REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

RECHIEM

VOLUMEN 9
1
2015
ISSN 0718-1213

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diseño y Diagramación de la Edición Digital

Editorial Gráfica: Duográfica Ltda
Contacto: rechiem@sochiem.cl

Revista Chilena de Educación Matemática RECHIEM

VOLUMEN 8 N° 1-2014
ISSN N° 0718-1213

Revista RECHIEM, es una publicación de la Sociedad Chilena de Educación Matemática.
Las opiniones señaladas en notas o artículos firmados no representan las del Comité Editorial ni de la Sociedad.
LA dirección se reserva el derecho de publicar o sintetizar los artículos que estime conveniente. Correspondencia dirigirla a: rechiem@sochiem.cl

RECHIEM©
Inscripción N°143.059
ISSN n°0718-1213

Diseño de portada: Miguel Díaz Flores
Diseño y Diagramación (Edición Digital): Duográfica Ltda.
Noviembre 2015

Índice de contenidos

Índice de contenidos

Editorial

El modo en que los sistemas educativos, preparan a los estudiantes, para que puedan desempeñar un papel como ciudadanos activos, se considera un dato importante sobre el desarrollo de una sociedad.

La Revista Chilena de Educación Matemática, RECHIEM, publica distintas visiones respecto a dicho desarrollo, con los aportes que se hacen en las diferentes Jornadas Nacionales de Educación Matemática, permitiendo la realización de reflexiones y análisis, tanto de los indicadores de calidad, como los modelos, los análisis epistemológicos -con los que se expresan los sistemas educativos- como también alcanzar esa concreción, siendo ella una de las finalidades principales de la evaluación PISA/ OCDE, del carácter cíclico y de control y gestión desarrollado tanto por el MINEDUC, como por las Sociedades Científicas, lo que permite generar indicadores de los logros en la Educación Matemática.

Los debates que transforman y condicionan el momento educativo actual, demandan a la sociedad chilena una reflexión estratégica de largo alcance sobre sus necesidades educativas, abren, sin duda, muchas cuestiones y plantean nuevos problemas. Reconocer debilidades y carencias, establecer medidas que ayuden a superar las actuales amenazas al sistema educativo, potenciar sus fortalezas y aprovechar las oportunidades que para el desarrollo de la educación ofrece una sociedad moderna y económicamente desarrollada y equitativa, deben orientar las actuaciones presentes en el actual debate en Chile.

Nuestra intención, en este volumen, es contribuir con los trabajos de investigadores nacionales e internacionales, aportando las ideas relativas a la Formación Inicial de profesores de Matemática, basadas en nuestra experiencia profesional y nuestro conocimiento como responsables de la organización y desarrollo de los distintos programas de dicha formación inicial existentes en el país.

Por otra parte, los trabajos presentados aquí apuntan a la capacidad individual para identificar y entender el papel que la Matemática tiene en el mundo, hacer juicios de fundados y usar e implicarse con la formación de nuestros estudiantes, en aquellos momentos en que se presenten necesidades en la vida de cada individuo como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.

Carlos Silva Córdova
Presidente
Sociedad Chilena Educación Matemática - SOCHIEM

Matemática Educativa, Latinoamérica, adherencia e identidad disciplinar

Héctor Silva Crocci
hector.silva.c@usach.cl
Universidad de Santiago de Chile

Resumen

Los matemáticos educativos en formación, latinoamericanos, están en desventaja ante un fenómeno que provoca de manera natural aferrarse a los conceptos, metodologías o teorías del campo de la Matemática Educativa sin cuestionar ni preguntar, por ejemplo, ¿cómo se construyó? y ¿para qué se construyó? Este fenómeno no sólo estaría afectando al matemático educativo en formación, sino que también a los programas que cultivan la disciplina en la región. Asumiendo que estos procesos disciplinares son una construcción social producto de la organización del humano, el foco del documento se dirige hacia aspectos que inciden en la construcción de la *variedad teórica* de un *programa de investigación* de matemáticos educativos inserto en la cultura latinoamericana. Para ello se estudia el *proyecto de investigación* de un matemático educativo en formación.

Preámbulo

Este trabajo ha cimentado su objetivo en el estudio de aspectos que inciden en los procesos de constitución de la variedad teórica en un programa de investigación, latinoamericano, de matemáticos educativos. En el marco de develar estos aspectos, hemos manifestado el interés de contrarrestar al *fenómeno de adherencia* que podría afectar los diferentes ámbitos académicos, ya sea en la producción, los proyectos de difusión y vinculación, así como a los matemáticos educativos en formación, que constituyen a los programas de investigación de la Matemática Educativa en Latinoamérica, según sea el caso (Silva-Crocci, 2010; Cordero y Silva-Crocci, 2012; Silva-Crocci, 2014).

Reconocer el *fenómeno de adherencia* nos ha conllevado plantear la idea de que si no hay un programa de investigación con sensibilidad latinoamericana, no se organizará un frente de resistencia a los obstáculos que provoca dicho fenómeno. Bajo este tipo de reflexiones en torno al cuestionamiento de la construcción y de la usanza del conocimiento disciplinar, de porqué usar una perspectiva teórica con respecto a otra, nos aproximamos al objetivo antes señalado.

Matemática Educativa: Variedad de perspectivas teóricas

La juventud disciplinar de la Matemática Educativa permite tener una nítida caracterización de la evolución de sus problemáticas de estudio en torno a la construcción de la matemática escolar. En este sentido, Cantoral y Farfán (2003) nos brindan un panorama significativo de tal evolución. Señalan visiones prematuras, y algunas veces ingenuas, que soslayan elementos que hoy en día son reconocidos como fundamentales para la interpretación de las problemáticas que estudia la disciplina.

Conforme a esta evolución emerge una amplia variedad de perspectivas teóricas en las cuales subyace, explícita o implícitamente, una problemática fundamental que depende de la posición epistemológica que se haya asumido para ofrecer posibles formas de construir la obra que compone la matemática escolar (Cordero, Gómez & Viramontes, 2009; Silva-Crocci, 2010, Cordero & Silva-Crocci, 2012).

Por ejemplo, unas perspectivas teóricas son alusivas a la representación de conceptos, o construcciones mentales de conceptos, y otras relativas a situaciones específicas con una secuenciación para construir conceptos. Esto es, el estudiante tendrá que transitar por diferentes representaciones, o bien pasar de un nivel de construcción mental a otro, o en su caso reconocer y afrontar la contradicción para continuar con la secuenciación de la situación (Cordero, 2008). En este marco, el énfasis epistemológico para interpretar la construcción de la matemática escolar queda anclado a una epistemología que apunta hacia la construcción de conceptos y estructuras matemáticas como la parte fundamental del proceso de enseñanza y de aprendizaje.

Nuestra comunidad en estudio se ha planteado que el *discurso Matemático Escolar* (*dME*) define la problemática fundamental de los procesos vinculados a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Con la teoría socioepistemológica se propone un rediseño de ese *dME* con base en la construcción social del conocimiento matemático (Gómez, Silva-Crocci, Cordero y soto, 2014).

Tal problemática emerge puesto que el *dME*, interpretado desde su construcción social, es la expresión de una epistemología dominante anclada a la construcción de estructuras conceptuales, situación que conlleva fenómenos como la exclusión, la opacidad y la adherencia: Es, por un lado, la imposibilidad de participar en la construcción del conocimiento matemático; por otro lado, es la negación de la pluralidad epistemológica del conocimiento matemático; y por otro, no permite cuestionar ni trastocar la matemática escolar (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, en prensa).

Bajo este marco, con la obra generada por esta comunidad se busca rediseñar la matemática escolar cuya construcción se fundamenta en una epistemología dominante establecida desde los conceptos y estructuras matemáticas, con la intención de generar otra matemática escolar que incorpore a su construcción fundamentos epistemológicos con base en las prácticas sociales que han hecho emerger los conceptos.

De acuerdo con nuestra premisa (Silva-Crocci, 2010; Cordero & Silva-Crocci, 2012; Silva-Crocci, 2014) tal perspectiva es fruto de una construcción social al seno de la comunidad que constituyó un programa de investigación latinoamericano con una identidad disciplinar que les ha permitido compartir entre sus miembros una postura epistemológica en la búsqueda de mejorar la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

La identidad disciplinar en un programa de investigación

Con la intención de develar estas ideas, argumentando desde el *quehacer disciplinar* del *programa de investigación* socioepistemológico, hemos inferido dos ejes fundamentales en la organización de este programa que expresamos con la noción de *identidad disciplinar*. Por un lado, esta noción conlleva de manera inherente a la *identidad* como un frente que le hace resistencia a la carga peyorativa que heredó el pensamiento latinoamericano ante el mundo; por otro, con su *fuente de sentido* consensúa en los diferentes *proyectos de investigación,* la cual hemos asociado al *dME*, la génesis de la problemática que concierne a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar (Silva-Crocci, 2014).

La noción de *fuente de sentido* expresa un consenso ante la problemática que, en efecto, norma la configuración de los diferentes *proyectos de investigación* inscritos al programa. Esta idea nos llevó a conjeturar que en el estudio de la configuración de la hipótesis, que establecen los *proyectos de investigación* como suposición de algo para sacar de ello una consecuencia, se develaría el uso de la *fuente de sentido* que suministra el *programa de investigación* que le cobija.

Estudio de caso: Configuración de un proyecto de investigación y la resignificación de la hipótesis

Se tomó como estudio de caso a un *proyecto de investigación* inscrito al *programa de investigación* socioepistemológico. Se clasificó la producción, configurada en el periodo inscrito al programa, en cuatro situaciones que denotan la evolución de la hipótesis. En el tránsito del análisis, entre situaciones, se develó el uso de la *fuente de sentido* que le suministró el *programa* en cuestión. Develar este hecho nos dio indicios de que la *fuente de sentido* de un *programa de investigación,* latinoamericano, suministra a los *proyectos de investigación* inscritos a éste una problemática específica que, en efecto, organiza los objetivos a seguir, los obstáculos a evitar y el modo de operar en la producción.

Para observar estos procesos se categorizó la producción del estudio de caso en cuatro situaciones, en las que a su vez se entrelazan diferentes argumentos, que develan la resignificación de la hipótesis. Respecto a las situaciones podemos señalar:

- La deserción escolar;
- El fracaso o exclusión en matemáticas;
- El *discurso Matemático Escolar* como un sistema de razón que provoca exclusión;
- El tránsito dialéctico exclusión-inclusión entre el *discurso Matemático Escolar* y la construcción social del conocimiento matemático.

