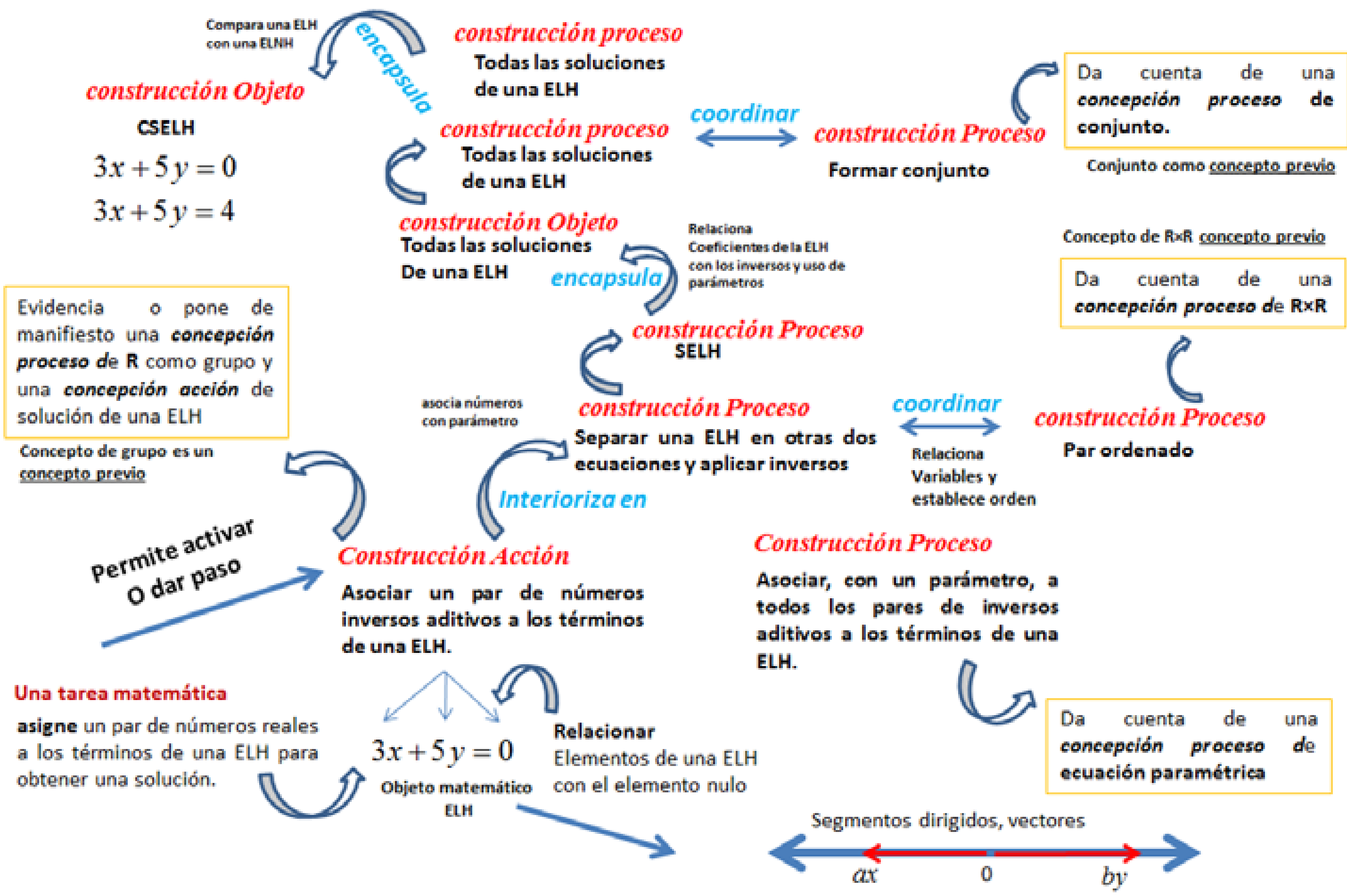


Figura 7: Algunos aspectos matemáticos en sintonía con las construcciones y mecanismos mentales

Una vez identificadas y definidas un conjunto de tareas como, por ejemplo: asignar números reales a los términos de una ELH, asignar un número real a uno de las incógnitas de una ELH o una ELNH, desde las distintas actividades que se pueden promover: obtener soluciones de una ELH y una ELNH, trasformar una ELNH en una ELH, obtener todas las soluciones de una ELH o una ELNH, en función de una DG. Se puede avanzar en la elaboración de fichas didácticas (Rodríguez, 2006, para organizar las tareas y actividades según el tipo de ficha; las cuales pueden ser incorporadas al ciclo de enseñanza ACE que propone la teoría APOE (Arnon et al., 2014).

Referencias

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). APOS Theory. New York: Springer.

Asiala, M., Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education 6, 1-32.

Castillo, L.; Gallardo, A. (1996). Pragmática de los lenguajes químico y algebraico en el ámbito escolar. Educación Matemática. 8(2), 41-56.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. Educación Matemática. 8(3), 25 – 41.

Rodríguez, M. (2006). Sobre la Enseñanza de Conceptos matemáticos: Una reflexión pedagógica. Revista Chilena de Educación Matemática RECHIEM, 2(1), 61-78.

Rodríguez, M., Parraguez, M. (2013). Un reporte de investigación: construcción cognitiva de los espacios vectoriales R2 y R3 desde la teoría APOE. En R. Flores (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, 573-582. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Construcciones mentales para el uso de conceptos básicos del álgebra lineal

Marcela Parraguez González, Raúl Jiménez Alarcón
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Universidad Católica del Norte, Chile
marcela.parraguez@ucv.cl, rjimen@ucn.cl

Resumen

En el marco del proyecto FONDECYT Nº 1140801 titulado: CONSTRUCCIONES y MECANISMOS MENTALES PARA EL USO DE LOS CONCEPTOS BÁSICOS DEL ÁLGEBRA LINEAL se propuso investigar desde una postura cognitiva el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos básicos del Álgebra lineal, en estudiantes universitarios; utilizando como marco teórico la TEORÍA APOE, desarrollada por Dubinsky y sus colaboradores. En esta primera fase de la investigación reportamos cómo los estudiantes universitarios hacen evolucionar su esquema de tres conceptos básicos del Álgebra Lineal (espacio vectorial, combinación lineal y transformación lineal) a través de su uso.

Introducción

En el marco del proyecto FONDECYT Nº 1140801 titulado: CONSTRUCCIONES y MECANISMOS MENTALES PARA EL USO DE LOS CONCEPTOS BÁSICOS DEL ÁLGEBRA LINEAL (AL) se propone investigar desde una postura cognitiva el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos básicos del AL en estudiantes universitarios; utilizando como marco teórico la TEORÍA APOE, desarrollada por Dubinsky y sus colaboradores (Arnon, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014). En esta primera etapa de la investigación analizamos cómo los estudiantes universitarios construyen, los conceptos de espacio vectorial, combinación lineal y Transformación lineal. El proceso investigativo desde la teoría APOE conlleva el tener en cuenta un modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir un concepto matemático, llamado Descomposición Genética (Dubinsky, 1991) que es el resultado de la aplicación del ciclo de investigación propuesta por dicha teoría (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews, Thomas, 1996). Las descomposiciones genéticas que se han diseñado para tres conceptos básicos del AL, espacio vectorial (Parraguez & Oktaç, 2012), combinación lineal (Parraguez, 2011; Parraguez & Uzuriaga, 2014) y transformación lineal (Maturana & Parraguez, 2014), han seguido la metodología que nos provee la teoría APOE, poniendo de relieve las construcciones mentales (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) y mecanismos mentales (Interiorización Coordinación, Encapsulación, Desencapsulación y Asimilación) que los estudiantes ponen en práctica en la (re) construcción que hacen de estos tres conceptos básicos del AL. Los resultados que se derivan de estas tres últimas investigaciones, están relacionados, por un lado con el rol que juega la generalización de vector nulo en la evolución del esquema espacio vectorial (Parraguez & Oktaç, 2012), y por otro lado, con la posibilidad que los estudiantes trabajen los espacios vectoriales con operaciones diferentes a las usuales; contribuyendo ambos a consolidar la coherencia del esquema espacio vectorial, mostrada a través de los conceptos y propiedades relacionadas con el espacio vectorial (Parraguez, 2013).

Elementos de diagnóstico de la situación que se pretende abordar.

Actualmente existe una gran cantidad de enfoques para impartir los cursos de AL en las universidades, estos tienden a enriquecerse conforme las nuevas tecnologías se incorporan a la enseñanza y se desarrollan paquetes computacionales cada vez más potentes y apropiados en lo que se refiere al cálculo y la graficación. Sin embargo, independientemente de los debates suscitados recientemente, véase por ejemplo, Carlson, Johnson, Lay, Porter, Watkins, y Watkins (1997) sobre el enfoque que debiera darse a un primer curso de AL, la teoría de espacios vectoriales sigue siendo un tema central en estos cursos, y según Dubinsky (1997, p. 93) las dificultades de los estudiantes con los conceptos de espacio vectorial, combinación lineal y transformación lineal, cuyos contenidos son propios de un curso inicial de AL, y que aquí se llamarán simplemente conceptos básicos ligados a la teoría del AL, provienen de tres fuentes:

- El papel pasivo, imitador, asignado al estudiante en los cursos de AL. (Dubinsky, 1997, p. 93).

- La falta de comprensión de algunos conceptos que resultan un antecedente indispensable para entender las nociones básicas referidas; tal es el caso del concepto de función y los cuantificadores.

- Ausencia de estrategias didácticas que den a los estudiantes la oportunidad de construir sus propios conceptos. La elaboración de estas estrategias debiera iniciar por analizar las construcciones mentales específicas que pueden usarse para entender un determinado concepto.

De hecho, el núcleo de este reporte se relaciona mucho con los tres puntos anteriores.

La enseñanza aprendizaje del AL.

La literatura en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje del AL es, comparativamente, menor que en otras áreas de la Matemática, y es inevitable coincidir con Asiala, Dubinsky, Mathews, Morics y Oktaç (1997) que hay trabajos relacionados ya sea con la comprensión de diversos aspectos de estas materias o bien propuestas para su enseñanza, pero son muy escasos los dedicados a la enseñanza explícitamente vinculados con la investigación. Los estudios del grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) acerca del AL son una excepción, pero no ofrecen, propiamente, descomponer genéticamente los conceptos básicos ligados al AL.

Teoría APOE.

La teoría APOE –Acción, Proceso, Objeto, Esquema– toma como base la epistemología genética de Piaget. Según Kú, Trigueros y Oktaç (2008), esta teoría nace al estudiar el mecanismo de entendimiento de la Abstracción Reflexiva piagetiana, que se refiere a la reflexión sobre las acciones y procesos que se efectúan desde un objeto de conocimiento. Desde el punto de vista de la teoría APOE la construcción del conocimiento pasa por tres etapas básicas, acciones, procesos y objetos, las cuales no necesariamente son secuenciales. El esquema, "es el nivel de mayor elaboración en la comprensión de un concepto matemático y está relacionado de manera coherente en la mente del estudiante." (Asiala et al., 1996, p. 12). Cuando un sujeto se encuentra frente a un problema específico en el ámbito de las matemáticas, evoca un esquema para tratarlo. Al hacerlo, pone en juego aquellos conceptos de los que dispone en ese momento y utiliza relaciones entre esos conceptos.

A lo largo de todo este reporte, vamos a considerar un ESQUEMA como una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas, previamente construidos, que son coordinados y sintetizados por el individuo para formar estructuras utilizadas en la resolución de problemas matemáticos y que muestran la coherencia del esquema (o sea niveles de desarrollo) al discernir cuando el esquema es aplicable o no. De esta manera, el desarrollo cognitivo de un esquema en la mente de un individuo se caracteriza a través de los niveles intra, inter trans por el tipo de las relaciones y transformaciones que los estudiantes son capaces de establecer entre construcciones particulares que evocan dentro del esquema, cuando resuelven un problema.

Desde estas caracterizaciones generales, un indicador del desarrollo del esquema en la mente de un individuo es el tipo de relaciones y el tipo de transformaciones que los estudiantes son capaces de establecer entre los estados de construcciones de conceptos matemáticos particulares, que evocan dentro del esquema cuando resuelven problemas. La forma en que los estudiantes establecen relaciones y transformaciones entre los diferentes estados de construcciones mentales de conceptos particulares dentro del esquema, cuando están resolviendo un problema matemático, puede ser vista como la forma en que los estudiantes reorganizan y reconstruyen –USAN– los conceptos básicos del AL, para formar nuevos estados de construcción de éstos. De esta manera el desarrollo de un esquema viene determinado por el tipo de organización, a partir de relaciones lógicas y síntesis constituidas dentro de la axiomática del AL, que el resolutor de un problema precisa para su resolución. Así los niveles de desarrollo del esquema de los "conceptos básicos del AL" en la mente de un estudiante los caracterizaremos como:

- ***Nivel INTRA de los Conceptos básicos del AL:*** no se establecen organizaciones a partir de relaciones lógicas o síntesis constituidas dentro de la axiomática del AL y los posibles esbozos de relación (del tipo conjunción lógica) se realizarán con errores. Los estudiantes usan los conceptos básicos del AL en forma aislada (por ejemplo: para cierto tipo de Espacios Vectoriales), y no como un cuerpo de conocimiento.

- ***Nivel INTER de los Conceptos básicos del AL:*** Los estudiantes establecen organizaciones a partir de relaciones lógicas (o alternativas) entre los estados de construcción del esquema de conceptos básicos del AL, pero con limitaciones, predominando el uso de la conjunción lógica, en elementos del AL que le son familiares. El estudiante es capaz de usar más conceptos básicos del AL de forma correcta que en el nivel anterior.

- ***Nivel TRANS de los Conceptos básicos del AL:*** Aumenta el repertorio de las relaciones lógicas (y lógica, contrarrecíproco, absurdo, y equivalencia lógica) que el estudiante es capaz de establecer entre los diferentes estados de construcción del esquema conceptos básicos del AL. En este nivel se produce la síntesis de los modos de rotular cuestiones relativas a los conceptos básicos del AL y lo lleva a la construcción de un cuerpo de conocimiento unificado.

La síntesis se aplica a situaciones en las que hay que considerar conjuntamente cuestiones del AL que pertenecen a una misma familia o categoría. Por ejemplo: a veces un vector es una flecha, otras veces un par ordenado, otras una matriz, otra un polinomio, etc.; para obtener una información que no se conocía. Considerar la información conjuntamente lo entendemos como establecer algún tipo de relación lógica (o síntesis) para tomar decisión relativa a la situación en la que el estudiante se encuentra.

Por tanto, desde esta perspectiva el tipo de relaciones diferentes entre los estados de construcción de los conceptos básicos del AL que los estudiantes establecen durante la resolución de un problema puede ser considerado un indicador del nivel de desarrollo mental del esquema que hemos llamado de los conceptos básicos del AL.

El objetivo en esta parte de la investigación es identificar el tipo de relaciones lógicas establecidas entre los elementos matemáticos del AL que los estudiantes usan cuando resuelven un problema, para así caracterizar el proceso de desarrollo del esquema concepto básicos del AL.

La hipótesis sobre la cual se apoya este objetivo es que las relaciones entre los elementos matemáticos del AL que los estudiantes (de nuestros casos de estudio) son capaces de establecer durante la resolución de un problema, pueden ser consideradas como las construcciones o mecanismos mentales en el sentido de APOE, que apoyan la construcción del conocimiento.