En este documento presentaremos sólo el análisis de la situación I.
La situación I asociada a la hipótesis del *proyecto de investigación* en estudio, la inferimos en el documento que hemos llamado D1[1]. Este documento es producto de un ensayo que fue desarrollado en el Seminario de Investigación en Matemática Educativa I[2].

1 Deserción escolar: una mirada desde la Socioepistemología. Soto-Soto, D. y Jaso, G. (2008).

2 El seminario está inscrito al Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, del Área de Educación Superior, del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. El seminario fue dirigido por el Dr. Francisco Cordero Osorio en el periodo agosto-diciembre del año 2008.

De acuerdo con lo declarado en el Programa de Maestría del Área de Educación Superior, en este seminario se profundiza una problemática específica cuyo objetivo es incorporar a los estudiantes en formación en una de las líneas que se desarrollan en el área. Al término del semestre el estudiante tiene que presentar su problema de investigación en un documento escrito enmarcado en una de las líneas del área, para posteriormente exponerlo en el mismo seminario ante el grupo.

En D1, se problematiza la noción de *deserción escolar* en Latinoamérica. En la estructura de la situación I, se infieren tres argumentos:

- Deserción escolar,
- Deserción por prácticas de enseñanza en matemática y,
- Deserción desde la socioepistemología.

En el primer argumento, *deserción escolar*, se reconocen diferentes investigaciones que abordan la problemática en la cuales atribuyen sus causales, por un lado, a factores económicos y conductuales de los estudiantes. Por otro, a factores institucionales.

> *"...si bien los factores socioeconómicos es una de las causas de las deserción escolar, también existe la convicción de que no es el único. El segundo marco interpretativo plantea que los factores del abandono escolar se relaciona con los ambientes que proporciona la escuela en relación a la enseñanza y a las dinámicas de interacción entre los diferentes agentes."*
>
> (D1, pp. 2).

En el segundo argumento, *la deserción por prácticas de enseñanza en matemáticas*, se señalan visiones que atribuyen a las prácticas de enseñanza como las causales de la problemática de la deserción escolar. En este contexto, apoyado del planteamiento de Rivas (2005), se señala que la práctica de enseñanza de las matemáticas ha estado basada en paradigmas que reproducen un modelo educativo de carácter memorístico y castigador. En efecto, un docente con esta visión le impide al estudiante la posibilidad de que reconstruya los saberes escolares.

> *"...la práctica pedagógica ha estado inspirada, desde el siglo XIX por el paradigma positivista, racionalista y cientificista cuya orientación académica convive y coexiste con prácticas escolares artesanales, intuitivas, basadas en el sentido común y de evocación, siendo una práctica que reproduce el modelo tradicionalista de enseñanza..."*
>
> (D1, pp.3).

En el tercer argumento, *la deserción desde la socioepistemología*, se señala que la enseñanza de la matemática ha estado sustentada en prácticas que se centran en las características de los objetos matemáticos, soslayando al humano en su construcción. En efecto, se plantea que al quedar la enseñanza de la matemática desconectada a la realidad inmediata del estudiante se genera la deserción escolar.

"La reflexión que llevaremos a cabo en este trabajo estará centrada en la problemática de la deserción escolar causada por el fracaso en matemáticas... la enseñanza de las matemáticas ha estado sustentada bajo visiones y prácticas de enseñanza que nos han hecho pensar que el conocimiento está ahí afuera y que el deber del ser humano es alcanzarlo, en otras palabras estas concepciones nos han hecho centrarnos en los objetos matemáticos y sus características, soslayando al papel del humano y de los grupos humanos en la generación del conocimiento..."

(D1, pp. 4).

En resumen, en la situación I del *proyecto de investigación* se plantea como hipótesis que un cambio de paradigma en la enseñanza de la matemática podría contrarrestar el abandono escolar. Con la intención de justificar dicha hipótesis, D1 se apoya de la socioepistemológica como una aproximación teórica que, desde la construcción social del conocimiento, puede responder a la problemática de la deserción escolar generada por el fracaso de los estudiantes en matemáticas:

"Nuestra hipótesis es que el cambio de paradigma de la enseñanza de las matemáticas podría llevarnos a establecer condiciones de enseñanza que favorecerían la permanencia de los estudiantes que abandonan la escuela... Con el fin de justificar nuestra hipótesis reflexionaremos en torno a cómo la socioepistemología... a partir de las prácticas sociales, responde a la problemática de la deserción escolar, causada por el fracaso en matemáticas."

(D1, pp. 5).

De este modo se da paso a las significaciones asociadas a los constructos teóricos, y a los procedimientos de éstos, por medio de un ejemplo específico para acreditar que el proceso de enseñanza de la matemática podría concebirse de manera diferente a la tradicional. De esta forma, en efecto, se estaría contrarrestando la deserción escolar provocada por el fracaso de los estudiantes en matemáticas.

"Planteamos que con un cambio del dME centrado en prácticas sociales, y no en objetos matemáticos, podría llevarnos a concebir una forma de enseñanza de las matemáticas distintas a la tradicional, donde el estudiante reconstruiría el conocimiento, a partir de los usos y formas de éste... ¿Cómo este nuevo paradigma puede hacer aportaciones en el discurso Matemático Escolar tradicional?. Para responder a esta pregunta haremos referencia a una investigación realizada por Montiel (2005), donde se estudia el fenómeno didáctico del tratamiento escolar de las funciones trigonométricas bajo la perspectiva de la socioepistemología."

(D1, pp. 7).

Ello da paso a las conclusiones de D1 en las que se plantea que la investigación realizada por Montiel ejemplifica el rediseño del *discurso Matemático Escolar*, con base en las prácticas sociales que generan el conocimiento matemático. Con este antecedente se reconoce que, bajo el planteamiento de la aproximación socioepistemológica, las prácticas de enseñanza de la matemática podrían concebirse de manera distinta al que genera el paradigma dominante. De esta manera, un proceso de enseñanza de las matemáticas basada en las prácticas sociales de tal suerte que rediseñen el *dME* podría contrarrestar la problemática del fracaso escolar en matemáticas y, en efecto, a la deserción escolar.

A manera de cierre

Cabe destacar que se observó, en el desarrollo del estudio de la resignificación de la hipótesis del estudio de caso, que los seminarios son una fuente generadora de producción que nutre la *variedad teórica* que cultiva el programa que le abraza. En este sentido, tenemos como evidencia a D1, el cual se configuróen el seno de un seminario que es parte de un Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa. A la luz del proyecto estudiado, también hemos observado el rol relevante que desempeña en estos procesos, de construcción de la *variedad teórica* de un programa de investigación latinoamericano, el matemático educativo en formación.

Referencias

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6(1), 27-42, México.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci y Soto, D. (en prensa) El Discurso Matemático Escolar: la Adherencia, la Exclusión y la Opacidad. Barcelona, España: Editorial Gedisa. Distrito Federal, México: Cinvestav.

Cordero, F. (2008). El Uso de las Gráficas en el Discurso del Cálculo Escolar. Una visión Socioepistemológica. En R. Cantoral, Covián, O., Farfán, R. M., Lezama, J., Romo, A. (Eds.), Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano. DF, México: Ed. Díaz de Santos. ISBN primera edición: 978-84-7978-803-2

Cordero, F., Gómez, K. y Viramontes, I. (2009). Elementos de algunas teorías en Matemática Educativa. Una experiencia de análisis: ¿adherencia o nuevas visiones? Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22 (pp. 375 – 381). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cordero, F. y Silva-Crocci, H. (2012). Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15(3), 295-318.

Gómez, K., Silva-Crocci, H., Cordero, F. y Soto, D. (2014). Exclusión, Opacidad y Adherencia. Tres fenómenos del discurso Matemático Escolar. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 27, 1457-1464, México.

Silva-Crocci, H. (2010). Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, D.F., México.

Silva-Crocci, H. (2014). La identidad disciplinar en un programa de investigación latinoamericano de matemáticos educativos: adherencia, resistencia y organización. Tesis doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, D.F., México.

Soto, D. y Jaso, G. (2008). Deserción escolar: una mirada desde la Socioepistemología. Producto no publicado del Seminario en Investigación en Matemática Educativa I, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, D.F., México.

Investigaciones de la matemática educativa para la inclusión

Daniela Soto S., Lianggi Espinoza R.
Universidad de Santiago de Chile, Cinvestav IPN México.
daniela.soto.s@usach.cl; leanggi@gmail.com

Resumen

En este trabajo pretendemos reflexionar acerca de la *inclusión* en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde la teoría Socioepistemológica. Partiremos por problematizar el conocimiento matemático a través de un acercamiento al fenómeno de exclusión que ha provocado el *discurso matemático escolar*. Nos preguntaremos cómo desde la perspectiva de la *construcción social del conocimiento matemático* proponemos una visión para la inclusión. Para responder consideraremos diferentes investigaciones que han problematizado nociones de la matemática escolar en diferentes contextos, como escenarios de diversidad cultural, en prácticas profesionales, en contextos histórico-epistemológicos y escenarios cotidianos. Discutiremos estos ejemplos de investigación y analizaremos cómo han contribuido a conformar un marco de referencia que hoy nos permite hablar de inclusión.

El discurso Matemático Escolar y el fenómeno de exclusión

Desde la socioepistemología hemos caracterizado al *sistema de razón* que ha normado las prácticas y representaciones sociales de los agentes educativos, el cual hemos denominado *discurso matemático escolar* (*dME*). Este es un conocimiento que forma categorías y fabrica identidades. Tiene el poder de mostrarnos una "verdad", lo que es "normal" y lo "anormal" en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La legitimación de este discurso se debe tanto al rol social que juega el conocimiento matemático en la cultura como también a la búsqueda de la masificación de la enseñanza en la sociedad. Esta masificación conlleva no sólo, como lo explica la transposición didáctica, a la atomización de sus conceptos, sino también a posicionar pensamientos dominantes en una hegemonía en el ámbito de la razón (Soto, 2014).

Bourdieu (2008) explica que en el campo científico existe una constante lucha por la autoridad científica. En esta lucha siempre está presente el desafío de imponer la definición de "ciencia" más conveniente para los intereses específicos de los grupos dominantes. Los dominantes son aquellos que consiguen imponer la definición de la ciencia según la cual su realización más acabada consiste en tener, ser y hacer lo que ellos tienen, son o hacen (Bourdieu, 2008, p. 20).

Según Bourdieu (2008) los dominantes adoptan estrategias de conservación que buscan perpetuar el orden científico establecido. Una de estas estrategias es la educación. En Soto y Cantoral (2013) hemos caracterizado al *dME* como hegemónico, utilitario, con una concepción de que el conocimiento es acabado y lineal, centrado en objetos matemáticos, y carente de marcos de referencia para resignificar la matemática. Estas características han permitido que en la educación matemática se dé el fenómeno de la *exclusión* a través de la imposición de significaciones, argumentaciones y procedimientos. Esta forma de exclusión es caracterizada en la obra de Bourdieu como una *violencia simbólica*.

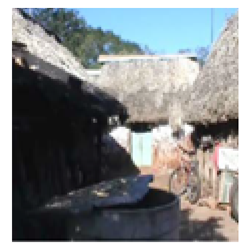
Ahora bien, consideramos que el conocimiento de la categoría socioepistemológica *construcción social del conocimiento matemático (CSCM)* nos brinda alternativas para el rediseño del *dME* y la resignificación del conocimiento matemático en la escuela y la vida cotidiana. Por tanto, el estudio de la *CSCM* nos ha permitido dilucidar algunos elementos para caracterizar la inclusión. A continuación presentamos 5 ejemplos de investigaciones sobre la *CSCM*, los cuales han sido desarrollados en escenarios diversos, a saber: culturas originarias, producción científica de frontera, escenario escolar, escenario histórico, escenario cotidiano.

Investigaciones sobre la construcción social del conocimiento matemático.

Covian (2005), en el escenario de culturas originarias, estudió la *construcción social del concimiento matemático* en la edificación de la vivienda tradicional Maya. Para construír una casa tradicional, Gilberto Mate Pool toma encuenta la proporción del cuerpo de la persona que la habitará. El saber matemático que posee y ha adquirido por trasmisión generacional desde la época prehispánica responde *a otras prácticas acordes a sus necesidades y a su entorno social"* (Covian, 2005, p.170) Observemos como piensa la inclinación del techo en función de su resistencia a la lluvia:

> ***"Porque si lo pones muy así, inclinado pues legalmente cuando venga el agua, penetra [...] si quieres ponerle lámina, pues tienes que poner un declive así porque si es de lámina resbala, pero si es para una casa así (señalando la casa [...] con un techo de paja) entonces tienes que ponerle altura para cuando venga el***





> ***agua, abajo, así es [...] si tiene más altura, más mejor"*** **(Covian, 2005, p.174,175)**

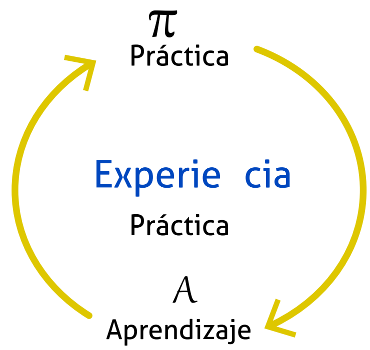
Gilberto usa la noción de inclinación para optimizar el material de la vivienda y para que esta responda a necesidades concretas. Existe un manual para la construcción de casas, pero la referencia de Gilberto no es dicho manual, sino es el conocimiento que se ha construido socialmente en su comunidad desde el pasado y que se ha transferido desde procesos de institucionalización. "*Cosas han cambiado, pero esto ha permanecido*" (Covian, 2005).

En esta investigación no se mira al conocimiento escolar en la práctica cotidiana, sino al saber – *conocimiento puesto en uso* – construido y difundido en ella. Al hacer esto no se mira sólo la actividad misma, lo que se hace, sino también aquello que la norma, *“lo que les hace hacer lo que hacen”*. Esto no es visible ni propio de un individuo, es social. El método es estudiar los *procesos de institucionalización* desde el mecanismo *cambio-permanencia.*

Tuyub (2008), en el escenario de la producción científica de frontera, estudia la construcción social del conocimiento en una comunidad toxicológica. Sigue a un estudiante de nivel post-doctoral que estudia la relación entre el aumento del cancer de próstata y la exposición a pesticidas en una población campesina. En esta investigación se reporta que, a pesar de haber un protocolo, el investigador debe tomar decisiones en el proceso de obtener el ADN. En estas decisiones se encuentra *conocimiento puesto en uso*, el cual es invisible desde una mirada superficial del conocimiento matemático en lo cotidiano. En estas tomas de decisiones se ajustan procesos, produciéndose debates entre el conocimiento teórico y el experimental, con el fin de optimizar y estandarizar procesos.

Tuyub explica como, en estas tomas de decisiones, intervienen conocimientos, espectativas, concepciones, y creencias para saber lo que le falta o no a la muestra. Se reporta que la *optimización-estandarización* es un mecanismo de construcción de conocimiento que rige esta práctica científica.

> *“Al estudiar las prácticas, para obtener la evidencia y los datos, no basta con atender al discurso explícito, se requiere, además de los elementos no verbales, típicamente situacionales, y los que están en el discurso pero no se perciben como evidencia del conocimiento matemático en juego”* (Tuyub y Cantoral, 2012)

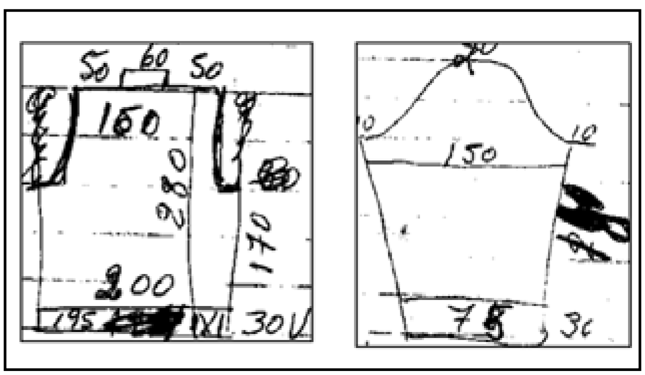


El conocimiento es aquel que queda permeado en sus producciones finales, pero el saber se puede estudiar desde sus prácticas (se estudia al saber desde el hacer en comunidad). Sin embargo, también se puede observar el saber sobre el producto final, al estudiar como las personas y comunidades usan y se relacionan con el conocimiento. Al mirar la práctica, más que mirar al conocimiento, se observa lo que le antecede: el saber.

Tuyub (2008) también plantea que el *aprendizaje* requiere que las personas vivan experiencias de cambios de prácticas ante ciertos problemas, que infieran procesos y tomen en cuenta el sentido funcional del conocimiento, *su uso situacional antes del significado institucional*. Esto último es una consideración central para el pasaje de los objetos a las prácticas planteado por el encuadre teórico. El escenario de estudio es innovador en el enfoque teórico, y permite ver saberes en su primera etapa de institucionalización.

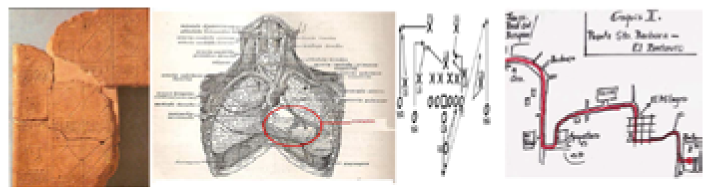
Micelli (2010), al referirse al escenario escolar, y al analizar las dificultades de los estudiantes en el uso y análisis de *figuras*, estudia el rol que juegan estas en la resolución de problemas. Considera tres oficios particulares: modistas, tejedoras y obreros de la construcción. Estos oficios comparten un eje en común: la elaboración de objetos que requiere establecer medidas a priori. De aquí que emergan dibujos que guían el proceso de construcción.

La práctica del tejido tiene inherente el desarrollo complejo de cálculos de puntos y vueltas necesarias en función del tamaño de la prenda. Se hacen dibujos hechos con mano alzada, con trazados irregulares y sin guardar una relación proporcional con los datos (los dibujos de tejidos para niños y adultos son muy similares en tamaño). Estos sirven para sistematizar los datos necesarios, tiene una estructura interna propia y son útiles para hacer los cálculos necesarios para construir la prendas (Micelli, 2010). la tejedora explica:



"Primero hago el dibujo y luego lo completo con los resultados de los puntos y con las vueltas de las cuentas que hago. Los números que están ubicados en forma vertical representan las vueltas y los horizontales los puntos necesarios"
(Micelli, 2010, p.166-168)

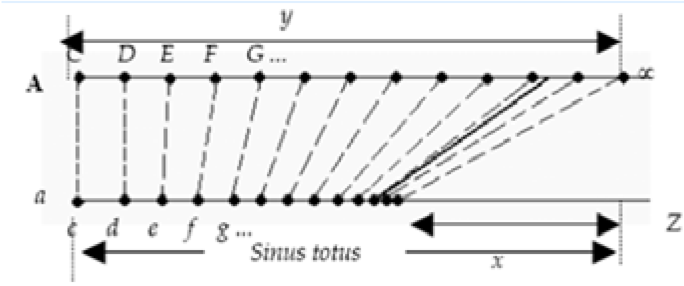
La tejedora entrevistada narra que lo que sabe lo ha aprendido de su mamá y su experiencia de tejer. Micelli (2010) también analiza el uso de gráficas en una costurera y en obreros de la construcción, donde las figuras ayudan a la visualización de los datos necesarios para la construcción. No son dibujos exactos, sino esquemáticos. No son dibujos iguales para todos, cada quien usa sus códigos para entenderse, aunque hay similitudes en los dibujos. Se crean con base a la necesidad de visualizar los datos requeridos.



Micelli estudia el uso de figuras en la resolución de problemas matemáticos en la escuela. Para abordar esta cuestión analiza, no solo las gráficas escolares, sino también las usadas en labores como el tejido. Estudia cómo culturas antiguas como Egipto, India, China y Grecia usaron las figuras. También incluye las figuras que usa un psiquiatra, en el deporte y el uso cotidiano de rutas. Es decir, ve al conocimiento cotidiano, además de considerar el carácter contextual del conocimiento, en su dimensión normativa de la actividad humana.

Ferrari (2001), en el escenario histórico, estudia la construcción social de lo logarítmico. En su investigación reporta la desvinculación que existe entre la presentación escolar de los logaritmos y sus diversas significaciones históricas. Por este hecho la autora estudia el origen y desarrollo de lo logarítmico en la historia, analizando obras originales y actuales para examinar cómo vivieron y viven los logaritmos en el discurso matemático escolar.

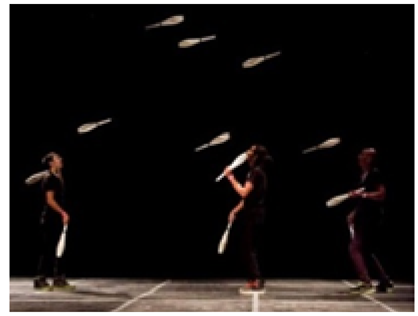
La autora presenta 11 diferentes significaciones de lo logarítmico en la historia de la matemática durante los siglos XVII y XX.