Metodología.

En esta primera etapa se trabajó con un caso de estudio, constituido por 10 estudiantes (sean estos de Licenciatura o Pedagogía en Matemática), atendiendo a criterios de selección: (haber cursado AL, buen rendimiento académico, accesibilidad de los investigadores). Los estudiantes fueron etiquetados como E1, E2, ..., E10.

Instrumento de Recogida de datos.

En la fase que reportamos se aplicó un cuestionario de 11 preguntas, del tipo lápiz y papel. La idea es que la demanda del problema propuesto al resolutor sea tal, que podamos caracterizar la evolución del esquema de estos los conceptos básicos del AL.

Análisis de las respuestas al cuestionario.

Hemos seleccionado una pregunta del

cuestionario que se aplicó a los estudiantes, para mostrar en este reporte su análisis desde la triada Intra-conceptos básicos del AL, Inter- conceptos básicos del AL y Trans-conceptos básicos del AL.

Pregunta 8 del Cuestionario.

Sea $V = \{(x,y,z) \in R^3 \,/\, x,y,z > 0\}$ un espacio vectorial con las operaciones:

SUMA: $u \oplus v = (xa, yb, zc)$ con $u = (x,y,z), v = (a,b,c)$ en V

PONDERACIÓN: $\lambda \square u = (x^\lambda, y^\lambda, z^\lambda)$ con $u = (x,y,z) \in V$ y $\lambda \in R$

Sea W el subespacio de todos los puntos de V situados sobre el plano $z = 1$.

8.1 ¿Los vectores $(2,2,1)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ de W son linealmente independientes?

8.2 ¿El conjunto $\left\{(3,3,1), \left(\frac{1}{3}, 3, 1\right)\right\}$ es una base para W?

Al evocar el esquema de conceptos básicos del AL en un nivel Inter, los estudiantes establecen relaciones entre el objeto espacio vectorial, conjuntos linealmente independientes (li) y base, con operaciones suma y ponderación diferente de las usuales. Veamos las relaciones que estableció el E5 al enfrentar la pregunta 8, en particular se resalta la pregunta 8.2, en la cual aplica adecuadamente las definiciones de las operaciones suma y ponderación, de combinación lineal, de linealmente independiente/dependiente y base, al demostrar que el conjunto $\left\{(3,3,1), \left(\frac{1}{3}, 3, 1\right)\right\}$ es una base para W.

El E5 primero prueba que el conjunto es li (Figura 1):

Y después (Figura 2) chequea que el conjunto $\left\{(3,3,1), \left(\frac{1}{3}, 3, 1\right)\right\}$ genera a W: genera a W:

Figura 1: E5 mostrando que un conjunto es li.

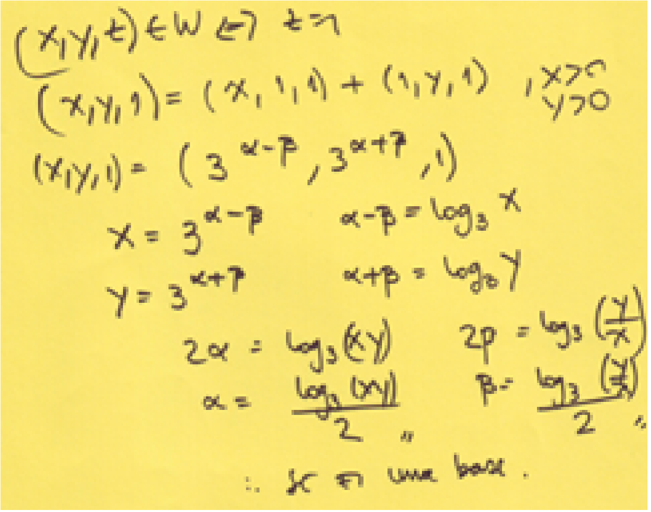


Figura 2: E5 mostrando que un conjunto que genera y es li, es base.

En tal caso, E8 y E5 no fueron los únicos estudiantes que mostraron estar en este nivel de esquema, también encontramos al E3, que también mostró evidencias de relaciones entre sus construcciones: objeto de espacio vectorial y base, al resolver la pregunta 8.2 del cuestionario. E3 comienza diciendo que la **dim(*W*)=2** , por lo que sólo le resta probar que el conjunto $\left\{(3,3,1),\left(\frac{1}{3},3,1\right)\right\}$ sea linealmente independiente, (Figura 3):

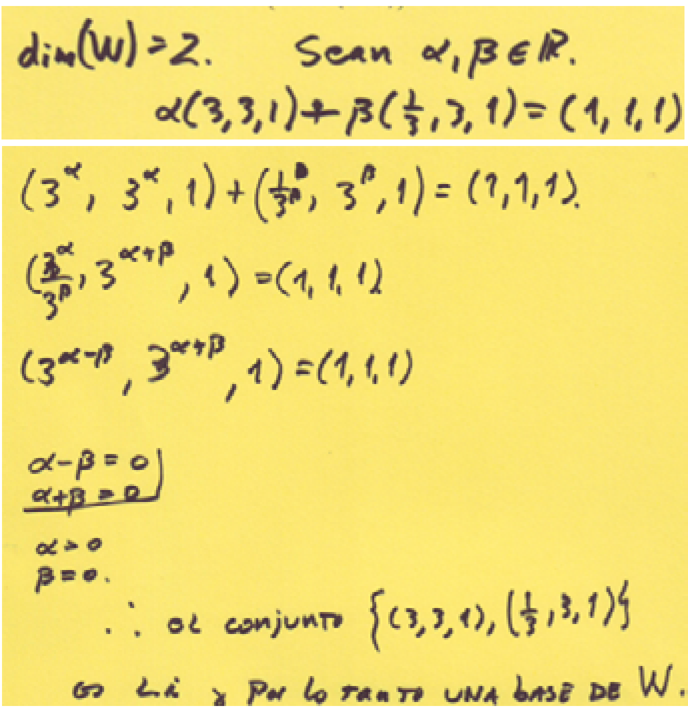


Figura 3: E3 mostrando que un conjunto es base, a través de la dimensión.

Reflexiones finales.

En esta primera etapa de desarrollo del proyecto podemos señalar que ante un problema, por ejemplo de base de un Espacio Vectorial emergen subproblemas, de linealmente independiente/ linealmnte dependiente, espacio generador, dimensión, entre otros; que si no son evocados en el esquema conceptos básicos del AL por el resolutor, no se puede abordar con éxito el problema.

Los resultados obtenidos hasta ahora indican que el desarrollo del esquema de espacio vectorial y conjuntos linealmente independiente están vinculados a la capacidad de los estudiantes de relacionar elementos constitutivos del concepto durante la resolución de problemas. Los resultados preliminares hasta ahora obtenidos, indican que es necesario llevar a cabo más investigación, para ello se sugieren entrevistas a los estudiantes, para profundizar en su razonamiento y poder con ello tener más evidencia que sustente cómo evolucionan sus esquemas de los conceptos básicos del AL cuando están en uso a través de la resolución de un problema.

Referencias

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. New York: Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, II. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1-32.

Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Morics, S. & Oktaç, A. (1997). Development of students. understanding of cosets, normality, and quotient groups. Journal of Mathematical Behavior 16 (3), 241-309.

Carlson, D.; Johnson, C. R.; Lay, D. C.; Porter, A. D.; Watkins, A. E. y Watkins, W. (Eds.). (1997). Resources for Teaching Linear Algebra. MAA Notes, 42.

Dubinsky, E. (1997). Some Thoughts on a First Linear Algebra Course, in D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, *R.D. Porter, A. Watkins, y W. Watkins, (Eds). Resources For Teaching Linear Algebra, MAA Notes, 42, pp. 85-106.*

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed), Advanced Mathematical Thinking, 95-123. Dordrecht: Kluwer.

Kú, D., Trigueros, M. & Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. Educación Matemática, 20(2), 65-89.

Maturana, I. & Parraguez, M. (2014). Construcciones y Mecanismos Mentales para el Aprendizaje de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal. En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27, 771-778. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Parraguez, M. & Uzuriaga, V. (2014). Construcción y uso del concepto combinación lineal de vectores. Revista Scientia et Technica Año XIX, 19(3), 329-334.

Parraguez, M. (2013). El rol del cuerpo en la construcción del concepto espacio vectorial. Educación Matemática, 25(1), 133-154.

Parraguez M. & Oktaç A. (2012). Desarrollo de un esquema del concepto espacio vectorial. Revista del Centro de Investigaciones Educacionales PARADIGMA, 33(1), 163-192.

Parraguez, M. (2011). Comprensión del concepto combinación lineal de vectores desde el punto de vista de la teoría APOE. En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24, 263-272. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Concepciones presentes sobre la factorización en estudiantes de 15 a 16 años

Alberto Leyton Cerda; Cecilia Rojas Pardo
Universidad Alberto Hurtado, Chile
leytonalberto@gmail.com; cerojas@uahurtado.cl

Resumen

Debido a la constante utilización de la factorización, en cada uno de los niveles de enseñanza media, ya sea dentro del plan común de matemática u otro electivo, es que los jóvenes van desarrollando ideas propias con respecto al concepto. Tales nociones asociadas a la factorización, son exteriorizadas por parte de ellos y al desarrollar problemas algebraicos y que requieren el manejo de polinomios cuadráticos, es que surge el objeto de este reporte, que actualmente se encuentra en desarrollo, para indagar respecto a los esquemas que han construido estudiantes de tercer año de enseñanza media durante sus años de estudios, determinando así, sus concepciones en torno a la factorización, en particular de polinomios cuadráticos. Se utiliza, como referente la teoría de los campos conceptuales, debido a que desde esta teoría psicológica cognitivista se podrá estudiar las "continuidades y rupturas entre conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual" (Vergnaud, 1990, Citado en Moreira, 2002, p. 2), mediante el análisis de las producciones al resolver una serie de actividades, las cuales justificarán mediante una entrevista, permitiendo entender el proceso realizado en la construcción de sus esquemas del concepto en juego, considerando los teoremas en acto evidenciados durante su trabajo y el sentido que adquiere la factorización para dicha persona.

Introducción

En la educación chilena actual, muchas veces nos encontramos con actividades que no refuerzan la asimilación y acomodación de los esquemas presentes en los estudiantes. De esta forma el reconocimiento de los elementos que deben poner en juego se ve perjudicado por una visión mecanicista de la factorización, originándose dificultades para analizar y desarrollar los problemas planteados.

Es así, como dentro de las clases de aula podemos apreciar un modelo de enseñanza, que deja de lado la construcción del objeto por parte del estudiante y se centra en que aprendan una determinada estrategia de resolución, reduciendo el objeto a un procedimiento y limitando su comprensión, esperando contradictoriamente que este pueda extender lo aprendido en unidades posteriores durante los siguientes años de enseñanza media, en especial en tercero medio donde deben retomar las ideas que posee de factorización en años anteriores y aplicarlas tanto en el plan común de matemática como en el electivo, como en la unidad de lugares geométricos, momento en que este objeto sirve de herramienta para la interpretación de nuevos objetos, pero que, debido a problemas originados en la conceptualización de la factorización de polinomios en los años anteriores de escolaridad, dificultan el entendimiento de éstos.

Por lo anteriormente expuesto, es que nos centraremos en analizar los esquemas que construye y que ha desarrollado el estudiante desde primero medio hasta tercero medio, considerando este último nivel como objeto de investigación debido a las reiteradas ocasiones en que retoma este concepto presentando dificultades en su desarrollo.

Otro aspecto que debemos señalar es que existen variadas investigaciones con respecto a la factorización, la gran mayoría se centran en propuestas de enseñanza y en las dificultades asociadas, como lo realizado por Mejía (2004) y Ballén (2012), no considerando los esquemas y representaciones establecidas por los alumnos, factor que sí es abordado desde la Teoría de Campos Conceptuales, que servirá de marco referencial a esta investigación, debido a que esta perspectiva nos proporciona un sustento teórico sobre las actividades cognitivas relacionadas en el estudio de la factorización de trinomios cuadráticos, permitiendo de este modo el análisis de los conocimientos que el estudiante pone en juego en función de los invariantes operatorios, determinando además la forma en que organizan las nociones asociadas a la factorización y si esta es única, como lo evidenciado por Delgado, Arrieta y Meleán (2013), al estudiar estos aspectos en la construcción del aprendizaje por parte del estudiante, las evidencias producto de esta investigación, servirán de antecedente tanto para el refinamiento de propuestas didácticas para la enseñanza de la factorización, como para el desarrollo de nuevas investigaciones en el tema que consideren otros niveles de educación. En relación a lo anteriormente planteado es como surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son las concepciones de factorización para polinomios cuadráticos que poseen los estudiantes en tercer año de enseñanza media, desde la perspectiva de los Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud?

Planteando como objetivo principal, el determinar cuáles son las concepciones de factorización de polinomios de segundo grado que poseen los estudiantes en tercer año de enseñanza media, desde la perspectiva de los Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud y dando origen a los siguientes objetivos secundarios:

- Identificar estrategias utilizadas por los estudiantes al factorizar un polinomio de segundo grado.
- Describir la organización del concepto de factorización de trinomios cuadrados en los esquemas presentes de estudiantes de tercer año de enseñanza media.
- Analizar cuáles son las semejanzas y diferencias presentes en los esquemas desarrollados por los estudiantes.

Teoría de los campos conceptuales

Gracias a los aportes de Piaget, considerando las ideas de acomodación, desequilibrio y esquemas, junto con la interacción social y otros aspectos propuestos por Vygotsky es que Gérard Vergnaud diseña la Teoría de Campos Conceptuales que corresponde a una teoría psicológica del concepto, o mejor dicho, de la conceptualización de lo real; permite localizar y estudiar las filiaciones y las rupturas entre conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual, centrándonos para este caso en la factorización. Esta teoría permite igualmente analizar la relación entre conceptos en tanto conocimientos explícitos y los invariantes operatorios implícitos, cuyas ideas se desarrollarán posteriormente, en las conductas del sujeto en situación; considerando además las relaciones entre significados y significantes (Vergnaud, 1990, p. 133). Es por medio de la experiencia que el sujeto organiza el conocimiento en campos conceptuales, proceso que abarca un período de tiempo considerable y por tal motivo debemos considerar niveles de enseñanza posteriores a la introducción de la factorización en el primer año de enseñanza media (entre 12 y 13 años de edad). El conocimiento para Vergnaud es adaptativo y es producto de la construcción del sujeto cuando se adapta al medio, al resolver actividades centradas en la factorización como tal u otras que la consideren como una herramienta o estrategia para resolver otro tipo de problemas como en la resolución de ecuaciones cuadráticas, por ello se le considera operatorio.

La conceptualización es un aspecto importante a destacar dentro de esta teoría, debido a que por medio de la resolución de problemas y de las situaciones a las que el sujeto se enfrenta es que los conceptos empleados adquieren sentido, siendo observable por medio de las producciones que los estudiantes realizan en donde esta conceptualización se exterioriza permitiendo distinguir las relaciones que establecen dentro de la factorización.