Entre estas significaciones está la de Napier de 1614 quién articula conceptos geométricos mécanicos y presenta al logaritmo como una relación entre una progresión aritmética y geométrica. Esta u otras de las significaciones reportadas pueden ser incorporadas al sistema educativo para permitir que los estudiantes, al estudiar el logaritmo, no sólo memoricen y apliquen fórmulas, sino que también puedan darle significado a estas nociones matemáticas.

Espinoza (2014), en un escenario cotidiano, estudia la construcción social del saber matemático en el ámbito del malabarismo y las artes circenses. Se estudia la práctica del malabarismo por abordar el problema de la inclusión educativa con jóvenes que están fuera de la educación formal en México. Partiendo desde estos jóvenes, los investigadores se aproximaron a la comunidad de malabaristas urbanos. Desde un posicionamiento metodológico naturalista y exploratorio se estudió cómo desde la práctica del malabarismo se producen saberes, y cómo en estos saberes vive transversalmente el saber matemático.

De esta investigación se concluye que el carácter cíclico del malabarismo y la gran cantidad de patrones posibles permite la producción de sistemas predictivos que se usan para explorar-innovar las acciones-actividades de la práctica. Así como las matemáticas del siglo XVII y XVIII nacen por la necesidad de generar modelos explicativos de experiencias físicas sensibles con el fin de anticipar y predecir (Cantoral, 2001), así también los malabaristas, ante la imposibilidad de conocer la gran cantidad de patrones malabarísticos posibles, generan sistemas que modelan la práctica y les permiten predecir nuevos posibles patrones. Además, en la práctica del malabarismo está presente lo proporcional, lo periódico, la modelación, visualización, representación, optimización, etc.



En estas cinco investigaciones el interés es entender *la construcción social y difusión institucional del saber matemático* (conocimento puesto en uso) en y *desde contextos y situaciones específicas*. Estudiamos lo contextual inmerso en mecanismos de construcción social y difusión institucional. Estas investigaciones nos proveen elementos para caracterizar la inclusión desde la perspectiva de la *CSCM.*

La inclusión desde la Construcción Social del Conocimiento Matemático

En Soto (2014) se caracteriza la CSCM tomando descripciones contrarias a las del *dME* reportadas en Soto (2010). Estas categorías (*dME* y *CSCM)* no se comportan dicotómicamente, más bien, en ellas se expresan una lucha de contrarios.

dME	CSCM
Hegemónico	Pluralidad epistemológica
Utilitario	Funcional
Atomización en objetos	Centrada en prácticas sociales
Sin marcos de referencia	Transversalidad
Acabado y lineal	Desarrollo de usos

La ***hegemonía*** se refiere a la supremacía de algunas argumentaciones sobre otras. La ***pluralidad epistemológica*** implica considerar las diferentes argumentaciones del conocimiento matemático. Esto nos permite reconocer la racionalidad contextualizada, por tanto, somos conscientes de que el conocimiento no es único, lineal y ni acabado. Lo **utilitario** se refiere al aprendizaje de los conceptos o procedimientos matemáticos con el fin de su utilización en determinadas circunstancias (por ejemplo para aprender un conocimiento posterior) La ***funcionalidad*** del conocimiento es intrínseca al contexto y la situación. Por tanto es funcional cuando se integra en la vida del sujeto y la transforma.

La ***atomización de los conceptos*** se refiere a que el conocimiento se encapsula en saberes institucionales que soslayan los aspectos sociales, contextuales y culturales que permitieron su constitución y difusión. La ***centración en las prácticas sociales***, desde la socioepistemología, nos hacen entender a los saberes como el conocimiento puesto en uso. La matemática es un conocimiento funcional en diferentes disciplinas. Sin embargo, en el *dME,* el marco de referencia para significar al conocimiento tiende a ser el mismo conocimiento escolar. En el mejor de los casos, estos ***marcos de referencia*** sólo funcionan como contextos para la aplicación del conocimiento escolar. Hablar de ***transversalidad*** es considerar esos marcos de referencia donde el conocimiento se usa, en el sentido de que no se requiere reconocer el concepto previamente a su utilización.

El conocimiento matemático en el *dME* tiene un carácter ***acabado*** y estático. La estructura discursiva, incluso, nos propone una organización del conocimiento a partir de los objetos matemáticos de manera ***lineal***, donde por ejemplo se construyen organizaciones que soslayan hechos históricos en la construcción del conocimiento matemático. Centrarnos en la práctica social nos ha permitido observar los ***usos del conocimiento matemático***. El desarrollo de los usos es fundamental para la estructura del sistema educativo. Esto nos brindara elementos para entender que el conocimiento requiere de re-significaciones progresivas organizadas no exclusivamente a través de objetos matemáticos.

En el taller discutiremos el vínculo existente entre estos resultados de investigación con los cinco ejemplos de investigación reseñados anteriormente, con el fin de reflexionar sobre el problema de la inclusión en la educación en matemáticas.

Referencias

Bourdieu, P. (2008). Los usos sociales de la ciencia. (Trad. H. Pons y A. Busch). Buenos aires, Argentina: Nueva Visión. (Original en Francés, 1997)

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: estudios sobre construcción social del conocimiento. D. F., México: Gedisa.

Cantoral, R. (2001). Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Covián, O. (2005). El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya. Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav-IPN.

Micelli, M. (2010). Las figuras de análisis en geometría. Su utilización en el aula de matemática. Tesis de maestría no publicada. CICATA- IPN, México.

Ferrari, M. (2001). Una vision socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav-IPN.

Espinoza, L. (2014). La desescolarización del saber: su construcción social desde el malabarismo y las artes circenses. Tesis de doctorado no publicada. México: Cinvestav-IPN.

Soto, D. (2014). La Dialéctica Exclusión- Inclusión entre el discurso Matemático Escolar y la Construcción Social del Conocimiento Matemático. Tesis de doctorado no publicada. México: Cinvestav-IPN.

Tuyub, I. (2008). Estudio Socioepistemológico de la práctica toxicológica: un modelo en la construcción social del conocimiento. Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

Tuyub, I. y Cantoral, R. (2012). Construcción social del conocimiento matemático durante la obtención de genes en una práctica toxicológica.Bolema: Boletim de Educação Matemática,26(42a), 311-328.

La transformación de fracción a decimal y de decimal a fracción en los libros de texto escolar de matemáticas en Chile en el período 1981 – 2013

María del Pilar Merino Gómez - Roberto Vidal Cortes
Universidad Alberto Hurtado – Chile
pmerinog@hotmail.com , rvidal@uahurtado.cl

Resumen

El propósito de esta ponencia es presentar una investigación en curso, la cual analiza el tipo de tareas y técnicas que están presentes en los libros de texto sobre la transformación de fracción a decimal y viceversa.

El concepto de número racional es uno de los temas que está presente a lo largo del currículo del sistema escolar chileno, el que aparece a partir de 4° año Básico, con la noción de fracción y número decimal y culmina en Primer Año de Enseñanza Media con la formalización del Conjunto de los Números Racionales y sus distintas representaciones.

Dentro de los tipos de representación escrita del número racional, están la fraccionaria y la decimal, que los estudiantes deben conocer, caracterizar y en resolver operaciones con cada una de ellas.

Los libros de texto son un medio de transmisión del conocimiento, son un apoyo y guía para los docentes en la planificación de sus clases. Es por esto que este estudio se focaliza en analizar cómo se presenta esta transformación, de decimal a fracción y viceversa, en los libros de texto de 8° y 1° Medio entre los años 1981 y 2013, ya que los datos empíricos muestran que este contenido causa dificultad de comprensión en los estudiantes, como se evidencia en los resultados de las pruebas estandarizadas SIMCE y TIMSS.

Esta investigación está enmarcada en la Teoría Antropológica de lo Didáctico TAD, la cual permite describir y analizar las tareas y técnicas relativas a este contenido, como las tecnologías asociadas a cada una de ellas.

Palabras Clave: Números racionales, representación decimal y fraccionaria, libros de texto

Antecedentes

Dentro de las matemáticas, la importancia del estudio de los números racionales en la escolaridad obligatoria es ampliamente reconocida. La auténtica comprensión del concepto de número racional sólo puede alcanzarse mediante presentaciones plurales de dicho concepto, es decir, si se logra la articulación de sus distintas representaciones. Se debe abordar aspectos que potencien el papel de las fracciones como razón, como transformación, como cociente de números naturales en situaciones de reparto, y su vinculación con los decimales. (Llinares, 2003)

El objeto matemático **número racional** es un contenido que ha estado presente en el currículo nacional, y que tiene gran relevancia ya que su estudio permite el desarrollo de nociones útiles para el conocimiento de temas más avanzados, como son el razonamiento proporcional y el estudio de las expresiones racionales en álgebra.

De acuerdo a los programas de estudio actuales, la noción de fracción y de número decimal se comienza a trabajar en 4° Básico: la fracción desde la noción parte/todo y los decimales como otra forma de escribir las fracciones decimales. En 5° y 6° Básico se trabajan en forma separada, en unidades distintas y se establecen conexiones entre ellas, solo para las fracciones decimales. En 7° y 8°, ambas representaciones se trabajan para apoyar el tema de la proporcionalidad, potencias y ecuaciones.

En Primer Año Medio (13 a 14 años) se completa el estudio del conjunto de los Números Racionales, incluyendo las fracciones negativas. Se presentan las fracciones como división entre números enteros, cuyo cociente es un número decimal periódico o semiperiódico. A los estudiantes se les dificulta la conceptualización de este objeto matemático, ya que las relaciones entre las notaciones fraccionarias y decimal están basadas sobre criterios de tipo operatorio y no conceptual.

De acuerdo a los resultados obtenidos por los estudiantes de 8° Básico en pruebas estandarizadas, Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE) y Tendencias en el Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS), éstos no logran la articulación entre las representaciones fraccionarias y decimal:

Los resultados del SIMCE 2011, indica que el 11% de los estudiantes alcanzó el nivel de logro avanzado y una pregunta de esta categoría es:

Nivel Avanzado

2 ¿Qué número es equivalente a $\frac{2}{25}$?

A. 0,2

B. 0,8

C. 0,08

D. 12,5

(MINEDUC, 2012)

Los resultados de la prueba TIMSS, indica que el 1% de los estudiantes chilenos se encuentra en el nivel avanzado, una pregunta de esta categoría es:

M012016

¿En cuál de estos pares de números, el número 2,25 es mayor que el primer número pero menor que el segundo número?

A. 1 y 2

B. 2 y $\frac{5}{2}$

C. $\frac{5}{2}$ y $\frac{11}{4}$

D. $\frac{11}{4}$ y 3

Dominio de contenido	Dominio cognitivo	Respuesta correcta	Nivel de desempeño
Números	Manejar conocimientos y procedimientos	B	Avanzado

(Agencia de Calidad de la Educación, MINEDUC., s/f)

Como se puede observar en estos ejemplos, los estudiantes chilenos no logran realizar la transformación de fracción a decimal y viceversa, lo que confirma que éstos no consiguen dominar el concepto de número racional ya que no vinculan ambas representaciones.

El libro de texto escolar es un medio de transmisión de conocimiento, es un apoyo y referencia para los docentes en su planificación.

Para muchos docentes el libro de texto es su referente del saber sabio, sobre todo cuando no manejan muy bien los conceptos que allí están presentes.

Debido a esto es importante analizar, en los libros de texto, los tipos de actividades o tareas que se han presentado para la transformación de fracción a decimal y viceversa, y las técnicas que se utilizan para abordarlos, además del discurso tecnológico que permite fundamentar las técnicas utilizadas.

Las dos últimas reformas educacionales en Chile de los años 1981 y 1996 y el ajuste curricular del año 2010, han planteado cambios en el currículo de matemáticas. En relación al tema de la formalización del conjunto de los números racionales, éste estaba presente en los niveles de 8° Año Básico y Primer Año de Enseñanza Media, tanto en la reforma del año 1981 como en la del año 1996. En el ajuste curricular del año 2010, éste contenido solo está presente en Primer Año de Enseñanza Media. Esta diferencia permite preguntarse si ha habido cambios en la forma de presentar este contenido a lo largo de este período (1981 a 2013), y si los hay, de qué tipo son.

El presente estudio, sobre la transformación de fracción a decimal y viceversa en los textos de estudio en Chile entre los años 1981 a 2013, está enmarcado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999), que parte del principio que el saber matemático se construye como respuesta al estudio de cuestiones problemáticas, apareciendo así como el resultado (o producto) de un proceso.

Pregunta de investigación:

¿Cómo se presenta y desarrolla la transformación entre las distintas representaciones del número racional, fraccionaria y decimal, y qué tipos de actividades y justificaciones se plantean en los libros de texto de 8° Básico y 1° Año Medio utilizados en Chile entre 1981 y 2013?

Objetivo General:

Identificar y describir cómo se presentan las transformaciones entre las distintas representaciones del número racional, en particular la fraccionaria y la decimal, y que tipos de actividades y justificaciones (tareas y técnicas) se plantean en los libros de texto de 8° Básico y 1°Año Medio utilizados en Chile entre 1981 y 2013.

Objetivos específicos:

1. Describir el tipo de actividades (tareas y técnicas) que se presentan en los libros de texto de 8° Básico y 1° de Enseñanza Media, con respecto a la transformación de fracción a decimal y viceversa.

2. Establecer diferencias en la forma en que se presentan las transformaciones de decimal a fracción y viceversa, en los libros de texto, ya sea en un mismo o diferente períodos entre 1981 y 2013.

3. Caracterizar el tipo de justificaciones (tecnologías) asociadas de transformación de fracción a decimal y viceversa, en los libros de texto.

Marco Teórico:

La TAD (Chevallard, 1999) sitúa la actividad matemática en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales y por eso se habla de una teoría antropológica (Bosch y Gascón, 2009). Se parte del principio que el saber matemático se construye como respuesta al estudio de cuestiones problemáticas.

Chevallard postula que toda actividad humana regularmente realizada puede describirse como un modelo único que se resume con la palabra praxeología.

El saber matemático queda organizado en dos niveles. El primer nivel se refiere a la práctica que se realiza, ***praxis,*** (bloque práctico-técnico) es decir los tipos de tareas o problemas que se estudian y las técnicas que se utilizan para poder abordarlos. El segundo nivel corresponde a la parte descriptiva, organizadora y justificadora de la actividad, llamada ***logos*** o saber (bloque tecnológico – teórico), esta incluye las descripciones y explicaciones sobre lo que se hace, el cómo se hace y el porqué de lo que se hace y la teoría que da sentido a los problemas planteados y permite fundamentar e interpretar las descripciones y demostraciones tecnológicas.

La TAD presenta la siguiente estructura que permite el análisis de las tareas: [T/ô/θ/Θ], donde: T son las tareas; ô es la técnica de T; θ la tecnología de ô;   es la teoría de **θ.**

La estructura praxeológica más sencilla, que llamaremos puntual se puede representar con la expresión: [T/ô/**θ/**Θ], y se compone de:

- *un tipo de* ***tareas*** T, Por ejemplo: *Calcular la expresión decimal de:* $\frac{3}{11}$
- de una ***técnica*** **ô,** una manera de resolver las tareas del tipo T; Por ejemplo: *Para calcular la expresión decimal de:* $\frac{3}{11}$, se debe dividir el numerador por el denominador

3,000 : 11 = 0,2727

80
30
80
3

- de una ***tecnología*** θ o discurso razonado (logos) sobre la técnica

Teorema: *Todo número racional es un decimal periódico.* (Novelli, 2005, pág. 95)

Para obtener la representación decimal de ***cualquier fracción ordinaria,*** *basta efectuar la conocida* ***división decimal*** *del numerador por el denominador.*

Por ejemplo:

$\frac{153}{120} = 1{,}275$ porque 153 | 120

330   1,275
900
600
0

Novelli, A. (1995).Elementos de matemática. pág 96

- y de un componente ***teórico*** Θ que rige la propia tecnología **θ,** en nuestro ejemplo: La axiomática de los números reales, que aporta elementos descriptivos y justificativos de los demás componentes de la praxeología.
- [T/ô]: Bloque práctico-técnico. Praxis, este bloque se identifica con el saber–hacer.
- [θ/ Θ] Bloque tecnológico–teórico. Logos, este bloque se identifica con el saber.

En la TAD se parte del principio de que el saber matemático se construye como respuesta al estudio de cuestiones problemáticas, apareciendo así como el resultado (o producto) de un proceso de estudio; las matemáticas son a la vez una actividad y el producto de dicha actividad. Desde este punto de vista se propone la noción de Organización Praxeológica Matemática o Praxeologí*a* Matemática, la que se refiere a la manera en que puede ser construida la **Organización Matemática**, es decir, caracterizar y clasificar los tipos de problemas **(tareas)**; entender, describir y caracterizar las **técnicas** que se utilizan para resolverlos; describir y fundamentar el uso de las técnicas **(discurso tecnológico)** y la **teoría** que da sentido a los problemas y permite justificar y fundamentar el discurso tecnológico.

Metodología.

La investigación se realizará utilizando un enfoque cualitativo, enmarcado en un estudio de casos descriptivo e inductivo ya que se va a levantar información a partir de casos particulares sin una apostura a priori.(Sandin, 2003)

Tomando en consideración el período a analizar 1981-2013, se establecieron tres sub-períodos, de acuerdo a las puestas en vigencia de las reformas educacionales y el ajuste curricular respectivos, éstos son 1981–1998; 1999–2009; 2010–2013.

La muestra de libros de texto que se considerará en este estudio, se hará a partir de una selección intencional y por conveniencia, considerando los textos más representativos de cada período estudiado, para lo cual se utilizarán los siguientes criterios:

-Textos distribuidos por el MINEDUC
-Textos de las editoriales más relevantes (permanencia en el mercado, posicionamiento público)
-La presencia del contenido a estudiar.

Siguiendo los criterios anteriores, la selección de libros tiene la siguiente distribución:

Período	8° Básico	1° Medio
1981-1998	2 libros	2 libros
1999–2009	2 libros	2 libros
2010–2013	--------	1 libro

En el último período no aparecen libros de 8° Básico, ya que de acuerdo al ajuste curricular del año 2010 este contenido sólo está presente en 1° Año de Enseñanza Media, por este motivo en ningún libro de 8° Básico se aborda este contenido.

Referencias

Agencia de Calidad de la Educación, MINEDUC. (s/f). TIMSS Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias. Marco de evaluación, preguntas y ejemplos de respuestas de la prueba. Volumen I – Matemática,. Santiago.

Bosch, M.; Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. In M. T. G. María José González, Jesús Murillo. (Ed.),Investigación en Educación Matemática XIII, 89-113.

Centeno, J. (1997). Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué? Madrid: Síntesis.

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado. Argentina.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 19, nº 2. Universidad de Sevilla. España.

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. Madrid: Pearson Prentice Hall.

Novelli, A. (2005). Elementos de Matemática. Buenos Aires: Eduardo Elli.

MINEDUC. (2012). Síntesis resultados SIMCE 2011. Obtenido de http://www.agenciaeducacion.cl/wp-content/files_mf/folleto_sintesis_web_2012.pdf

Sandin, M. (2003). Investigación Cualitativa en Educación Fundamentos y Tradiciones. Madrid: Mc Graw Hill.

Cambio del profesor y resolución de problemas de final abierto

María Victoria Martínez Videla
Centro de Investigación Avanzada en Educación, Universidad de Chile. Chile
mariavictoria.martinez@ciae.uchile.cl

Resumen

El foco es comprender y describir el cambio del profesor desde su propia perspectiva en torno a la resolución de problemas. Se considera el cambio del profesor como un proceso interno y externo, que implica el sistema de creencias y actitudes y cambios a nivel cognitivo. Por lo anterior, y mediante el uso de entrevistas, utilizando viñetas como herramienta metodológica, se trabajó en la identificación de elementos que favorecen el cambio en el sistema de creencias y la forma de trabajar la resolución de problemas en un grupo de 10 profesores, que han participado en un proyecto, implementando la resolución de problemas de final abierto a lo largo de tres años. Se ha observado que los profesores identifican y declaran los cambios en la forma en que trabajan la resolución de problemas y, a partir de ello, ha sido posible elaborar una categorización de estas variaciones que responden a los diversos componentes del cambio del profesor: creencias sobre el aprendizaje, la enseñanza, la práctica, la variabilidad y el conocimiento matemático para la enseñanza, entre otros.

Introducción

Actualmente, las reformas educativas a nivel mundial y, por lo tanto, también en Chile, promueven objetivos para la educación matemática que son muy distintos que los que han regido por muchos años y sobre la base de los cuales se formó la mayor parte de la población adulta y en particular los profesores. Un buen ejemplo de dicho cambio es la alfabetización matemática (Math Literacy) que evalúa la prueba internacional PISA, definida como: "la capacidad para identificar y comprender el papel que juegan las matemáticas en el mundo, plantear juicios matemáticos bien fundamentados e involucrarse en las matemáticas, según lo requiera una persona en su vida actual y futura como un ciudadano constructivo, preocupado, reflexivo" (OECD; 2000, 2004).