El autor al referirse a *situación*, habla de tarea, entendiendo una situación compleja como un conjunto de tareas, clasificando el tipo de situaciones según el nivel de competencia que posea el sujeto, entendiendo las situaciones conocidas como aquellas en que dispone de las competencias suficientes para el tratamiento relativamente inmediato de la situación al reconocer los elementos involucrados en la factorización y como situaciones nuevas aquellas en que el sujeto debe reflexionar y explorar debido a que no cuenta con las competencias necesarias para resolver la situación inmediatamente.

La noción de campo conceptual es vista por Vergnaud como un conjunto de situaciones. Por ejemplo, para el campo conceptual de las estructuras aditivas, el conjunto de situaciones que requieren una adición, una sustracción o una combinación de dichas operaciones; y por las estructuras multiplicativas, el conjunto de situaciones que requieren una multiplicación, una división o una combinación de tales operaciones. La primera ventaja de esta aproximación mediante las situaciones es la de permitir generar una clasificación que reposa sobre el análisis de las tareas cognitivas y en los procedimientos que pueden ser puestos en juego en cada una de ellas (1990, p. 140 - 141).

La enseñanza de un concepto no debe ser reducido meramente a su definición. La noción de concepto está compuesta para Vergnaud (1990, p. 7), por un triplete de conjuntos, **C = (S, I, R**) donde:

- **S** es la referencia, siendo este el conjunto de situaciones que dan sentido a la factorización.

- **I** representa el significado, abarcando un conjunto de invariantes (objetos, propiedades y relaciones) sobre las cuales reposa la operacionalidad del concepto, o un conjunto de invariantes que pueden ser reconocidos y usados por los sujetos para analizar y dominar las situaciones del primer conjunto.

- **R** está asociada al significante, correspondiendo al conjunto de representaciones simbólicas (lenguaje natural, gráficos y diagramas, sentencias formales, etc.) que pueden ser usadas para indicar y representar esos invariantes y, consecuentemente, representar las situaciones y los procedimientos para lidiar con ellas.

Vergnaud (1990) considera "esquema" a la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada. De esta forma podemos decir que son los esquemas quienes se adaptan y acomodan a la situación, permitiendo generar la actividad y la conducta en ella. Para facilitar su comprensión el autor plantea los ingredientes de los esquemas, considerando:

- **Metas y anticipaciones,** en donde el sujeto puede encontrar una posible finalidad de la actividad, así como ciertos efectos o eventos denominados submetas.

- **Reglas de acción,** son las pautas de búsqueda de información y de control de los resultados de acción, permitiendo la generación y continuidad de las secuencias de acciones por parte del individuo.

- **Invariantes operatorias,** abarcan tanto teoremas-en-acción como conceptos-en-acción; conforman la base, que permite obtener la información pertinente y de ella inferir la meta a alcanzar y las reglas de acción adecuadas, dirigiendo al individuo en el reconocimiento de los elementos permitentes de la situación.

- **Posibilidades de inferencia,** desde la información e invariantes operatorios que dispone la persona permiten "calcular" las reglas y anticipaciones para una situación determinada.

Metodología

Debido a la particularidad del grupo de estudio es que esta investigación se centra en un enfoque cualitativo permitiendo el "entendimiento del fenómeno en todas sus dimensiones, internas y externas/ pasadas y presentes" (Hernández, Fernández y Baptísta, 2006, p. 525), privilegiando la comprensión de las relaciones existentes por sobre otros aspectos cuantificables, teniendo tanto en cuenta la particularidad del estudio como el contexto en donde se desarrolla. Este aspecto enriquece los resultados arrojados debido a que la "unicidad de los casos y de los contextos individuales es importante para la comprensión. La particularización es un objetivo importante, llegar a entender la particularidad del caso" (Stake, 1999, p. 44).

Esta visión cobra sentido, si consideramos que los estudiantes presentes en esta indagación pertenecen a un nivel en específico, correspondiente a tercer año de enseñanza media, dentro de una institución de tipo privada con un conjunto nociones asociadas, las que influyen directa o indirectamente en la noción de los objetos construidos por estos jóvenes, durante sus años de escolaridad.

Dentro de este enfoque se empleará como metodología de investigación el estudio de casos debido a que "se centran en una situación, evento, programa o fenómeno particular. El caso en sí mismo es importante por lo que revela acerca del fenómeno" (Merriam, 1990, Citado en Pérez Serrano, 1994a, p. 91 - 93), acercándonos con ello a las concepciones y esquemas presentes en cada persona.

El muestreo realizado de esta investigación no es de tipo probabilístico, debido a la elección intencionada en un curso de 16 estudiantes de tercer año de enseñanza media utilizando muestras diversas o de máxima variación, en donde "se busca mostrar distintas perspectivas y representar la complejidad del fenómeno estudiado" (Hernández et al., 2006, p. 567), en relación a las siguientes características de la muestra:

De los dos cursos matemáticos se seleccionará uno de ellos correspondiente a 16 estudiantes de tercer año de enseñanza media que cursan el plan matemático de estudios en el Instituto de Humanidades Luis Campino, un establecimiento educacional privado. Se emplea como criterio de selección sus diferentes niveles de aprendizaje en relación a su promedio general y que se encuentren desde primero medio en el mismo curso, considerando de este modo que el concepto de factorización fue abordado en un principio de la misma manera para cada uno de ellos, empleando para la recolección de datos los siguientes instrumentos:

Se establecerá un primer acercamiento por medio de una entrevista semiestructurada a 16 estudiantes seleccionados, para evidenciar el manejo que poseen de los conceptos relacionados con el objeto factorización, como las representaciones que puedan establecer de ésta y determinar cuáles son las nociones y vínculos que establecen con respecto a la factorización, aplicándose en una segunda instancia luego de desarrollar una serie de actividades planteadas para justificar su desarrollo.

Los **objetivos** que se esperan abordar con la estrategia anterior corresponden a:

- Describir la organización del concepto de factorización de trinomios cuadrados dentro de los esquemas presentes en los estudiantes de tercer año de enseñanza media.

- Analizar cuáles son las semejanzas y diferencias presentes en los esquemas desarrollados por los estudiantes.

Con la aplicación de este tipo de técnica "se logra una comunicación y la construcción conjunta de significados respecto a un tema" (Janesick, 1998, Citado en Hernández et al., 2006, p. 597) permitiendo un primer acercamiento de las nociones y esquemas que subyacen tras las relaciones que establecen con respecto a la factorización. La relevancia en la aplicación de esta metodología radica en "las descripciones y las interpretaciones que se obtienen" (Stake, 1999, p. 63), evidencias que difícilmente se podrían obtener de otra forma.

Es en la producción de los estudiantes, en donde se evidencia lo que no se explicita verbalmente, teniendo en cuenta que "los documentos sirven como sustitutos de registros de actividades que el investigador no puede observar directamente" (Stake, 1999, p. 66), por este motivo luego de aplicar la entrevista se les pedirá al grupo de 16 estudiantes que desarrollen una serie de actividades propuestas, justificando la postura adoptada en cada caso para comprender sus esquemas, considerando las metas y anticipaciones, reglas de acción, invariantes operatorios y posibilidades de inferencia, analizando con ello la forma en que organizan las diferentes representaciones asociadas a la factorización. El **objetivo** que se espera abarcar con esta técnica está asociado a:

- Identificar estrategias utilizadas por los estudiantes al factorizar un polinomio de segundo grado.

Análisis de resultados

Aunque este reporte se encuentra en desarrollo, considerando los ingredientes de los esquemas propuestos por Vergnaud (1990), queda en evidencia una falta en el desarrollo de los esquemas presentes en los estudiantes, asociados a la factorización, estableciéndose mayoritariamente vínculos desde el punto de vista algebraico pero no desde el geométrico, denotando que no existe una verdadera comprensión del concepto, ni de los procedimientos que se realizan, internalizando la estrategia para factorizar polinomios cuadráticos, pero sin reflexionar del sentido que un trinomio de segundo grado sea o no, factorizable.

Referencias

Ballén, Javier. (2012). El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado. Bogotá, Colombia. Trabajo de grado (Magíster en Enseñanza). Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas.

Delgado, M., Arrieta, X. y Meleán, R. (2013). Esquemas cognitivos sobre difracción de ondas mecánicas de estudiantes universitarios. Enl@ce Revista Venezolana de Información, Tecnología y Conocimiento, 10 (3), 115-132.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptísta, P. (2006). Metodología de la investigación. México. McGraw-Hill.

Mejía, María Fernanda. (2004). Análisis didáctico de la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas. Santiago de Cali. Proyecto de Grado (Licenciado en Matemáticas y Física). Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía.

Ministerio de Educación. (2011). Programa de Estudio en Matemática para Primer Año Medio. Chile.

Moreira, Marco. (2002). La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. Publicado en Investigaciones en Enseñanza de las Ciencias, 7(1). Porto, Alegre, Brasil. Traducción de Isabel Iglesias.

Pérez Serrano, G. (1994a). Investigación cualitativa. Retos e interrogantes. I. Métodos. Madrid: La Muralla.

Stake, Robert. (1999). Investigación con estudio de casos. España: Ed. Morata.

Vergnaud, Gérard. (1990). La théorie des champs conceptuels. Récherches en Didactique des Mathématiques, 10 (23), 133-170.

La demostración en el currículo de educación básica

Cinthya Albornoz, Daniel Fernández, Glenny Lagos, Carolina Salas, César Vergara
Universidad San Sebastián, Sede Concepción, Chile.
daniel.fernandez@uss.cl

Resumen

El presente trabajo busca entregar una propuesta didáctica, sustentada en la tipología de prueba de Nicolas Balacheff (2000), para desarrollar la habilidad de demostrar en el eje de Geometría. La propuesta responde tanto a los resultados deficientes en diferentes pruebas, nacionales e internacionales, que miden la calidad de la educación, como a la necesidad que surge por los ajustes curriculares realizados por el Ministerio de Educación (2012) que reubican el desarrollo de esta habilidad en la educación básica, y que antes se hacía presente inicialmente en la educación media y se profundizaba en la educación superior, según sea la carrera profesional escogida. Se espera contribuir a la comunidad docente con una herramienta didáctica innovadora diseñada para generar razonamiento en los estudiantes y así lograr la aprehensión conceptual.

Planteamiento del problema:

La enseñanza de la matemática siempre ha sido fuente de preocupaciones para profesores y apoderados. A lo largo de la historia de la Educación, el aprendizaje de la matemática ha presentado constantes obstáculos y dificultades en la mayoría de los estudiantes. Además, en los últimos años han existido diversos cambios en el currículo nacional, con el último ajuste se introdujeron las Bases Curriculares, que son orientaciones respecto a lo que debe enseñarse en cada asignatura perteneciente a los planes de estudio de aquel, propuestas por el Ministerio de Educación de Chile para la educación básica. En dichas bases se indica para la asignatura de matemática que se debe desarrollar la habilidad de demostrar, tanto en el eje de Geometría como en el de Álgebra (Ministerio de Educación, 2012), volviéndose complejo para docentes el enseñar algo cuya noción no es del todo clara.

A esto se suma que en el año 2013, en la evaluación nacional SIMCE (Sistema de Medición de la Calidad de la Educación), por primera vez se aplicó la prueba a los sextos básicos. En Matemática los puntajes promedios van desde 227 en colegios municipales a 300 en particulares pagados, lo que indica que el rendimiento está muy por debajo de lo esperado. (Agencia de Calidad de la Educación, 2013, p. 29-33)

Además, en dos grandes pruebas internacionales que miden y analizan el rendimiento y logros educativos en los estudiantes, se tiene por una parte que "por primera vez Chile alcanza el primer lugar de Latinoamérica en todas las áreas evaluadas: Matemática, Lectura y Ciencias." (Agencia de Calidad de la Educación, 2013, p. 11), sin embargo, se ubica muy por debajo de los demás países participantes, ya que, "Chile se encuentra a 71 puntos del promedio de la OCDE y entre el lugar 50-52 de los 65 países evaluados." (Ibid, p. 16). Cabe destacar que en matemática, el país obtuvo 423 puntos y que, en esta misma área, un 52% de los estudiantes demuestra no poseer una base mínima de preparación para enfrentar los desafíos que impone la sociedad moderna (Ibid, p. 13). Por otra parte, en la prueba TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) 2011, el puntaje promedio obtenido por los estudiantes de 4º básico en Matemática, es de 462 puntos. Esto indica que el 23% de los estudiantes chilenos queda fuera de los niveles de clasificación y solamente el 2% alcanza el nivel Avanzado. Un 33% alcanza solo el nivel Bajo, que corresponde a capacidades y conocimientos básicos en Matemática. Por otro lado, 30% de los estudiantes llega al nivel Intermedio, ellos logran aplicar conocimientos básicos en situaciones sencillas. Solamente el 12% de los estudiantes chilenos ha alcanzado el nivel Alto, lo que indica que logran aplicar su conocimiento y comprensión para resolver problemas matemáticos. (Agencia de Calidad de la Educación, 2013, p. 14 – 16)

Lo anteriormente expuesto ha influido considerablemente en el proceso de enseñanza-aprendizaje, por esto las metodologías de los docentes deben ir modificándose para que estén acordes con lo que el nuevo currículo exige, y en consecuencia, el promover el desarrollo de nuevas habilidades en los alumnos se vuelve esencial.

La didáctica de la matemática es una disciplina que se ocupa del estudio de los fenómenos del proceso de Enseñanza y Aprendizaje ligados al saber matemático. Por lo expuesto anteriormente, se hace evidente la necesidad de utilizar teorías basadas en aquella disciplina, ya que cumplen una función de guía para lograr exitosamente el aprendizaje significativo de los conocimientos matemáticos.

Nuestro trabajo es una propuesta para la enseñanza de la habilidad de demostrar, en estudiantes de 6° año básico, en la cual se utilizó como sustento teórico, la tipología de prueba de Nicolas Balacheff (2000), que consiste en una descripción de las tipologías de pruebas que suelen presentar los estudiantes cuando se les solicita realizar una demostración de alguna propiedad matemática.

La motivación para llevar a cabo esta propuesta es complementar y aportar a las investigaciones referentes al tema de la demostración, debido a que es una habilidad compleja por el nivel de abstracción que se requiere para realizarla. Es por eso que se considera necesario realizar un análisis de la información disponible y una propuesta con un sustento teórico apropiado, lo cual será de suma relevancia para los docentes de matemática.

Además, se espera que el alumno sea capaz de construir su propio conocimiento a través de la teoría, que está sustentada en una concepción constructivista. La idea principal es presentar un instrumento innovador para que los docentes puedan trabajar con sus alumnos y así generar un aprendizaje significativo, logrando en ellos el desarrollo del razonamiento y el pensamiento crítico.

Objetivos

I. Reflexionar en torno a los métodos de enseñanza de las demostraciones en educación básica planteados por el Ministerio de Educación a través de las bases curriculares y textos de estudios.

II. Proponer una propuesta didáctica sustentada en la tipología de prueba de Nicolas Balacheff, para ser utilizada por estudiantes de educación básica como acercamiento a la demostración matemática.

III. Analizar la propuesta didáctica sustentada en la tipología de prueba de Nicolas Balacheff, como herramienta heurística en la construcción de la noción de demostración matemática.