El cambio de paradigma al que nos referimos concibe el aprendizaje como el resultado de una construcción activa y no como el resultado de un estímulo-respuesta. Poco a poco dejamos de entender los contenidos como elementos conceptuales propios de una disciplina, para llegar a considerarlos como el conjunto de saberes o formas culturales cuya asimilación y apropiación por los alumnos y alumnas se considera esencial para su desarrollo y socialización (Coll y otros, 1994).Todos estos cambios curriculares son cambios profundos e implican modificaciones, muchas veces radicales, en el aula y fuera de ella. Es un cambio de paradigma, el resultado de las demandas de nuestra sociedad y, como todo cambio de paradigma demanda, a su vez, cambios drásticos, de forma y sobre todo de fondo en las prácticas educativas.

El profesor es un actor principal de este cambio. Sobre el que recae, una responsabilidad mayor que involucra, desde distintas formas de instrucción hasta otras formas de entender la matemática, su enseñanza y su aprendizaje. Es así como se plantean una serie de preguntas a partir del trabajo que se hace con profesores en ejercicio, los proyectos de intervención y el desarrollo profesional de los docentes, y si esto constituye un aporte en la dirección esperada: ¿De qué manera una intervención en el aula puede provocar cambio en el profesor?, ¿qué es lo deseable?, ¿cómo se cambia?, ¿cómo el profesor percibe el cambio en quehacer cotidiano?, ¿cómo indagar en el cambio autoreportado?

Sobre éstas preguntas hemos trabajado conectando dos proyectos que se han desarrollado en el CIAE de la Universidad de Chile: AKA-09, proyecto bilateral Chile-Finlandia relacionado con la resolución del problema de final abierto y el proyecto posdoctoral (Fondecyt 3130702) que se desarrolla en torno a la determinación de factores que favorecen el cambio de los profesores.

Teacher change

En matemática se ha ido cambiando el centro de la actividad disciplinar desde el cálculo y los procedimientos, hacia el análisis. Se ha movilizado el foco desde aprendizaje de contenidos hacia el desarrollo de competencias matemáticas como: razonar, argumentar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas, representar, usar lenguaje disciplinar (OECD, 2004).

Aun cuando estas propuestas hacen sentido y son compartidas socialmente en su definición y planteamiento genérico, nos encontramos con que su materialización es extremadamente difícil. Si bien los profesores subscriben estas propuestas, el cambio que ellas suponen no ocurre. En particular, nos centramos en la resolución de problemas, en concebirla como una competencia a desarrollar y no solo como una forma de "ejercitar" los contenidos trabajados en un tema específico. Se trata de concebir la resolución de problemas como un proceso que forma parte de hacer matemática y no exclusivamente como el final de un proceso en el que se aplica lo aprendido.

Se hace entonces imprescindible estudiar el cambio del profesor (teacher change), entender la complejidad de éste, cuáles son sus componentes, buscar explicaciones a su ausencia y formas que sean más propicias para su existencia.

El cambio del profesor es un proceso que se refiere al "territorio interno y mental" de la sala de clases y obedece a un ingrediente clave que es la conciencia y necesidad de cambiar. En la literatura encontramos que se ha estudiado el importante rol que juegan las creencias y actitudes en la capacidad de cambio que tiene el profesor, entendiendo las creencias como la disposición a actuar de una determinada manera y no solo como una verbalización de lo que se cree (Wilson y Cooney, 2003).

En particular, la investigación en torno a creencia en Educación Matemática, ha definido tres categorías en el Sistema de creencias (Op´T Eynde, De Corte and Verschaffel, 2002): (a) Creencias sobre educación matemática (temas matemáticos, aprendizaje de la matemática y resolución de problemas, enseñanza de la matemática), (b) Creencias respecto de sí mismo (autoeficacia, valor de las tareas, orientación de las metas) y (c) Creencias respecto del contexto social (normas sociales y socio-matemáticas en el aula).

Una creencia del individuo se entiende, en un sentido bastante amplio, como el conocimiento basado en la experiencia subjetiva (cerca de Lester, Garofalo y Kroll, 1989). Sistema de Creencias se utiliza como metáfora para representar cómo se estructuran las creencias del individuo. La dimensión afectiva de las creencias influye en el papel y el significado de cada creencia en el sistema de creencias del individuo.

Pero, qué sabemos acerca de cómo este cambio los sistemas de creencias, si se hace Liljedahl, Oesterle y Berneche (2012), se hace una recopilación respecto de la estabilidad que pueden o no tener las creencias. A partir de la literatura se plantea que las creencias respecto de sí mismos son estables, o al menos, difíciles de cambiar.

Por su parte Smith (1999) trabaja sobre los conflictos que debe enfrentar un profesor al momento de asumir un proceso de reforma a partir de sus prácticas tradicionales y su sistema de creencias y actitudes, mediante el análisis de reflexiones internas y manifestaciones externas.

Otro factor que incide en el cambio es quién lo promueve, es decir, los profesores se resisten al cambio cuando es impuesto o sugerido por otros, sin embargo, se comprometen con él cuando es una iniciativa propia, es decir, se comprometen cuando el cambio es voluntario (Richardson, 1998).

Por su parte Guskey (2002) describe el cambio del profesor, que en términos generales, consiste en modificar la práctica de enseñanza. Dicha modificación puede observarse, de forma directa o indirecta, a través de tres dimensiones: prácticas en el aula, actitudes y creencias del profesor y resultados de los estudiantes.

Estas dimensiones están interrelacionadas, de manera que la modificación de una de ellas puede influir en la modificación de otra. Frente a esto, Guskey (2002) propone un Modelo de Cambio del profesor sobre la base de estudios etnográficos relacionados con el desarrollo profesional de los maestros. Mediante dicho modelo plantea que el cambio en las actitudes y creencias (dimensión más profunda del cambio) de los profesores se produce, primordialmente, después de que ellos obtienen evidencia de mejora en sus estudiantes, que a la vez es producto del cambio en las prácticas en aula.

Nosotros partimos de la base de que aun cuando las creencias que determinan el cambio del profesor son estables, éstas se pueden modificar mediante la intervención, ya que las creencias no van a cambiar por sí solas, sin embargo si hay una intervención adecuada el cambio puede ocurrir.

Aun cuando hemos caracterizado factores que facilitan el cambio (o lo inhiben) y aún cuando hay modelos que podrían describirlo, pensamos que el fenómeno es complejo, el cambio no está ocurriendo, y que no ha sido bien explicado.

Intervención. Resolución de problemas de final abierto

Como mencionamos anteriormente, dado lo complejo que es producir una variación a nivel de sistemas de creencias, es imprescindible describir detalladamente la intervención que hemos estudiado, y así establecer por qué es un contexto propicio para estudiar el cambio de los docentes en relación con la resolución de problemas.

En Chile se han efectuado muchos esfuerzos en la línea de realizar intervenciones con el fin de producir cambios en las prácticas dentro de aula, por ejemplo, programas ministeriales intensivos de capacitación de profesores y asistencia técnica a las escuelas. Sin embargo, los efectos de estos esfuerzos son frustrantes y en el caso de la asistencia técnica son de baja magnitud y tienden a no ser sostenidos en el tiempo una vez que se retira la asistencia, lo que coincide con la experiencia internacional (Bellei, Osses y Valenzuela, 2010).

Garet et al. (2001) plantean que es más probable que un programa sea de calidad, adecuado y tienda a producir mejoras en los conocimientos y el desarrollo docente si es que: es sostenido en el tiempo, se da énfasis al contenido y hay conexión con las experiencias de desarrollo profesional.

La experiencia que se llevó a cabo con los profesores que conforman el objeto de este estudio cumple con los elementos antes descritos, ya que se desarrolló a lo largo de tres años, de manera longitudinal. Se comenzó a trabajar con un grupo de profesores de educación básica que hacían clases en 3º año básico y que trabajaron durante 3 años consecutivos (2011 – 2013) con el mismo grupo de estudiantes (3º, 4º y 5º básico).

El trabajo consistía en desarrollar una clase de resolución de problemas de final abierto una vez al mes, teniendo como objetivo el desarrollo de competencias y no la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático particular. Antes del trabajo en el aula cada problema se discutía y se consensuaban aspectos para la aplicación entre el grupo de investigadores y los profesores participantes.

Entrevistas con uso de viñetas

El estudio propuesto es de carácter descriptivo, para lo cual nos planteamos el uso de diversas técnicas de recolección de datos que nos permitan caracterizar el cambio de los profesores a partir de la experiencia desarrollada con ellos.

Consecuentemente para acceder al cambio del profesor desde su perspectiva utilizamos entrevistas en profundidad basadas en el uso viñetas, que permitan indagar en su interior.

La elaboración y uso de viñetas para el desarrollo de entrevistas en profundidad es una herramienta metodológica ideada para indagar en procesos profundos y no conscientes. Éstas se han utilizado en diversas áreas, sin embargo su utilización en la investigación educativa aún es incipiente y su utilización justamente permite desentrañar cambios "no conscientes" y acceder a procesos más allá de lo políticamente correcto (Lieberman, 1987; Aliverti y otros, 2007; Sánchez y otros, 2008; Yañez y otros, 2012).

En este caso, se diseñó una viñeta que permitiera desarrollar una entrevista en torno al cambio en las creencias referidas a la resolución de problemas de los profesores, a partir de su participación en el proyecto de resolución de problemas de final abierto antes descrito. La viñeta utilizada se le entregó a cada profesor un día antes de ser entrevistado para que tenga tiempo de pensar respecto de la misma. El formato era texto escrito, y decía:

"Debes desarrollar una clase centrada en resolución de problemas. ¿Qué tipo de problemas utilizarías? Da un ejemplo.

Al comenzar la entrevista se realizan las siguientes preguntas: ¿Qué es un problema? ¿Qué es resolver un problema?

Posteriormente se recuerda el texto de viñeta entregada y se continúa la entrevista en torno a las siguientes cuestiones: ¿Por qué escogiste ese problema?, ¿Qué lo hace interesante? , ¿Qué elementos debe tener una clase centrada en la RP?, ¿Cuáles de estos elementos reconoces haber desarrollado a partir del proyecto?