Marco teórico

La Tipología de Prueba de Nicolas Balacheff (2000), es un modelo centrado en el Razonamiento Matemático. Este modelo clasifica las pruebas proporcionadas por los estudiantes en dos tipos: las Pragmáticas y las Intelectuales; cuando los docentes logran comprender las diferencias entre éstas, pueden utilizarlas en beneficio de promover en los alumnos una apropiada forma de razonar y construir los conocimientos. Para explicarlas utilizaremos un ejemplo del álgebra: "Probar que la suma de tres números naturales consecutivos, es siempre múltiplo de tres." [3]

Las Pruebas Pragmáticas son aquellas que están ligadas a la acción, a la experimentación y la justificación, que se realizan a través de material concreto con el fin de asegurar la validez de un enunciado. Dentro de estas pruebas pragmáticas encontramos tres categorías:

1. El empirismo ingenuo, es cuando el estudiante afirma que un enunciado es verdadero después de observar que se cumple en determinadas circunstancias. En este caso el estudiante diría: 3 + 4 + 5 = 12 es múltiplo de 3; 5 + 6 + 7 = 18 es múltiplo de 3 extrayendo la conclusión a partir de un número acotado de casos.

2. La experiencia crucial escoge una experimentación cuyo efecto permite distinguir entre dos suposiciones, siendo verdadera sólo una de ellas. Se generaliza a partir de un caso lo menos particular posible, por ejemplo: 350000 + 350001 + 350002 = 1050003

3. Por último, tenemos el ejemplo genérico que se refiere a que el estudiante escoge un ejemplo cualquiera y afirma que el enunciado es verdadero tras comprobar que se cumple para dicho ejemplo, avanzando hacia una formulación más general, para el ejemplo:

"4 + 5 + 6 = 4 + (4 + 1) + (4 + 2) = (4 x 3) + 3 y pasa lo mismo si en vez de 4 pongo cualquier otro número."

Las Pruebas Intelectuales, requieren de un razonamiento específico e interiorizado, en el cual se dejan de lado los objetos materiales, transitando de lo concreto a lo abstracto del pensamiento. Dentro de las pruebas intelectuales encontramos tres categorías:

[3] Dirección Provincial de Educación Superior y Capacitación Educativa. (2008). Los alumnos como productores de conocimiento matemático. San Bernardo, Argentina.

1. La experiencia mental se sustenta en la independencia de la representación de un objeto, con el razonamiento. Se consideran ejemplos que no son tomados como elementos de convencimiento, pero sirven para estructurar la justificación o apoyar la argumentación. En el ejemplo presentado se darían respuestas como: "Si pienso un número, el que sigue tiene uno más y el que sigue tiene dos más. Si los sumo tengo 3 y tres veces el primer número."

2. La demostración es un tipo de prueba que presenta una sucesión de enunciados que se organizan siguiendo un orden definido, cada uno de los cuales es una definición, un axioma, un teorema (demostrado previamente) o un postulado, utilizando un lenguaje reconocido por la comunidad matemática. En el ejemplo, aunque en forma resumida, sería:

"Sean n, n+1 y n+2 tres números naturales consecutivos, se tiene qué:

$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$"

3. Por último, tenemos el cálculo sobre enunciados, que trata de pruebas autónomas de la experiencia y donde no se trabaja ni con ejemplos ni con dibujos. Crean razonamiento o construcciones intelectuales fundamentadas en teorías formalizadas que se originan en una definición o propiedad basándose en la transformación de expresiones simbólicas formales.

Las actividades de demostración en que los alumnos desarrollan la capacidad de elaborar procedimientos de resolución frente a un problema que después tendrán que demostrar a partir de argumentos que puedan convencer a otros de su veracidad: "La demostración es una herramienta esencial de prueba; ésta conduce a un ejercicio práctico, que hace posible la comunicación y la evaluación a la vez." (Balacheff, 2000, p.2)

Metodología

El presente estudio busca establecer la relación existente entre la aplicación de un método de enseñanza basado en la Tipología de Prueba de Nicolas Balacheff (2000) y el desarrollo de la habilidad de demostración en geometría. Se busca establecer la relación existente entre las variables en estudio, es decir, confirmar la hipótesis de que la propuesta de enseñanza colabora para construir un razonamiento geométrico en la habilidad de demostrar. Por lo anterior, se deduce que la investigación tendrá una lógica deductiva, ya que lo que se pretende es confirmar la hipótesis planteada.

Se considerarán dos variables: la variable dependiente será el desarrollo de la habilidad de demostrar, en las estudiantes de 6to año básico, que comprenden edades entre 11 y 13 años, del Colegio España en Concepción "La variable dependiente no se manipula, sino que se mide para ver el efecto que la manipulación de la variable independiente tiene en ella." (Hernández, Fernández, Baptista, 2010, p. 123) y la variable independiente será la propuesta didáctica sustentada en la Teoría de Procesos de Prueba de Balacheff. Las variables se definen en detalle a continuación:

Habilidad de Demostrar: Corresponde a una habilidad de razonamiento matemático, que los estudiantes deben desarrollar; es necesario para ello comprender el concepto de demostración:

> *"El tipo de prueba dominante en matemáticas tiene una forma particular. Se trata de una*

serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas (...) Lo que caracteriza a las demostraciones como género del discurso es su forma estrictamente codificada."

(Balacheff, 2000, p. 13)

Propuesta didáctica sustentada en la Tipología de Prueba de Balacheff: Dicha propuesta consiste en realizar un conjunto de actividades secuenciadas según las tipologías de pruebas definidas por el autor, comenzando desde actividades básicas con apoyo de material concreto, es decir, pruebas pragmáticas, hasta actividades más complejas que requieren del desarrollo del pensamiento abstracto en las estudiantes, es decir, pruebas intelectuales.

Se ha escogido para el desarrollo de la propuesta, el contenido de sexto año básico correspondiente al Teorema de la Suma de los Ángulos Interiores de un Triángulo: "Demostrar de manera concreta, pictórica y simbólica que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º y de un cuadrilátero es 360º." (Ministerio de Educación, 2012)

Así, las actividades iniciales están orientadas a que los estudiantes observen ejemplos de triángulos y mediante la medición de sus ángulos y la suma de ellos, se aventuren a conjeturar que esta suma siempre es 180º. Posteriormente se les invita a realizar una verificación de su conjetura, aún con material concreto, mediante el uso de un triángulo de papel que deben recortar, para ubicar los ángulos de manera de formar un ángulo extendido y visualizar que la suma de los tres, efectivamente es 180º. A continuación, se introduce el apoyo del software Cabri para mostrar que podemos modificar los vértices de un triángulo y la propiedad continúa cumpliéndose. Todo lo anterior se desarrolla en el ámbito de las pruebas pragmáticas. El objetivo es ir acercando gradualmente a los estudiantes a las pruebas intelectuales para conseguir que desarrollen la habilidad de demostrar. Para esto, se ha diseñado una actividad que mediante la utilización de los conocimientos previos referentes a ángulos entre paralelas cortadas por una secante, va guiando a los estudiantes hacia una verdadera demostración. Finalmente, se debe comprender que por ser el primer acercamiento que tienen los alumnos a una habilidad tan compleja como la demostración, no se puede esperar que comprendan de inmediato toda la rigurosidad ni el lenguaje formal que esto requiere, por lo que la actividad final, se realiza mediante términos pareados, entregándoles una serie de sentencias que deben ordenar según lo observado hasta el momento, de modo de poder utilizarlo como base para la redacción de una verdadera demostración del Teorema trabajado.

El estilo utilizado en el presente estudio es el Cuantitativo, ya que se utilizará información cuantificable y medible, la que se obtendrá a partir de la recolección y el análisis de datos numéricos, que permitirán contestar a la pregunta de investigación y establecer con exactitud la influencia de la propuesta didáctica en la muestra escogida.

Se ha optado por utilizar un diseño con preprueba, posprueba y grupo de control; en este tipo de diseño se incluyen dos grupos, a los cuales se les aplica en forma simultánea una preprueba, que permitirá diagnosticar el estado de la variable dependiente, en este caso la habilidad de demostrar, antes de aplicar la propuesta. Posteriormente, uno de los grupos recibe el tratamiento experimental, en este caso la propuesta didáctica basada en Balacheff (2000), mientras que el grupo control no lo recibe. Al final de la intervención, se aplicará una posprueba para medir el desarrollo de la variable dependiente. Los grupos utilizados serán, sexto año A y sexto año B del colegio España de la comuna de Concepción. De lo anterior, se desprende que el diseño utilizado es de tipo cuasiexperimental, ya que por medio de las actividades propuestas se manipulará una de las variables, la habilidad de demostrar, con el objetivo de obtener una mejora significativa en esta, sin embargo, no se puede tener un control absoluto de la conformación de los grupos a los que se aplicará la propuesta ni de otras variables que pudieran influir en los resultados obtenidos. (Hernández, Fernández, Baptista, 2010, p. 140)

La unidad de análisis que se utilizará, serán alumnos de 6º año básico, la población escogida corresponde a los estudiantes de dicho nivel pertenecientes a establecimientos municipales de la comuna de Concepción y, dentro de esta población, se ha escogido como muestra a las alumnas de 6º año básico del Colegio España. Se ha optado por una muestra no probabilística, el criterio utilizado para la selección de la muestra es por conveniencia, ya que por las limitaciones de tiempo resulta más factible realizar la propuesta en un colegio determinado. Con respecto a la temporalidad, el presente estudio es de corte transversal porque no existe continuidad en el eje del tiempo, ya que los datos serán recogidos durante una cantidad de tiempo limitada, aplicando la prueba para medir el desarrollo de la habilidad de demostrar una sola vez sin posteriores repeticiones.

La propuesta presentada, basada en la teoría de Balacheff (2000), se encuentra en la etapa de aplicación, lo que no permite por el momento exponer resultados y determinar su eficacia. Como se expuso previamente, los datos permitirán determinar la validez de la hipótesis, serán obtenidos a partir de la aplicación de una prueba que medirá el estado de avance en la habilidad de demostrar. Para asegurar la validez y confiabilidad de los datos, dicha prueba será previamente validada por expertos y además se procurará que durante la aplicación de las pruebas no existan otras variables que puedan influir en los resultados obtenidos.

Referencias

Acuña, C. (1996). Un modelo de tratamiento didáctico para la enseñanza del razonamiento deductivo y de la demostración en el nivel medio superior. Investigaciones en Matemática Educativa. México D.F.: Iberoamérica.

Agencia de Calidad de la Educación. (2013). Resultados PISA 2012 Chile. Santiago: Agencia de Calidad de la Educación. Recuperado el 06 de septiembre de 2014 en http://educacion2020.cl/sites/default/files/resultadospisa2012chile_agencia.pdf

Agencia de Calidad de la Educación. (2013). Resultados SIMCE 2013 Chile. Santiago: Agencia de Calidad de la Educación. Recuperado el 17 de septiembre de 2014 en http://www.agenciaeducacion.cl/resultados-nacionales-simce-2013/

Balacheff, N. (2000) Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Bogotá: Una empresa docente, Universidad de los Andes.

Córdova, M. (2011). Procesos de Argumentación mediante el uso de Pruebas Pragmáticas en un AGD con estudiantes de grado séptimo. (Trabajo de grado para optar por el título de Licenciada en educación Básica con énfasis en matemáticas). Universidad del Valle, Santiago de Cali.

De León, A., De León, L. (2013). Cómo enseñar problemas de demostración en educación básica. Cd. Madero: Instituto Tecnológico. Recuperado el 23 de septiembre de 2014 en http://funes.uniandes.edu.co/4577/1/LeonComoCiaem2013.pdf

Dreyfus, T. (2000) La demostración como contenido a lo largo del currículum. En Gorgorió i Solá, M. (coord.) Matemáticas y educación: retos y cambios des-

de una perspectiva internacional. Madrid: Graó, pp. 126-134.

Godino, J., Recio, A. (2001) Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación Matemática. Revista Enseñanza de las Ciencias, 3 (19), 405-414. Recuperado el 24 de septiembre de 2014 en http://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v19n3p405.pdf

Padilla, R. (2009). Exámenes masivos internacionales y nacionales. ¿Encuentros o desencuentros? Revista Perfiles Educativos, 123 (31), 44-59. Recuperado el 07 de septiembre de 2014 en http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0185-26982009000100004&lng=es&tlng=es

Formación de profesorado: Conceptualización del uso del software Geogebra en la enseñanza de la matemática en educación media como parte de la didáctica de la disciplina

Monika Dockendorff, Horacio Solar Bezmalinovic
Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
mdockend@uc.cl, hsolar@uc.cl

Resumen

El *Programa de Formación Pedagógica* de la Pontificia Universidad Católica de Chile, forma como docentes a licenciados en matemática y áreas afines en un período de un año. En el contexto del proyecto PUC1201 de innovación en la formación de profesores, los cursos de Didáctica de la Matemática I y II contemplan actualmente una línea TIC. El propósito de este trabajo es caracterizar el sentido que ha ido adquiriendo la incorporación de los recursos informáticos a la enseñanza de la Matemática y la evolución en la conceptualización del uso de estas herramientas tecnológicas que han exhibido los futuros profesores durante su proceso formativo. Se busca describir en particular el proceso de reconocimiento del software GeoGebra como un medio que favorece el desarrollo del ejercicio profesional del futuro docente y como un recurso que permite mejorar los aprendizajes de los estudiantes. La metodología aplicada considera tres etapas: (1) Exploración y uso de las aplicaciones del software por parte de los alumnos en formación. (2) Diseño e implementación de tareas matemáticas utilizando GeoGebra en su práctica profesional. (3) Reflexión sobre el aprendizaje de las matemáticas mediante herramientas tecnológicas. Estas etapas se presentan por medio de un estudio de caso de uno de los profesores en formación.

Introducción

El *Programa de Formación Pedagógica* de la Pontificia Universidad Católica de Chile, forma como docentes a licenciados en un período de un año. El proyecto PUC1201 se propone como objetivo una renovación curricular profunda de dicho programa de formación de profesores, por medio de la incorporación sistemática de las TIC, con foco en las cuatro asignaturas centrales del currículo escolar: Lenguaje, Matemática, Ciencias Naturales y Ciencias Sociales. Para la formación específica de profesores de matemática se contempla una línea de dos cursos de Didáctica de la matemática durante todo el año de formación, y a partir del primer semestre del 2014 se contempló una formación en TIC para los futuros profesores utilizando como recurso el software GeoGebra.

Algunos investigadores han abordado el uso de

GeoGebra mediante experiencias de ampliación que permiten a los alumnos explorar, conjeturar y finalmente validar o justificar sus hipótesis. En este contexto el software favorece la detección de propiedades que se descubren mediante su visualización, facilitando el planteamiento de conjeturas. Así, GeoGebra contribuye a identificar ciertas propiedades que se cumplen de manera general y aquellas que no, convirtiéndose en un potente instrumento de comprobación o de desestimación de conjeturas (Morera, 2011).

Varias investigaciones buscan establecer una tipología de alumnos para categorizar y analizar el comportamiento de los estudiantes de acuerdo al uso que le dan a la herramienta. Se observa que los alumnos tienen pocas dificultades en relación al uso de esta herramienta y coinciden en que ayuda a visualizar el problema y a evitar obstáculos algebraicos. En general, el uso de GeoGebra promueve un pensamiento más geométrico y facilita un soporte visual, algebraico y conceptual a la mayoría de alumnos, aunque con presencia de variedad de estrategias de resolución, las cuales pueden ser interpretadas en términos de tipologías de alumnos.

La incorporación de ambientes de geometría dinámica, en particular GeoGebra, en la formación inicial de profesores de matemática favorece la construcción de conocimientos matemáticos significativos, operativos y estructurados, lo que le permite a los futuros docentes movilizarse fácilmente entre los sistemas de representación simbólicos, numéricos, gráficos y analíticos (Carranza, 2011). El software se presta para ser utilizado en la formación de profesores mediante tareas docentes que posteriormente servirán de modelos de actuación para la práctica docente, propiciando esta labor en condiciones similares a las que fue aprendida y apropiada (González, 2014). Gómez-Chacón & Joglar (2010) plantean que cuando los futuros profesores utilizan la tecnología para resolver problemas matemáticos, éstos no desarrollan espontáneamente un método para integrar estas herramientas en su futura práctica docente. En consecuencia, proponen abordar la integración de la tecnología al aula de matemática desde una perspectiva integral, tomando en cuenta sus distintas componentes: cognitiva, didáctica, técnica y afectiva. El nivel de confianza, motivación y experticia en el manejo de las herramientas tecnológicas es otro aspecto central en el éxito de su incorporación futura en el contexto escolar, lo que revela la necesidad de integrar el uso de GeoGebra en la fase inicial de la formación docente. El componente afectivo, contempla el desarrollo de una identidad profesional como docente de matemática que involucra un proceso biográfico donde se establece una conexión personal con la tecnología y el desarrollo del rol del profesor en relación a la misma. Los futuros profesores señalan que su visión respecto de cómo se desarrolla el aprendizaje en la escuela cambia, enfatizando un aprendizaje desde el descubrimiento en contraposición a una enseñanza transmisible, en una transacción entre identidades heredadas y concebidas en este nuevo escenario.

Sobre la base de estos antecedentes, nos surgen dos preguntas ¿Qué tipo de aprendizajes matemáticos promueve GeoGebra? ¿Cómo impacta el uso de GeoGebra en la preparación de la enseñanza en la reflexión de profesor? Estas preguntas se materializan en el objetivo del estudio: Caracterizar el sentido que ha ido adquiriendo la incorporación de los recursos informáticos a la enseñanza de la Matemática y la evolución en la conceptualización del uso de estas herramientas tecnológicas que han exhibido los futuros profesores durante su proceso formativo.

Metodología

El contexto de estudio es el curso de Didáctica de la Matemática I y II y las experiencias de prácticas en los establecimientos educacionales que tienen los estudiantes que están cursando el plan de formación pedagógica de la PUC para ser profesores de Matemática en Enseñanza Media. En el curso de Didáctica I del primer semestre, los estudiantes tuvieron la oportunidad de desarrollar guías en el entorno GeoGebra, que estaban enfocadas a diferentes unidades de matemática desde 1° a 4° medio (14-18 años). Al finalizar cada una de las guías se les pidió que hicieran una valoración del instrumento. Esta experiencia les permitió manipular GeoGebra y conocer diferentes paquetes de herramientas. Posteriormente, los estudiantes diseñaron un applet para ser aplicado en el contexto de la práctica. Finalmente, los estudiantes elaboraron una reflexión sobre la aplicación del applet.

Como diseño metodológico se ha optado por un estudio de caso porque dicho enfoque permite desarrollar las preguntas de investigación. Se ha seleccionado al estudiante en práctica Simón para el estudio de caso porque reúne una serie de características propicias para indagar en los focos de estudio: fue un estudiante destacado de la licenciatura en matemáticas y tiene conocimiento de otros softwares matemáticos, lo que le permitió un rápido aprendizaje de GeoGebra. Además, exhibe un conocimiento matemático profundo en el desarrollo de las guías y un nivel de reflexión alto en los comentarios. Estas características se reafirman en el diseño del applet cuya construcción reúne una serie de elementos que se describen en el análisis de los datos.

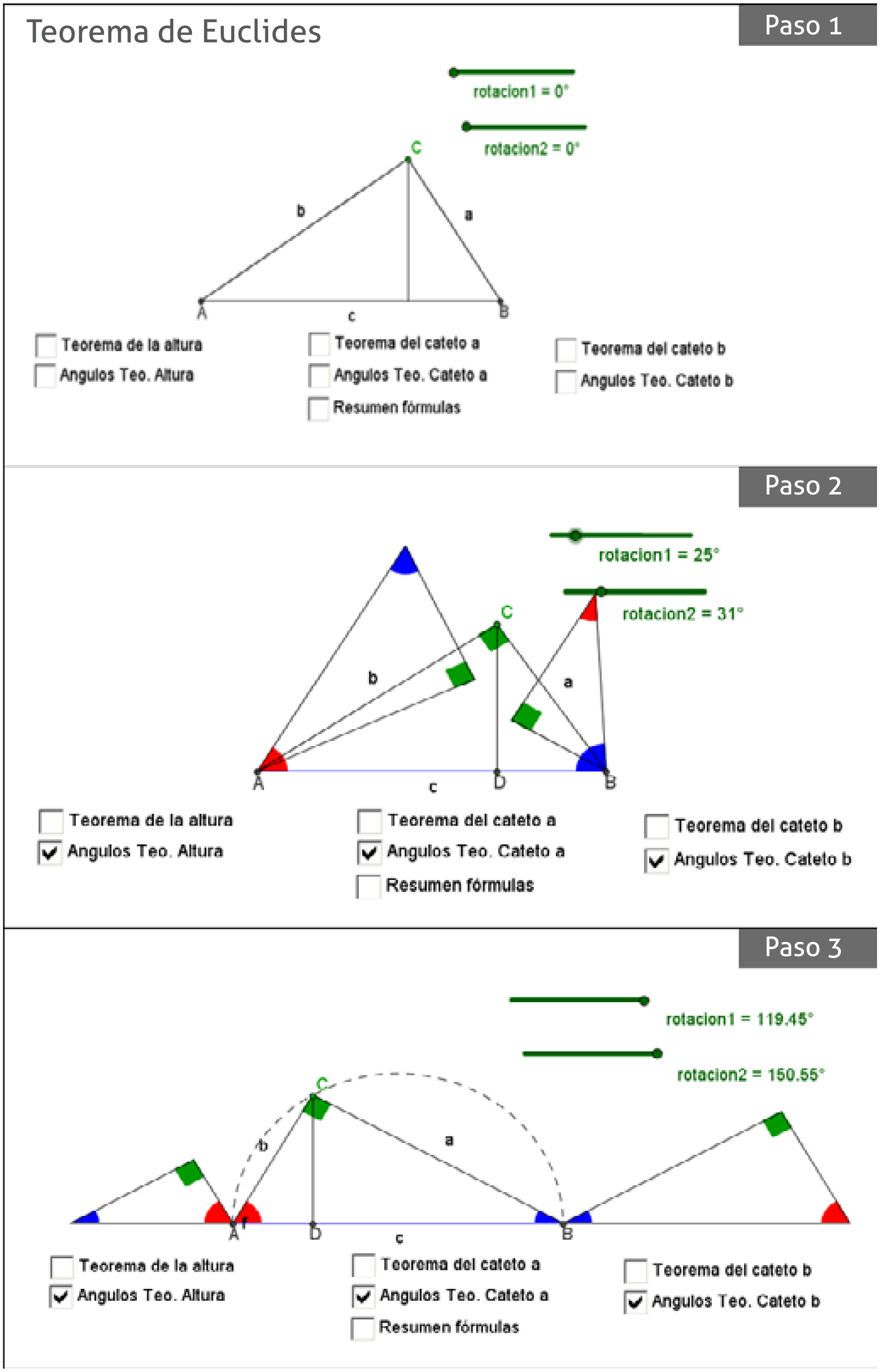
El proceso de recolección de datos se ha organizado sobre la base de las dos dimensiones de la investigación: enseñanza y reflexión. Estas dos dimensiones, asociadas a las dos preguntas de la investigación, sirven de fundamento para volver operativo el objetivo de investigación.

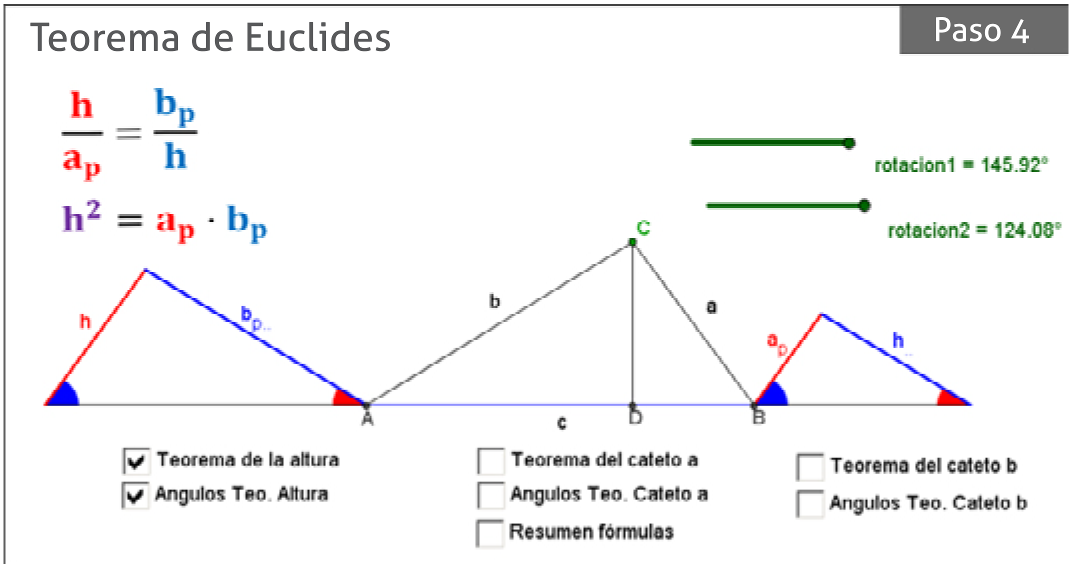
Para la dimensión enseñanza se ha considerado como dato el applet diseñado por Simón, mientras que para la dimensión reflexión los datos consisten en las valoraciones de las guías realizadas por Simón, y su reflexión sobre la aplicación de applet.

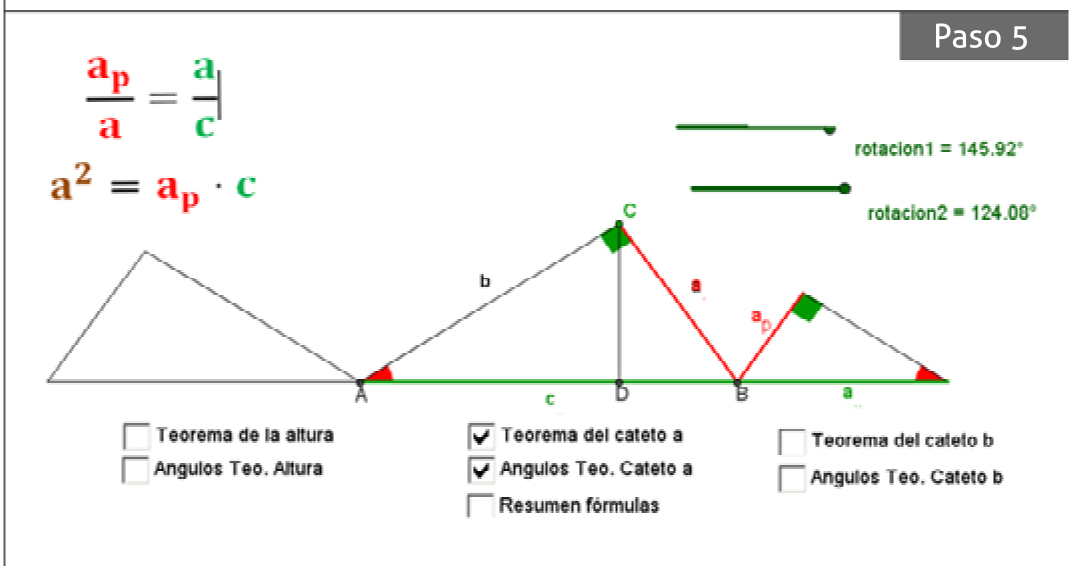
Análisis de los datos.

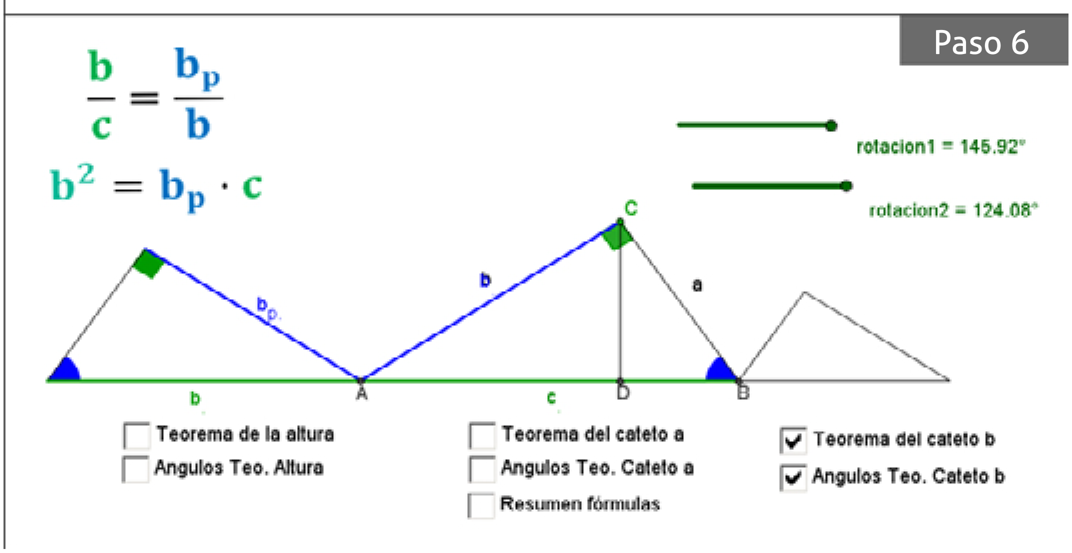
Elementos incorporados en la *enseñanza de las matemáticas mediante TIC:* El siguiente análisis está enfocado en la dimensión de la enseñanza, y busca describir en detalle las características -principalmente dinámicas- del applet diseñado por Simón, y el modo en que éstas favorecen el desencadenamiento de ciertos procesos matemáticos al introducirse en la secuencia didáctica. La construcción y el diseño elegidos buscan ir fundando la comprensión de los teoremas de Euclides secuencialmente (Pasos 1 a 7) hasta llegar a explicitar el contenido (Figura 1).

El applet analizado corresponde a una representación de un triángulo rectángulo ABC al que se le traza la altura relativa a la hipotenusa, conformando dos triángulos menores (Paso1). Mediante el uso de *casillas de control* que permiten mostrar/ocultar objetos, se destacan los ángulos interiores del triángulo ABC de color rojo y azul para los ángulos agudos y verde para el ángulo recto. Del mismo modo quedan resaltados los ángulos de los dos triángulos menores.