Cambios declarados por los profesores

En el análisis de las entrevistas distinguimos la existencia de creencias en torno a la resolución de problemas, algunos elementos que han variado en la concepción de resolución de problemas y la gestión en el aula, como también aquellos que se han mantenido invariantes. Para su descripción utilizaremos la distinción realizada anteriormente por Op´T Eynde et al. (2002) y descrita previamente.

Creencias sobre educación matemática

La totalidad de los profesores declaran que un problema es una situación que tiene una incógnita o pregunta que es necesario responder. Y la resolución de un problema es el camino utilizado para llegar a la respuesta. En este sentido los profesores mantienen una creencia de lo que es la resolución de problema estática, que no guarda relación con el desarrollo de una competencia, sino con la resolución de problema como el final de un proceso que se relaciona con aplicar conceptos aprendidos. Esto también lo arrojó el resultado de una encuesta realizada a los profesores al comienzo del proyecto y tres años más tarde al finalizar, en que no se declararon cambios en la concepción de resolución de problemas. Sin embargo, un instrumento de dicha naturaleza no permite recoger los cambios que sí se producen y que fue posible recoger utilizando la entrevista en profundidad con viñetas y que describimos a continuación.

Una vez inmersos en las preguntas desarrolladas a partir de la viñeta, 7 de los 10 profesores manifiestan que para desarrollar una clase de resolución de problemas utilizaría problemas cerrados y problemas de final abierto. De esos 7, cinco manifiestan que partirían con problemas muy guiados y terminarían la clase con un problema abierto en que los estudiantes tuvieran mayor libertad para determinar qué proceso de resolución llevar a cabo.

Además, cuatro profesores declaran que el tipo de problema que utilizarían depende del contenido matemático que se esté trabajando.

Aun cuando no se identifica como un cambio en las creencias, si se distingue como una creencia fuertemente arraigada en los profesores (expresada por 6 de los 10), que una clase de resolución de problemas tiene que tener un objetivo claro, que es de suma importancia saber hacia dónde van los problemas y qué se desea lograr con su resolución. Además, a este respecto, es importante precisar que para los profesores tener un objetivo claro no necesariamente se refiere a un objetivo relacionado con un contenido, sino que también consideran de suma importancia el plantearse como objetivo el desarrollo de competencias. Situación que da cuenta de un cambio sustancial a lo expresado por ellos al comenzar a participar en el proyecto, momento en que constantemente apelaban a la necesidad de vincular el trabajo de resolución de problemas con un contenido curricular a desarrollar.

Creencias respecto de sí mismo

Algunas de las creencias que los profesores modifican de manera más clara y que además la reconocen en su quehacer, se refiere a su manera de gestionar el aula, particularmente la creencia respecto la capacidad y disposición de ellos mismos para dar cabida a otras formas y por lo mismo, a situaciones nuevas dentro del aula.

En este sentido uno de los aspectos que los profesores integran en la gestión de la resolución de problemas es la consideración de los errores de los estudiantes. Esto lo manifiestan en dos direcciones: por una parte, que han perdido el miedo a que los estudiantes realicen ejecuciones inicialmente incorrectas y, en segundo lugar, que han aprendido que es posible guiar a los estudiantes para hacerlos conscientes de los errores.

Existe un cambio en las expectativas de logro de los estudiantes. Seis profesores subrayan frente a un problema de final abierto que todos los alumnos (incluso aquellos con problemas de aprendizaje) producen respuestas posibles. Además, que no se cumple la linealidad de que aquellos estudiantes que son "buenos en matemáticas" producen más y mejores respuestas y aquellos "que no son buenos" no producen respuestas, sino que muchas veces se invierten dichos papeles.

Respecto de las expectativas que tienen sobre el trabajo de los estudiantes una profesora manifiesta "todos los estudiantes producen respuestas, y a veces producen más respuestas de las que yo he sido capaz de encontrar" y esto constituye un valor dentro del aula y no un problema.

Además, se observa la capacidad de los profesores de salir un estado políticamente correcto y aceptar que los estudiantes, muchas veces, son capaces de realizar cosas que ellos no habían pensado.

Creencias respecto del contexto social

La gestión de una clase de resolución de problemas es uno de los aspectos en los que se han producido mayores cambios, y que los profesores los reconocen con mayor claridad.

Una de las cosas que los profesores destacan es haber aprendido a aceptar que todas las respuestas podrían ser válidas, siempre y cuando los estudiantes argumenten correctamente.

Guardando una estrecha relación con lo anterior, cinco de los diez profesores manifiestan la importancia de que los estudiantes expliquen verbalmente qué es lo que han hecho y para ello, que tengan la oportunidad de explicarlo a sus compañeros y convencerlos de sus argumentos si la respuesta es correcta o identificar el error si es que no lo es.

Esto conlleva un cambio en las normas de trabajo en el aula. Las aulas se convierten en un espacio donde hay más opciones de interacción en torno a la matemática.

Comentarios finales

Es destacable, luego del análisis de las entrevistas realizadas, que ha sido posible distinguir creencias referidas a la RP que, después de una intervención en las aulas a lo largo de tres años, algunas han variado y otras que no. Esta distinción es de gran riqueza para comprender la complejidad del cambio que vive un profesor en su vida profesional.

Como plantea el modelo de Guskey (2002) antes descrito, la experiencia de RP de final abierto en las aulas significó que como desarrollo profesional se incorporó un cambio en el trabajo que se realizaba al interior de ellas. Esto trajo consigo una variación en las creencias de los profesores, principalmente, respecto de lo que sus estudiantes son capaces de hacer. Ello se ve reflejado en la declaración de que "todos los estudiantes son capaces de producir respuestas" y en que es de suma importancia "que los niños expliquen sus producciones a los demás".

Existe un elemento altamente destacable y que tiene que ver con la dirección de los cambios deseables que describimos al comienzo de este capítulo, y es que los profesores manifiestan que han aprendido a dar espacio a los estudiantes, que ellos han aprendido a "cerrar la boca" y escuchar. De esta manera se da espacio a la construcción de conocimiento realizada por los estudiantes, a que sean ellos quienes plantean las ideas que guían la clase, que sean ellos los que discuten la viabilidad de una respuesta. Sin duda esto abre el espacio y genera un escenario propicio para el desarrollo de competencias matemáticas. Incorporan la resolución de problemas de final abierto, pero no renuncian al trabajo guiado, luego se incorpora como otro tipo de RP.

Por otra parte existe una serie de elementos que se mantienen invariantes, entre estos destacamos: (a) relacionar la resolución de problemas con un contenido matemático determinado (b) posicionar la RP al finalizar un tema y (c) considerar la RP como una forma de aplicar lo aprendido, no como una competencia a desarrollar.

El factor que más ligado aparece a éstas invariantes, más que la definición de creencias periféricas y centrales, es el contexto en el que los profesores desarrollan su quehacer y por lo tanto la posibilidad cierta de creer en un cambio determinado. En este sentido, aun cuando el currículum chileno ha definido la RP como una de las competencias transversales a desarrollar: las evaluaciones a nivel nacional de logros de los estudiantes y, por lo tanto, indirectamente del trabajo realizado por los profesores, mantienen un fuerte acento en los contenidos que las disciplinas deben cubrir en cada nivel educativo, y por lo tanto, los profesores siguen otorgando una importancia central a los mismos.

En segundo lugar, no renunciar a la concepción de la RP como un trabajo que puede ser muy guiado, para un tipo de problemas y muy libre para otro tipo de problemas, si guarda relación con las creencias de cómo se construye el conocimiento matemático y respecto de lo qué es la matemática, y en este sentido se distingue una creencia central que es más compleja de cambiar porque está arraigada en el sistema de creencias.

Finalmente, destacamos la complejidad del trabajo en torno a determinar los factores que favorecen el cambio en los profesores y la necesidad de continuar la tarea respecto a desarrollar herramientas metodológicas que nos permitan indagar en el mismo, de esta manera también tendremos información empírica y relevante que permita tanto evaluar como diseñar los planes de formación e intervención en un sentido correcto.

Referencias

Alberti, A., Amos, D., Bates, B., Brennan, C., Carmak, C. y otros (2007). Study of teacher-consultants and leadership: Vignettes Study.National Writing Project. (Consulta on –line14.05.2012:http://www.nwp.org/cs/public/print/doc/results/leadership_vignette.html)

Bellei, C., Osses, A. y Valenzuela, J. P. (2010). Asistencia Técnica Educativa: de la Intuición a la Evidencia. Universidad de Chile – FONDEF. Ocholibros Editores.

Coll, C., Pozo, J. I., Sarabia, B. y Valls, E. (1994). Los contenidos en la Reforma. Enseñanza y aprendizaje de conceptos, procedimientos y actitudes. Buenos Aires: Editorial Santillana/AulaXXI.

Garet, M. S., Porter, A. C., Desimone, L., Birman, B. F., & Yoon, K. S. (2001). What makes professional development effective? Results from a national sample of teachers. American Educational Research Journal, 38(4), 915-945.

Guskey, T. (2002). Profesional development and teacher change. Teachers and teaching: theory and practice, 8(3), 381-391.

Lester, F.K., Garofalo, J. and Kroll, D.L. (1989). Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition: key influences on problem solving behavior. In D.B. McLeod and V.M. Adams (Eds.), Affects and mathematical problem solving (pp. 75-88). New York: Springer-Verlang.

Lieberman, A. (1987). Documenting professional practice: The vignette as a qualitative tool. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association. (ERIC Documente Reproduction Service N0. 5485215).

Liljedahl, P., Oesterle, S. and Bernèche, C. (2012). Stability of beliefs in mathematics education: a critical analysis. Nordic Studies in Mathematics Education, 17(3-4), 23-40.

OECD, (2004). The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills. USA: OECD Publishing.

Op´t Eynde, P., De Corte, E. and Verschaffel, L. (2002). Framing students´mathematics-related beliefs: a quest for conceptual clarity and a comprehensive categorization. In G. Leder, E. Pehkonen and G. Törner (Eds.), Beliefs: a hidden variable in mathematics education? (pp. 13-37). Dordrecht: Kluwer.

Richardson, V. (1998). How teachers change. What will lead to change that most benefits student learning? Focus on basics, connecting, research and practice, 2, issue C.

Sánchez, A. y Domínguez, A. (2008). Elaboración de un instrumento de viñetas para evaluar el desempeño docente. Revistas Mexicana de Investigación Educativa, 37, 625-648.

Smith, E. (1999). Reflective reform in mathematics: the recursive nature of teacher change. Educational Studies in Mathematics, 37, 199 – 221.