Teorema de Euclides
Paso 4
$\frac{h}{a_p} = \frac{b_p}{h}$
$h^2 = a_p \cdot b_p$
rotacion1 = 145.92°
rotacion2 = 124.08°
C
b
a
h
b_p
a_p
h
A
c
D
B
Teorema de la altura
Angulos Teo. Altura
Teorema del cateto a
Angulos Teo. Cateto a
Resumen fórmulas
Teorema del cateto b
Angulos Teo. Cateto b


Paso 5
$\frac{a_p}{a} = \frac{a}{c}$
$a^2 = a_p \cdot c$
rotacion1 = 145.92°
rotacion2 = 124.08°
C
b
a
a_p
A
c
D
B
a
Teorema de la altura
Angulos Teo. Altura
Teorema del cateto a
Angulos Teo. Cateto a
Resumen fórmulas
Teorema del cateto b
Angulos Teo. Cateto b


Paso 6
$\frac{b}{c} = \frac{b_p}{b}$
$b^2 = b_p \cdot c$
rotacion1 = 145.92°
rotacion2 = 124.08°
C
b
a
b_p
b
A
c
D
B
Teorema de la altura
Angulos Teo. Altura
Teorema del cateto a
Angulos Teo. Cateto a
Resumen fórmulas
Teorema del cateto b
Angulos Teo. Cateto b

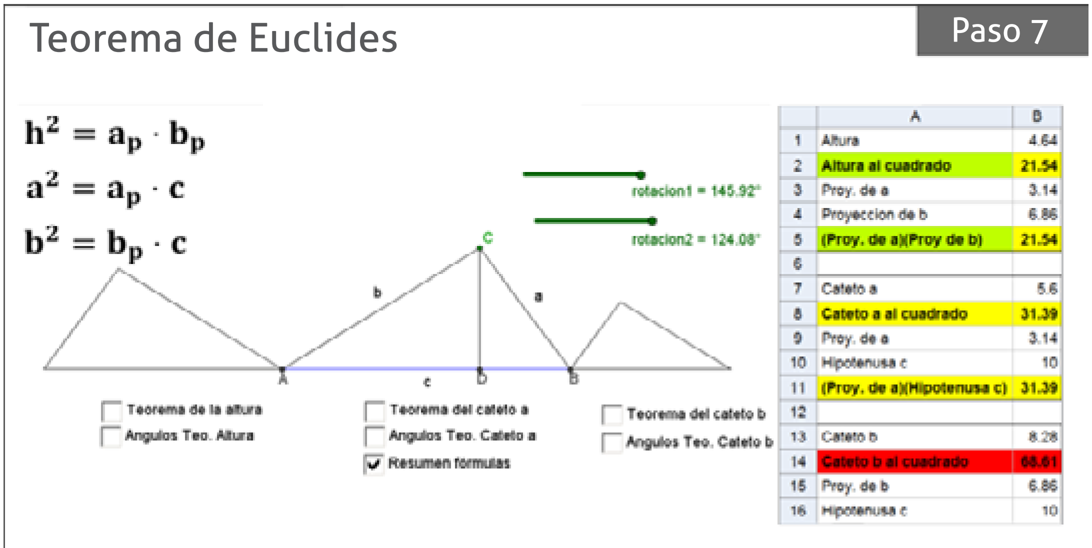


Figura 1: Secuencia del applet con GeoGebra.

Mediante *deslizadores*, se rotan los triángulos menores en torno a los vértices A y B respectivamente, quedando estos dispuestos horizontalmente junto al original ABC (Paso 2). Como los ángulos de los tres triángulos aparecen destacados, los alumnos conjeturan sobre su condición de semejanza, basados en el criterio AA visto en la subunidad anterior. El vértice C, que por construcción corresponde a un *punto sobre una cónica* (semicircunferencia), se desplaza sobre ésta permitiendo *generalizar* que los triángulos conformados a partir del trazo de la altura relativa a la hipotenusa, son semejantes para *cualquier* triángulo rectángulo (Paso 3). Nuevamente con el uso de *casillas de control*, se destacan esta vez los lados homólogos de los triángulos menores. Los alumnos conocen la condición de proporcionalidad que presentan los lados correspondientes de figuras semejantes, lo que les permite deducir el teorema de la altura a partir de su división (Paso 4). Análogamente, los Pasos 5 y 6 de la Figura 1 muestran el uso de *casillas de control* que destacan los lados homólogos de los triángulos que orientan la deducción de los teoremas del cateto a y del cateto b respectivamente. Cabe señalar que las casillas fueron construidas individualmente, lo que permite destacar primero los lados homólogos y luego mostrar la división de éstos y el teorema correspondiente, lo que da tiempo y oportunidad a los alumnos para plantear la proporcionalidad, realizar la operatoria y llegar al teorema, antes de que se explicite en el applet a modo de comprobación. Para finalizar se incorpora la vista *Hoja de Cálculo* donde se han registrado las magnitudes de los lados, proyecciones y altura, así como los productos implicados en los teoremas. Se *comprueba* numéricamente que las secuencias de valores verifican las igualdades de los teoremas al modificarse las magnitudes, producto del *desplazamiento* del vértice C por la cónica (Paso 7).

Como ha quedado de manifiesto en el análisis precedente, el applet construido sobre la base de diferentes elementos dinámicos e interactivos, a saber: deslizadores, punto en objeto, casillas de control y hoja de cálculo; los cuales favorecen la activación de ciertos procesos matemáticos como la conjetura, la deducción y comprobación. El desarrollo de estos procesos aparece facilitado por la visualización, competencia básica e inmediata, que permite una mejor comprensión, acceso y obtención de resultados correctos a una mayor proporción de alumnos. El aprendizaje ya no queda restringido a los alumnos capaces de comunicar ideas y conceptos algebraicamente, sino que se extiende a aquellos menos hábiles en el lenguaje abstracto, que apoyados en este nuevo soporte visual son capaces de adquirir conocimiento.

En la tabla 1 se han sistematizado las características dinámicas del applet de la figura 1 y los procesos asociados. El conjunto de estos procesos conforma lo que podemos llamar la competencia de visualización.

Tabla 1: Relación entre las características dinámicas y los procesos de la visualización

Dinámico	Procesos	Procesos
Deslizador (interactivo)	Conjetura	Visualizar
Punto en objeto (se desplaza por su contorno)	Conjetura	
Casilla de control (objeto de acción)	Deducción	
Hoja de cálculo (registro de secuencia de valores)	Comprobación	

Reflexiones del estudiante y su concepción de la enseñanza de la matemática con TIC: Se han analizado las reflexiones de Simón respecto a diferentes experiencias que ha tenido con GeoGebra, que se han concretado en dos instancias: como usuario de guías desarrolladas en el entorno GeoGebra y su experiencia como docente enseñando contenidos por medio de un applet construido con GeoGebra.

En los comentarios de las guías de Simón, se destaca la utilidad del GeoGebra para el aprendizaje de ciertos conceptos matemáticos; en particular es capaz de reconocer el desarrollo de la competencia de visualización en una de las guías. Simón vincula la visualización con un cambio de mirada, "de análisis algebraico a un análisis geométrico del problema", reconociendo así una de las características clave de esta competencia.

En la experiencia de enseñanza con el applet, Simón describe la importancia que tuvo el utilizarlo articulado con otros elementes en la secuencia de aprendizaje: Si bien Simón asocia el applet con la generación de las relaciones entre las razones, algunos de los procesos de la visualización se vienen trabajando desde el uso del material concreto, tales como la conjetura, para luego reconstruir el teorema de Euclides por medio del applet, lo cual refleja la secuencia de procesos que emergen en el desarrollo de la actividad.

Conclusiones

Durante el proceso de formación pedagógica, los futuros profesores se fueron familiarizando y apropiando de las herramientas del software dinámico GeoGebra, lo que les permitió redescubrir los contenidos matemáticos escolares a través de la tecnología. Simón fue gradualmente caracterizando y asociando las aplicaciones curriculares abordadas con el software a la competencia de la visualización, como el mayor beneficio que otorga el uso de TICs en la enseñanza de la matemática escolar. El sentido que ha ido adquiriendo la incorporación de herramientas tecnológicas en su rol del profesor ha quedado plasmado en el diseño y construcción del applet analizado. La incorporación de elementos dinámicos y el uso interactivo del color, aprovechan plenamente el nuevo soporte visual que permite a una mayor cantidad de alumnos desarrollar los procesos matemáticos necesarios para lograr los aprendizajes esperados. Si bien este análisis se circunscribe a un primer acercamiento del futuro profesor a la incorporación de TICs al aula de matemática, actualmente estamos en proceso de recolección de más datos de su práctica profesional, que esperamos permitan analizar la incorporación de nuevas formas de aproximar a los alumnos a la tecnología y reflejen la manera en que se desarrollan las competencias matemáticas docentes que median las interacciones entre la tecnología y el conocimiento matemático de forma cada vez más fluida.

Referencias

Carranza, M. (2011). Exploración del impacto producido por la integración del ambiente de geometría dinámica (AGD) GeoGebra en la enseñanza de los cursos de matemáticas básicas de primer semestre de la Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira. Maestría Thesis, Universidad Nacional de Colombia, Sede Palmira.

Costa, J. (2011). Plataforma de matematización en un entorno GeoGebra dentro de un planteamiento didáctico «desde abajo hacia arriba». Enseñanza de las Ciencias, 29 (1), 101-114.

Gavilán, J; Escudero, I; Barroso, R. & Sánchez-Matamoros, G. (2011). Una innovación en matemáticas específicas para maestros, apoyada en software dinámico. Comunicación en Jornada. 1ª Jornadas de Innovación Docente. Universidad de Sevilla.

González, J. (2014). Formación de profesores en geometría con GeoGebra. RevistaIberoamericana de Educación. 2014, 161-172.

Gómez-Chacón, M. & Joglar, N. (2010). Developing competencies to teach exponential and logarithmic functions using GeoGebra from a holistic approach. Educ. Matem. Pesq.,12 (3), 485-513.

Hohenwarter, M. & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics.University of Northampton, UK: BSRLM, 27 (3).

Iranzo, N. & Fortuny, J. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. Enseñanza de las Ciencias, 27 (3), 433-446.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A new framework for teacher knowledge. TeachersCollege Record. 108 (6), 1017-1054.

Morera, L. (2011). Uso del GeoGebra en el aprendizaje de las transformaciones. Uno, 56, 95-103.

CLAVEMAT: Comunidad virtual para el aprendizaje de la matemática

Emilio Cariaga, Elías Colipe
Universidad Católica de Temuco, Chile
ecariaga@uct.cl, ecolipe@uct.cl

Resumen

CLAVEMAT: Clase Virtual de Matemática y Tutoría, es una iniciativa financiada por la Comisión Europea a través del programa ALFA III. Está dirigido a docentes de matemática y a estudiantes secundarios, de transición y del primer año de educación superior, que provengan principalmente de sectores vulnerables y/o rurales, que usualmente cuentan con poco o nulo acceso a recursos educativos de primer nivel. CLAVEMAT tiene como objetivo fundamental incrementar la movilidad y cohesión social facilitando el acceso y la finalización exitosa de los estudios superiores. CLAVEMAT es un consorcio formado por las siguientes instituciones de educación superior: Universidad Técnica de Berlín, Universidad Técnica de Delft, Escuela Politécnica de Ecuador, Universidad Nacional de Colombia, Universidad del Cauca, Universidad Granma de Cuba y Universidad Católica de Temuco.

El principal resultado de CLAVEMAT ha sido la conformación de una comunidad virtual de aprendizaje y enseñanza de la matemática que posee más de 3600 integrantes entre docentes y estudiantes de enseñanza secundaria y terciaria. Un segundo resultado destacable es la adecuación de una plataforma informática, que utiliza sólo software de libre disposición. Finalmente, CLAVEMAT ha ejecutado tres cursos virtuales dirigidos a docentes y un curso piloto dirigido a estudiantes en transición hacia la educación superior, junto con la implementación de un programa de tutorías virtuales y presenciales.

Introducción

Las tecnologías de la información y comunicación están presentes prácticamente en todos los ámbitos de la sociedad. En educación no se discute su importancia, sino que se está en permanente búsqueda de cómo impactar de forma más eficiente en la enseñanza-aprendizaje de los estudiantes.

El medio tecnológico proporciona la posibilidad de múltiples interacciones entre las personas y con el conocimiento que está distribuido en diferentes lugares de la red. Para el mejor aprovechamiento de este contexto actual se hace necesario buscar enfoques y modelos de enseñanza- aprendizaje, para respaldar las acciones impulsadas por CLAVEMAT, con el fin de impactar en los proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes; proporcionando herramientas y recursos a los docentes de matemática y a los propios estudiantes a través de una comunidad de aprendizaje sustentada en una plataforma y con ello contribuir a superación de las desigualdades en calidad y cobertura que se evidencian en Chile, (Muñoz y Redondo, 2013, p. 119 (revista Cepal 2013), Ecuador (Amaluisa, 2011), México (Carnoy et al, 2002) y Colombia.

En este trabajo se presentan los procesos de aprendizaje que Illeris (2009) denomina interacciones externas y proceso de adquisición individual y de cómo estas interacciones externas son favorecidas con las tecnologías de la información y las comunicaciones, contribuyendo como un medio para el aprendizaje (Siemens, 2010) y (Castillo, 2008). También se refiere a las dificultades, obstáculos y errores (Socas, 1997) que están implícitos en el proceso de construcción del aprendizaje de las matemáticas y se dan algunas pistas de como minimizarlos.

Referentes teóricos

En el contexto actual, caracterizado por el avance de las tecnologías y las comunicaciones que favorecen al proceso de interacciones del sujeto con todos los componentes de su entorno, que posibilitan opciones de aprendizajes ilimitadas, pero que deben ser ordenadas o discriminadas por el sujeto que aprende.

Según Illeris (2009), el aprendizaje depende de dos procesos: uno de interacciones externas y otro de adquisición individual. Se inicia con impulsos que provienen del medio ambiente o entorno cultural en el que se encuentra el aprendiz y, mediante los procesos de interacción. Luego, en el segundo proceso, el nuevo aprendizaje se relaciona con los aprendizajes previos del estudiante y su carácter biológico, que determinan las posibilidades del cerebro humano para asimilar, estructurar, retener, dar significado y funcionalidad a lo percibido por los sentidos. El segundo proceso de adquisición se divide en dos componentes; uno cognitivo, relacionado con el contenido y otro emocional, relacionado con los incentivos. En consecuencia, el aprendizaje se divide en tres dimensiones que Illeris (2009) denominó: la dimensión del contenido, la dimensión de incentivo y la dimensión social de las interacciones.

En este sentido las dimensiones que plantea Illeris (2009) se ve favorecida por la realidad actual en la cual todo está interconectado y el conocimiento está estructurado y organizado en distintos lugares, listo para ser usado por el sujeto que manifieste interés en aprender o en profundizar un tema específico. Esto hace que este sujeto enfrente situaciones estando más informado y de forma más inteligente (Siemens, 2010). La información puede ser accedida a través de las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC), a las que se les reconoce su beneficio por los diversos recursos que ofrecen y por la posibilidad de formar redes o ser parte de comunidades virtuales.

La tecnología en su proceso de apropiación[2] han permeado todos los grupos sociales y a sus instituciones, impactando positivamente; es así,

[2]Tomar algo ajeno a la cultura o contexto y hacerlo propio (Bonfil Batalla, 1984) y (Subercaseaux, 2009)

que hoy son vistas en el campo de la educación, como un medio que permite mejorar la enseñanza-aprendizaje, Castillo (2008) citado en López et al (2010) en las distintas disciplinas, donde la utilización de Recursos Educativos Abiertos[3] es concebida como un apoyo motivador para los estudiantes en su proceso de aprendizaje. Es por ello que la inclusión de la tecnología en la educación es algo fundamental, pero requiere que el docente se apropie de la TICs y de esta forma obtenga la autonomía suficiente para que sea utilizada de forma eficiente en el proceso de enseñanza aprendizaje.

En el proceso de aprendizaje del estudiante, como plantea Illeris (2009) se requiere un proceso de adquisición individual que incluya impulsos de la interacción. En este proceso las nuevas impresiones se relacionan con los aprendizajes previos, de igual forma como sostiene Socas (1997), el aprendizaje nuevo es caracterizado, organizado y estructurado por el aprendizaje antiguo. En este proceso se pueden evidenciar dificultades que suelen tener los estudiantes al aprender, que hace necesario advertir a los docentes de las dificultades, obstáculos y errores que aquellos tienen al aprender matemáticas.

Según Socas (1997) las dificultades pueden estar asociadas: a la complejidad de los objetos de las matemáticas, a los procesos de pensamiento matemáticos, a los procesos de enseñanza, a los procesos de desarrollo cognitivos de los estudiantes y a actitudes afectivas y emocionales de los estudiantes hacia las matemáticas. Los obstáculos en el currículo de matemáticas son los conocimientos adquiridos y no una falta de ellos. Estos conocimientos, en un determinado contexto son efectivos, pero en otros pueden generar respuestas inadecuadas, incluso incorrectas. El error se considera como la presencia de un esquema cognitivo inadecuado y no aparece por azar, sino en un marco conceptual consistente, basado sobre los conocimientos previos o como plantea Vergnaud (1990) expresa el carácter incompleto de su conocimiento, que permite al profesor crear una instancia de aprendizaje.

La identificación de las dificultades, obstáculos y errores frecuentes que dan en un determinado contenido matemático, permite que el docente se anticipe estratégicamente con tareas matemáticas y recursos que ayuden a disminuir los errores originados de las dificultades y obstáculos cognitivos que los estudiantes tienen en su proceso de construcción y reconstrucción de estructuras mentales.

Un individuo que aprende matemáticas debe construir los conceptos a través de las interacciones con los objetos matemáticos y con los sujetos (Castillo, 2008), para ello la inclusión de las TIC con todas sus posibilidades en una comunidad virtual son un apoyo importante para aprender, compartir, interactuar, contribuyendo al desarrollo individual y social de profesores y estudiantes. De esta forma las interacciones se dan con todos los elementos del núcleo pedagógico , afianzan: la apropiación de las tecnologías de la información y las comunicaciones e

[3] Los Recursos Educativos Abiertos los define la fundación "William and Flora Hewlett Foundation" en (Burgos, 2010, p.15) como: "Recursos destinados para la enseñanza, el aprendizaje y la investigación que residen en el dominio público o que han sido liberado bajo un esquema de licenciamiento que protege la propiedad intelectual y permite su uso de forma pública y gratuita o permite la generación de obras derivadas por otros. Los REA se identifican como cursos completos, materiales de cursos, módulos, libros, videos, exámenes, software, y cualquier otra herramienta, materiales o técnicas empleadas para dar soporte al acceso del conocimiento" (Atkins, Brown, y Hammond, 2007, p.4).

incrementan los conocimientos y habilidades que aporten al proceso pedagógico[4] de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

Metodología

En esta sección se describe la metodología seguida por CLAVEMAT para lograr sus objetivos. En primer lugar, se tuvo que adoptar un paradigma pedagógico. En esta etapa se discutieron las posturas constructivistas, que formarían parte de la propuesta pedagógica, adoptando finalmente el modelo constructivista de Illeris (2009). En segundo lugar, se procedió a seleccionar una plataforma para el aprendizaje, para lo cual se utilizaron los siguientes criterios: tenía que ser de uso libre, amigable con el usuario o intuitiva, y adaptable a la propuesta pedagógica y a los requerimientos del grupo objetivo. A continuación, se tuvo que adaptar la plataforma a los propósitos del proyecto y a las necesidades del grupo objetivo. En esta etapa se analizaron los requerimientos del grupo objetivo y la concordancia con el modelo pedagógico y de acuerdo a estos criterios se instalaron *plugins* de uso libre, para adicionar funcionalidades a la plataforma. En tercer lugar, se procedió a la conformación de una comunidad virtual para el aprendizaje, a través de la creación de cursos y grupos. En efecto, para comenzar a conformar la comunidad virtual se creó un curso para tutores, luego se creó uno para docentes de Ecuador, Colombia y Chile denominado #cmat12, que contó con 270 participantes. Luego se realizó el curso #cmat13, que tuvo 273 participantes y posteriormente el curso #cmat14, el que tuvo 335 participantes. En general, estos cursos estuvieron enfocados en afianzar competencias tecnológicas, didácticas, disciplinares y tutoriales, según lo planteado por Marcelo (2001) en Castillo (2008). Para la difusión de los cursos y de la plataforma se procedió a la creación de la página web del proyecto, a la creación de cuentas en redes sociales, a la difusión en los medios de comunicación, a la escritura de boletines informativos y a la realización de talleres dirigidos a docentes y estudiantes. Otra componente fundamental fue la conducción de un proceso de apropiación tecnológica el cual fue necesario realizar, porque las personas del grupo objetivo tenían que interiorizarse de las funcionalidades que ofrece la plataforma antes de comenzar un curso, para lo cual se utilizaron videos tutoriales, guías escritas de exploración, mensajes de correos electrónico, foros de discusión y blogs, entre otros. También se incentivó a los participantes a formar grupos de interés en torno a temas matemáticos de interés común. Finalmente, fue necesario ejecutar un proceso de acompañamiento en requerimientos tecnológicos y de orientación en contenidos de aprendizaje.

Resultados

Los principales resultados de CLAVEMAT han sido los siguientes:

[4]El Núcleo pedagógicos está formado por tres elementos: Estudiante, docente y contenidos de aprendizaje. (Elmore, 2010)

1) La conformación de una comunidad virtual de aprendizaje y enseñanza de la matemática que posee más de 3600 integrantes entre docentes y estudiantes de enseñanza secundaria y terciaria, los que se encuentran distribuidos en 56 grupos de interés en torno a temas matemáticos.

2) La adecuación de una plataforma informática, que utiliza sólo software de uso libre.

3) Se han beneficiado a 858 docentes de Ecuador, Colombia y Chile a través de tres cursos virtuales (#cmat12, #cmat13 y #cmat14).

4) Un curso piloto dirigido a estudiantes en transición hacia la educación superior que benefició a 103 estudiantes.

5) La implementación de un programa de tutorías virtuales y presenciales. Las tutorías presenciales en la Universidad Católica de Temuco han beneficiado a más de 1000 estudiantes. Esto ha influido en los índices de retención de estudiantes de primer año de universidad.

6) Ejecución de 30 talleres desde la Universidad Católica de Temuco y 100 talleres aproximadamente en todo el consorcio.

Conclusiones

Las acciones pedagógicas que se realizan al interior de la comunidad virtual deben estar respaldadas por un marco teórico idóneo. Por otro lado, la apropiación tecnológica es esencial para proveer a los miembros de la comunidad virtual de competencias tecnológicas necesarias para que participen con autonomía y de este modo gestionar aprendizajes de mejor calidad. Por ejemplo, los docentes deben alcanzar competencias didácticas que les permitan utilizar herramientas tecnológicas de la información y las comunicaciones para diseño, planificación ejecución del proceso de enseñanza y aprendizaje en ambientes virtuales.

CLAVEMAT, como ambiente virtual, ha mostrado ser una herramienta útil para conducir procesos tutoriales de enseñanza y aprendizaje de la matemática, minimizando barreras geográficas, culturales o sociales.

La reflexión de las dificultades, obstáculos y errores, hace que el docente sea consciente del proceso y los pueda anticipar estratégicamente proporcionando tareas y recursos que permitan disminuir esta barrera en los estudiantes.

Referencias

Amaluisa, C. (2011). Rezago educativo: barrera a vencer para el Buen Vivir. Contrato Social por la Educación. Quito.

Burgos, J. (2010). Aprovechamientos de los Recursos Educativos Abiertos en un Ambiente Enriquecidos de Tecnología. México.

Carnoy, M, Santibañez, L. Maldonado, A. Ordorika, I. (2002) Barreras de entrada a la Educación Superior y a oportunidades profesionales para la población idígena Mexicana. Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, 32 (3), 9-43.

Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Revista latinoamericana de investigación en matemática *educativa, 11(2), 171-194.*

Elmore, R. (2010). Mejorando la escuela desde la sala de clases. Fundación Chile.

Illeris, K. (Ed.). (2009). Teorías contemporáneas de aprendizaje: los teóricos del aprendizaje... en sus propias palabras. Routledge.

Muñoz, M. R.: Educación superior y pueblos indígenas en América Latina y El Caribe, en: Informe UNESCO 2007.

Siemens, G. (2010). Conectivismo: una teoría de aprendizaje para la era digital. En Aparici, R. "Conectados en el ciberespacio". UNED. Madrid. pp. 77 - 91.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. In La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 125-154). Horsori.

Subercaseaux, B. (2009). Reproducción y Apropiación: Dos modelos para enfocar el diálogo intercultural. Revista diálogo de la comunicación n°23 Perú.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. Recherches en Didáctique des Mathématiques, 10 (2, 3), 133-170.

LEXMATH un hipermedio adaptativo para el aumento del léxico en matemática

Pedro Salcedo Lagos, Ociel López Jara, María del Valle
Universidad de Concepción, Chile
psalcedo@udec.cl; mdelvall@udec.cl; ociellopez@udec.cl

Resumen

Los sistemas hipermedia adaptativos, en el campo de la educación, son aquellos que utilizando técnicas de inteligencia artificial y conocimiento del usuario, son capaces de adaptar el contenido a entregar y la interfaz a las necesidades de cada usuario.

En este trabajo se presenta la herramienta LEXMATH, un sistema hipermedia adaptativo que utilizando el léxico disponible permite adaptar las actividades y contenidos.

Fundamentación Teórica.

Sistemas Hipmediales Adaptativos.

Los sistemas hipermedias adaptativos (HA) son herramientas que basadas en el hipertexto y la hipermedia son capaces de adaptarse en varios aspectos visibles del sistema a las características del usuario (Brusilovsky, 1998). En otras palabras, un sistema de estas características podría adaptar tanto la información presentada como los enlaces disponibles para cada usuario, ayudando a este a su navegación, ofreciendo sugerencias sobre los enlaces más relevantes o bien añadiendo comentarios adicionales a los enlaces disponibles.

Estos sistemas se basan en los principios de los Sistemas Tutoriales Inteligentes, los cuales cuentan con tres componentes: un módulo del dominio, con el conocimiento del área a enseñar; un módulo del alumno, encargado de llevar un modelo del conocimiento del alumno y de sus características psicosociales y un módulo tutor, en el que se manejan las estrategias de enseñanza o reglas de adaptabilidad a los contenidos y a los conocimientos del alumno. Estos componentes o bases de conocimientos son tratados a través de distintas técnicas de inteligencia artificial (IA) para adaptar el sistema.

Entre las experiencias a considerar en el desarrollo de un SHA, encontramos la de Salcedo (2009), "Knowledge-BasedSystems: A Tool for Distance Education", trabajo en el que se describe el desarrollo de una plataforma de e-Learning(Mistral) que adapta las estrategias de enseñanza al modelo de alumno, utilizando diversas técnicas de Inteligencia Artificial; destaca el estudio de los último SHA y los principios que se utilizan en su desarrollo.

Lamentablemente, si pensamos en dar a estos sistemas un uso educativo vemos que también tienen algunos inconvenientes (Bruillard, 1994):

> El riesgo de que el alumno se pierda en la red de informaciones. Si el dominio es demasiado extenso o detallado, la libertad de navegación puede hacer que el alumno no alcance las materias que le interesan, o que deje estudiar otras debido a que no sabe siquiera que existan en el hiperespacio, o que se desespere por no saber en qué momento ha aprendido ya todo lo que necesita.

> Desde el punto de vista pedagógico, no hay posibilidad de evaluar la instrucción recibida por el alumno, ni de adaptar la información al nivel de conocimientos del alumno, lo que disminuye el potencial didáctico del uso de los hipermedias. La información que contienen los hipermedias tradicionales es estática, esto es, no depende de las características del usuario, ni del conocimiento adquirido. Esto puede suponer, bien un acceso tedioso a lo largo de conceptos simples para un experto, o bien todo lo contrario: un cambio de tema con sólo las partes clave puede dejar descontento a un usuario novato.

Actualmente, la producción de material hipermedia educativo por parte de profesores y pedagogos es muy costosa, sobre todo en tiempo. No solo para aprender a manejar estos sistemas, sino para preparar y desarrollar el material en una manera no-secuencial. Mientras los sistemas hipermedia no proporcionen un apoyo más cercano al mundo educativo, los expertos no podrán producir aplicaciones de una manera continua y cómoda.

El Léxico Disponible (LD).

El léxico que utilizan los hablantes de una determinada lengua en diferentes situaciones, está siendo estudiado desde el año 1953 por distintos lingüistas (Michéa, 1953), utilizándose hoy el término "léxico disponible" para referirse a las palabras que se presentan en la mente del hablante de forma inmediata y natural cuando se trata de un determinado tema (Echeverria, Urzua & Saez, 2006).

El léxico es un "elemento clave en la comprensión y producción del conocimiento" (AH2000, 2000). Los estudiantes manejan cierto léxico que les permite comunicarse, pero no el suficiente para comprender de forma adecuada textos con temáticas específicas como los del ámbito escolar (por ejemplo, un libro de matemáticas). Esto se debe al deficiente vocabulario de este tipo de textos y a su incidencia en los procesos de lectura y escritura. El léxico es parte esencial del conocimiento lingüístico y su "manejo instrumental pleno", resulta fundamental en los niveles de aprendizaje (Brooks &Vezza, 1989). Desde un marco psicológico más amplio (Bruillard,1994), el léxico es fundamental en el proceso de apropiación del saber, puesto que mejora el desempeño curricular de los estudiantes y es "la herramienta cognitiva" que les permite entrar en diferentes áreas del conocimiento.

La léxico-estadística es la ciencia que se encarga de contabilizar y dar a conocer el uso real del lenguaje (tanto oral como escrito) en ciertas temáticas, en un grupo común de hablantes, o bien, de los hablantes pertenecientes a una región geográfica determinada (Anderson,1990). Entonces, por medio de esta ciencia es posible saber, medir, conocer el léxico de cierto grupo de personas. Al principio la léxico-estadística obtenía la frecuencia de las palabras extraídas de textos con no más de mil lexías, luego se diferenciaba entre palabra y vocablo (palabras diferentes), y las listas de frecuencia obtenidas daban a conocer los vocablos que se utilizaban, cuál era el que más se ocupaba y cuál era el menos usado. Se pueden distinguir dos tipos de léxico, que juntos forman el léxico fundamental de una lengua; el léxico básico: formado por las palabras que más se utilizan cotidianamente, y el léxico disponible: formado por las palabras, que aunque no se utilicen con frecuencia, se recuerdan y utilizan de acuerdo al tema específico que se esté tratando.

Fue Michea (1953) el primero en separar palabras frecuentes (o atemáticas) de palabras disponibles (o temáticas). Las palabras frecuentes se pueden encontrar en cualquier texto con un número moderado de páginas y sin importar su contenido, como adjetivos, verbos y sustantivos comunes (o nombres muy generales); en cambio las palabras disponibles se relacionan con cierto tema y son, en su mayoría, palabras concretas.

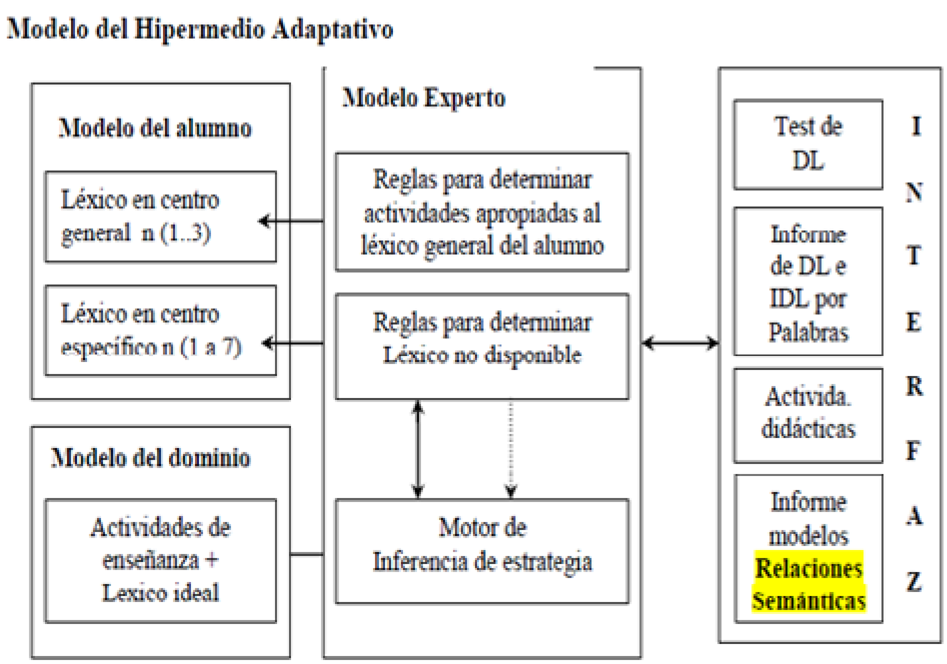
El léxico disponible se obtiene a través de encuestas, donde por un estímulo se intenta que el informante actualice su lexicón mental, que según Emmorey y Fromkin (Emmorey,1988) es el "componente de la gramática que contiene información de las palabras necesarias para el hablante"; esta información de las palabras se ha obtenido mediante información fonológica, morfológica, sintáctica y semántica (significado o estructura conceptual). Según Hall (1992) las palabras en el lexicón mental se adquieren y/o retienen sobre la base de su pronunciación, ortografía, marco sintáctico y concepto o significado de la palabra.

Propuesta de medición y análisis de LD en un HA.

El Léxico en LexMath un HA

Al considerar las limitantes mencionadas sobre los HA y las ventajas de conocer el lexicón mental de un estudiante o grupo determinado, es posible estudiar modelos que incluyan el léxico en el modelo del usuario de un HA.

En la Fig. 1 se presenta el modelo del HA – Lexmath.com (Fondecyt 1120911, 2013) el cual ha sido desarrollado para considerar la adaptabilidad de las actividades didácticas a las necesidades propias de cada alumno, a través



del léxico disponible.

Figura 1: modelo de un Hipermedio adaptativo basado en el Léxico.

El Hipermedio Adaptativo LexMath cuenta con 4 componentes bien definidos, como muestra la figura 1, los cuales interactúan para presentar al usuario un hipermedio según sus necesidades léxicas.

- Componente Modelo del Alumno: compuesto por las bases de datos encargadas de mantener la disponibilidad léxica de cada alumno, tanto en los centros de interés generales como en los específicos.

- Componente Modelo del Dominio: compuesto por las bases de datos asociadas a los medios y actividades apropiadas, según la propuesta didáctica, para el aumento del léxico disponible en los distintos centros de interés, además del léxico ideal que se obtendrá de la aplicación de la misma encuesta a los docentes.

- Componente del modelo experto: compuesto por todas las reglas necesarias para determinar el léxico general del alumno y el léxico no disponible. Además del motor de inferencia, el cual es el encargado de extraer las actividades apropiadas en función del modelo del alumno y del modelo del dominio.

- Interfaz: a través de este componente se recopila el léxico, se presentan las actividades personalizadas y se emiten informes. Entre los informes se encuentran los estadígrafos (del léxico estadística) y los modelos de Relaciones Semánticas, que es el módulo que a continuación se presenta:

El software LexMath (http://www.lexmath.com) cuenta con una serie de características, que permiten seguir avanzando en el estudio de la DL, entre las que podemos destacar; el test de DL de dos minutos es posible tomarlo en forma online, previa invitación a los alumnos por correo electrónico, el sistema automáticamente genera reportes con todos los índices que se requieren para estudiar un centro específico; promedio de palabras, palabras diferentes, índice de cohesión y el principal, el índice de disponibilidad léxica (IDL) de cada palabra, el cual al ordenarlo de mayor a menor nos entrega el lexicón mental de una comunidad. A esto se le debe agregar la característica del software de generar las estructuras semánticas por medio de grafos (fig.2).

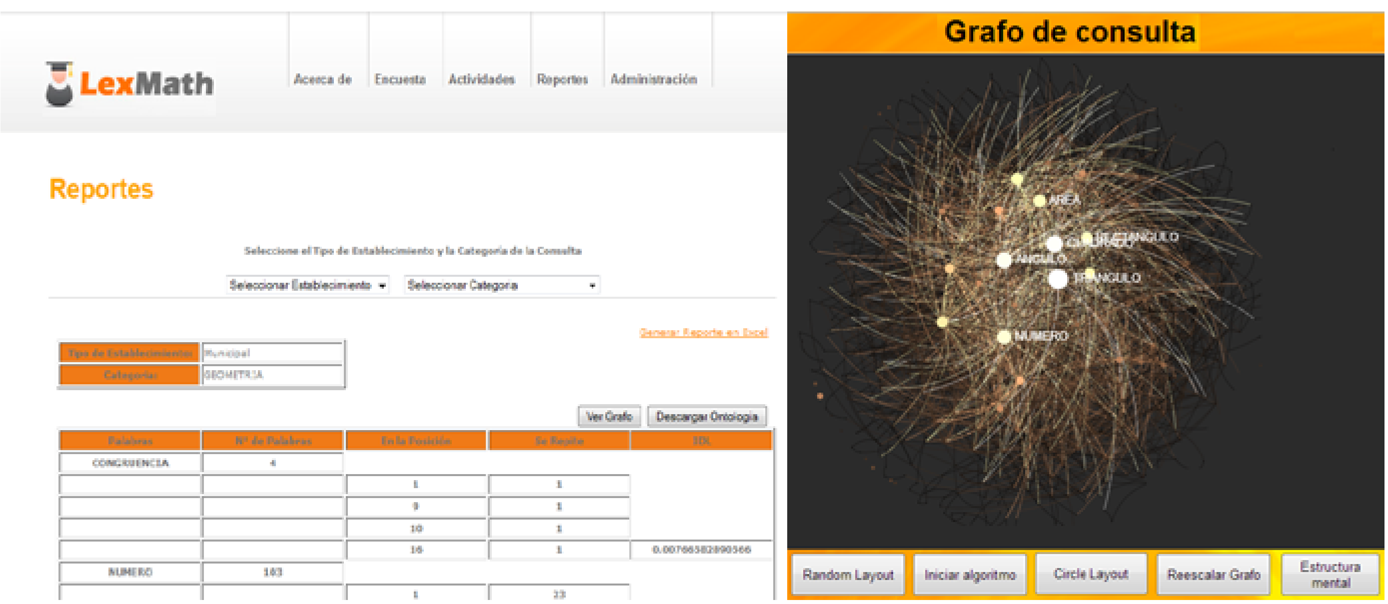


Figura 2: "Pantallas de LexMath donde se observan los reportes del LD y del IDL y los grafos que presentan las estructuras semánticas"

Metodología empleada

Para mostrar las cualidades de LexMath y realizar las pruebas de funcionamiento se ha tenido por objetivo el de cuantificar y describir el léxico disponible en Álgebra que posee una muestra de alumnos de la carrera de Pedagogía en Matemática y Computación de la Universidad de Concepción de Chile en la categoría Álgebra en los 5 niveles de la carrera, en el año 2014.

La muestra

La muestra corresponde a 117 alumnos de Pedagogía en Matemática y Computación de la Universidad de Concepción, 35 de 1er año, 12 de segundo año, 24 de tercer año, 34 de cuarto y 12 que se encuentran finalizando con su tesis o práctica.

Variables

- Variables lingüísticas (o dependientes): el léxico disponible en el centro de Álgebra
- Variables extralingüísticas (o independientes): Nivel escolar.

La encuesta

A los 117 estudiantes se les aplicó una encuesta para recopilar el léxico que disponían en relación con el eje de Álgebra. La encuesta fue aplicada en papel, los alumnos tuvieron 2 minutos para escribir todas las palabras que le venían a la mente.

Aplicando LexMath

En la Tabla 1 se presenta un extracto del resultado final, donde se observa el lexicón mental, que resulta de ordenar el IDL de mayor a menor, de las primeras 10 palabras que mencionaron los alumnos, especificando los estadígrafos principales de cada nivel.

Las funcionalidades destacables de LexMath se pueden apreciar en esta etapa, ya que para realizar los cálculos del IDL se requiere muchas horas de trabajo y el sistema lo entrega en forma automática. Además de ordenar por el IDL de mayor a menor, lo que genera el sistema es el Lexicón Mental, que como se mencionó corresponde al léxico latente que tiene un grupo determinado en un área específica. Por último, el software entrega los principales estadígrafos del léxico que son: palabras en promedio, índice de cohesión, y palabras diferentes.

Resultados

Tabla 1: primeras 10 palabras del lexicón mental en Álgebra de los 5 niveles de la carrera de Ped. En Mat. y Comp. de la Universidad de Concepción.

	1er año	IDL	2do año	IDL	3er año	IDL	4to año	IDL	5to año	IDL
1	NÚMERO	0,772200886	NÚMERO	0,47583333	NÚMERO	0,68337417	ECUACIÓN	0,55262098	NÚMERO	0,47674643

	1er año	IDL	2do año	IDL	3er año	IDL	4to año	IDL	5to año	IDL
2	ÁLGEBRA	0,250380017	BASE	0,32963457	LETRA	0,29490575	NÚMERO	0,51084532	EXPRESIÓN ALGEBRAICA	0,3021306
3	MATRIZ	0,180536117	SUMA	0,25925349	ECUACIÓN	0,23657323	INCÓGNITA	0,51013486	TÉRMINO	0,28644434
4	INCÓGNITA	0,171344492	ECUACIÓN	0,25	SUMA	0,23625443	VARIABLE	0,24220882	ECUACIÓN	0,22631229
5	ADICIÓN	0,15740216	RESTA	0,23332814	INCÓGNITA	0,22762506	SUMA	0,2319477	GRADO	0,18686877
6	ECUACIÓN	0,149128286	MULTIPLICA-CIÓN	0,22667766	ÁLGEBRA	0,21599949	SISTEMA	0,21652531	DECIMAL	0,17905654
7	MULTIPLICA-CIÓN	0,142610794	DECIMAL	0,21590439	RESTA	0,19534163	RESTA	0,19609213	SISTEMAS NUMÉRICOS Y ÁLGEBRA	0,16666667
8	ORDEN	0,138528286	VARIABLE	0,21075	NATURALES	0,16037728	MULTIPLICA-CIÓN	0,18935793	CONJUNTO	0,15833333
9	SISTEMA	0,134269743	ENTEROS	0,20483333	OPERACIÓN	0,15040002	POLINOMIO	0,15883365	NATURALES	0,15378504
10	CONJUNTO	0,127887429	BINARIO	0,18275028	REALES	0,14312648	OPERACIÓN	0,14764813	ÁLGEBRA	0,15083333

Conclusiones

La Hipermedia Adaptativa con aplicaciones en educación debe ser capaz de mantener un modelo del usuario lo más real posible para ser efectiva. La posibilidad de incluir en el modelo del usuario el léxico mental de un estudiante, permite generar adaptabilidad centrada en los preconocimientos de este y el lenguaje que se utiliza en su contexto para entender la realidad inmediata.

El software que hemos desarrollado (LexMath) permite adquirir el léxico de un alumno y por consiguiente el lexicón de un grupo, para luego estudiarlo a través de grafos, estadígrafos y métricas, y proponer con esta información las actividades más apropiadas para el alumno.

Agradecimientos

Proyecto de Investigación - Fondecyt 1140457 “Plataforma Adaptativa online para el fortalecimiento de las competencias matemáticas y pedagógicas a partir del estudio

léxico semántico de estudiantes y profesores de pedagogía en matemática", de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Chile.

Referencias

AH2000 (2000). International Conference on Adaptative Hypermedia and Adaptative Web-based Systems. Trento, Italia, Agosto 2000. Actas 2000. Actas disponibles en http://AH2000.itc.it

Anderson, J.R., Boyle, C.F., Corbell, A.T. y Lewis, M.W. (1990). Cognitive Modeling and Intelligent Tutoring/Artificial Intelligence, 42, 7-50.

Brooks A. and Vezza P. (1989). Inductive analysis applied to the evaluation of a CAL tutorial. Intreracting with Computers, 1 (2), 159-170.

Bruillard E. y De la Passardiere B. (1994). Hipermedias et Éducation des Repéres. Sciences et Techniques éducatives, 1 (1), 17-37.

Brusilovsky P., Kobsa A., Vassileva J. (eds.) (1998). Adaptative Hypertext and Hipermedia. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 1-43.

Echeverría, M., Urzua, P., Saez, K. (2006). Disponibilidad Léxica Matemática. Análisis cuantitativo y cualitativo. Revista de Lingüística Teórica y Aplicada Concepción (Chile), 44 (2), II Sem. 2006, pp. 59-76. Universidad de Concepción, Chile.

Emmorey, K. & V. Fromkin (1988). The Mental Lexicon, en F. Newmeyer (ed.) Linguistics: The Cambridge Survey Vol. III, Cambridge: CUP.

Fondecyt 1120911 (2013). Disponibilidad Léxica Matemática en Estudiantes de Enseñanza Media y su Aplicación en Hipermedios Adaptativos, http://www.lexmath.com. Investigadores; Pedro Salcedo L., Maria del Valle L., Anita Ferreira C., Oscar Nail

Fondecyt 1140457 (2014). Plataforma Adaptativa online para el fortalecimiento de las competencias matemáticas y pedagógicas a partir del estudio léxico semántico de estudiantes y profesores de pedagogía en matemática. Investigadores; Pedro Salcedo, Maria del Valle, Anita Ferreira,Gamal Cerda, Miguel Friz.

Hall, J.H. (1992). Morphology and Mind. Londres: Routledge.

Michéa, R. (1953). Mots fréquents et mots disponibles. Un aspect nouveau de la statistique du langage, en Les langues modernes, 47, 338-344.

Salcedo L., Pedro; Pinninghoff J., María; Contreras A., Ricardo (2009). Knowledge-Based Systems: A Tool for Distance Education. Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag (2009).

SOCHIEM

2016