Wilson, M. y Cooney, T. (2003). Mathematics teacher change and developments. The role of beliefs. En Leder, G., Pehkonen, E. y Törner, G. (Eds.), Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?.(pp. 127-147). Mathematics Education Library, V(31).

Factores explicativos claves de la intención de comportamiento en matemática de estudiantes de enseñanza media

Marjorie Lagos Jeria, Claudia Montero Liberona, Patricio Montero Lagos.
Universidad de Santiago, Chile
marjorie.lagos@usach.cl; clmonter@gmail.com; patricio.montero@usach.cl

Resumen

Uno de los propósitos vinculados con la enseñanza de la matemática es el logro de numerosos comportamientos, por parte de los estudiantes, relacionados con contenidos matemáticos. Entre otros, se espera que ellos puedan conceptualizar, calcular, resolver problemas, conjeturar, argumentar, modelar y demostrar. Mediante distintas formas de enseñanza y el uso de estrategias didácticas matemáticas, los profesores ansían que sus estudiantes demuestren los comportamientos esperados. Sin embargo, muchas veces los logros de los alumnos están muy por debajo de las expectativas, interpretándose posibles discrepancias desde diferentes perspectivas teóricas relacionadas con diversos factores sociales, epistemológicos, culturales y económicos.

Ante el problema de cómo interpretar la intención de los comportamientos de los estudiantes, variadas experiencias internacionales relacionadas con estudiantes y la Teoría del Comportamiento Planeado - TCP (Ajzen, 1991) sustentan la importancia y el rol que juegan factores personales y sociales (Kovac, Cameron y Høigaard, 2014; Arditzoglou y Crawley III, 1992). De acuerdo a esta teoría de psicología social, la ejecución de una conducta está afectada por las actitudes de los individuos que están sustentadas por sus creencias, las normas sociales que están basadas en las percepciones sobre lo que los demás esperan de ellos, y por la percepción de control del comportamiento vinculada a la propia auto capacidad y autonomía de los estudiantes por ejecutar una conducta (Ajzen, 1991). En Chile, en el contexto de educación matemática no se han reportado investigaciones que hayan puesto a prueba las variables de este modelo.

Este estudio explora la importancia de los factores incluidos en la TCP en relación a algunos aprendizajes matemáticos de estudiantes en Chile. Frente a tres diferentes perspectivas globales (matemática, números y algebra) y tres situaciones matemáticas contenidas en el currículo escolar se indagaron posibles asociaciones entre la intención de comportamientos matemáticos con las actitudes, normas subjetivas y percepciones de control que manejan los estudiantes sobre sí mismos. Considerando las sugerencias metodológicas propuestas por el autor de esta teoría (Aizen, 2004), se elaboraron cuestionarios que fueron aplicados a 63 estudiantes de primero y segundo año medio, todos pertenecientes a un mismo colegio de la Región Metropolitana. Los resultados confirmaron la destacada importancia de la

creencia sobre su desempeño y la percepción de control y el escaso efecto de las normas sociales. Se finaliza con algunas proyecciones para la investigación e intervenciones en educación matemática.

Problema y Propósito del Estudio

De acuerdo a mediciones nacionales e internacionales, los estudiantes chilenos se ubican bajo las expectativas de logro, registrándose importantes distinciones entre tipos de estudiantes (Ramírez, 2006). A modo ilustrativo, se han documentado diferencias de logro entre estudiantes de distintos niveles socioeconómicos (Anand, Mizala, y Repetto, 2009) y por género (Nosek y otros, 2009).

En particular, investigaciones chilenas y extranjeras reconocen que existen varios factores interpretativos que explican las diferencias de aprendizajes de los estudiantes, las que pueden estar situadas tanto dentro como fuera del colegio e, inclusive, con algunas ubicadas fuera de la sala de clase (Kuh, 2009).

La Teoría del Comportamiento Planeado - TCP (Ajzen, 1991) ha sido ampliamente utilizada en diversos países, para interpretar situaciones conductuales específicas en diferentes áreas, tales como conductas relacionadas con el uso del tabaco (Godin y otros, 1992), la intención de usar cinturones de seguridad (Trafimow y Fishbein, 1994), entre otras. En tanto, en Chile esta teoría sólo ha sido aplicada en algunos ámbitos que no incluyen la educación matemática: en una investigación sobre las normas del tránsito Moyano (1997), en la comunicación persuasiva y el cambio de actitudes en los peatones (Conejera y otros, 2003), en el emprendimiento global (Martínez & Pardo, 2013) y en la adopción del e-commerce (Grandon y otros, 2011).

La TCP consta de tres dimensiones que determinan la intención de conducta de un individuo. La primera, son las actitudes hacia la conducta, conformadas por las creencias que una persona tiene sobre un comportamiento, si es bueno o malo (Ajzen 1991). Para Ajzen (1991), los tipos de creencias que subyacen en una persona son actitudes denominadas creencias de comportamiento. En esta investigación, las actitudes estarán directamente relacionadas con las creencias de los estudiantes de primero y segundo medio, respecto a sus actitudes frente a diferentes tipos de situaciones matemáticas incluidas en el currículo escolar.

La segunda dimensión de la TCP son las normas subjetivas, las que están determinadas por lo que ciertos individuos o grupos específicos piensan sobre lo que otros deberían hacer (Ajzen, 1991). De esta forma, la intención de una conducta está marcada por los grupos de referencia que rodean a los individuos (Ajzen, 1991). De acuerdo al autor de esta teoría, las creencias que subyacen a las normas subjetivas de una persona se denominan creencias normativas. En esta investigación, las normas subjetivas están consideradas como aquellas creencias y motivaciones respecto a lo que los otros pares o familiares de los estudiantes piensan que ellos debiesen saber o hacer.

La tercera dimensión de la TCP corresponde a la percepción de control del comportamiento. En particular, esta dimensión descansa en la idea que el sujeto cuenta con autonomía y capacidad para realizar una determinada conducta (Ajzen, 1991). Para esta investigación, la percepción de control conductual será evaluado respecto a lo que los estudiantes perciben que son capaces de realizar por ellos mismos, sobre la base de algunos casos de problemas matemáticos presentes en el currículo chileno.

Uno de los aspectos fundamentales a observar mediante la aplicación de esta teoría es que, si bien, muchas veces la varianza total que explica la intención del comportamiento de los individuos puede ser numéricamente similar en muchos casos; su composición puede estar constituida por diferencias entre las tres dimensiones de la teoría. Es decir, actitudes hacia la conducta, normas subjetivas y la percepción de control de la conducta, pueden combinarse de diferentes maneras privilegiando más unos factores sobre otros; a pesar de arrojar como resultado un mismo porcentaje de variación de intención de conducta en un individuo. Por ejemplo, un estudio sobre matemáticas y ciencias en Palestina a mujeres estudiantes de 10° grado demostró que existen cambios significativos en las actitudes y en la percepción de control de comportamiento, no encontrándose influencias acerca de las normas sociales (Arditzoglou y Crawley III, 1992). En tanto, otro estudio internacional realizado con estudiantes secundarios sobre la movilidad la decisión de obtener un certificado de egreso de sus estudios, las tres dimensiones de la TCP fueron valoradas en igual proporción (Schuchart, 2013). Esto es especialmente importante si se busca comprender en profundidad las razones que pueden explicar las conductas de los estudiantes de primero y segundo medio, frente a ciertos problemas matemáticos o contenidos del currículo de Matemática en Chile.

Específicamente, este estudio explora la importancia de las dimensiones de la TCP en la intención de conducta de estudiantes de primero y segundo medio, respecto aprendizajes matemáticos generales (matemática, números y algebra) y tres tipos de aprendizajes matemáticos contenidos en el currículo chileno.

Método

Sujetos: En este estudio participó un total de 63 estudiantes chilenos de un mismo colegio particular subvencionado. Del total de la muestra, el 46% cursa primer año medio y el 54% cursa segundo año medio. En tanto, el 40 % son hombres, y el 70% tenía entre 14 y 15 años al momento de la medición. Adicionalmente, el 20% del total de la muestra había repetido alguna vez de curso.

Instrumento: Para la elaboración del instrumento, se siguió las orientaciones metodológicas proporcionadas por Ajzen (2004). En primer lugar, con un propósito exploratorio, se entrevistó a 6 estudiantes con distintos niveles de rendimiento en matemática. Luego, se elaboraron y validaron, mediante juicios de dos expertos, 18 ítems proposicionales relacionadas con las actitudes, normas subjetivas y percepción de control del comportamiento, con la intención de aprender matemática, álgebra y números. Las proposiciones fueron entregadas a los estudiantes de primero y segundo medio en una escala de medición ordinal, con las opciones: "muy de acuerdo", "de acuerdo", "en desacuerdo" y "muy en desacuerdo". Un ejemplo de una proposición utilizada es: "Siento que es importante aprender matemática" (proposición número 1).

En una segunda parte del instrumento, en cada curso fueron presentadas tres tareas matemáticas: en primero medio, una ecuación, una sobre resolución de problemas y una demostración; mientras que, para segundo medio, un sistema de ecuaciones, una sobre resolución de problemas y una demostración. A modo de clarificar las diferencias entre ambos cursos, se presenta el siguiente ejemplo: en el caso de primer año medio, "Mi aproximación por truncamiento al número 21,66792 a la milésima sería 21,667" (ítem número 1); en tanto, para segundo año medio fue, "Mi conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$x - 2y = 1$$
$$3x + y = 3$$

será" (ítem número 1). Las opciones de respuesta de los estudiantes fueron estudiadas utilizando una escala de diferencial semántico de siete opciones, de bueno a malo.

Aplicación y Análisis de Datos.

El instrumento fue aplicado por una profesora durante una jornada normal de clase de matemática, en menos de 45 minutos. No hubo consultas por parte de los estudiantes. La confiabilidad del instrumento fue alta 0,88 Los datos fueron analizados usando el paquete estadístico SPSS, obteniéndose resultados descriptivos y correlaciones.

Resultados

Distribución de frecuencias sobre dimensiones del TCP e intenciones de conducta de los estudiantes relacionados con aprendizajes matemáticos generales.

En general, las tendencias de frecuencias en las respuestas de los estudiantes son favorables para la mayoría de las proposiciones siendo más favorables para los estudiantes de primer año medio que respecto a los de segundo año. Tanto el intentar aprender Álgebra es menos frecuente que intentar matemática o números, condición que también se observa con la percepción de control y sobre el grado de importancia.

Estadísticos descriptivos y correlaciones entre las proposiciones específicas

Considerando que las mayores variabilidades en la intención de la conducta se encontraron en segundo año medio, en esta presentación, se incluyen los resultados de los estadísticos descriptivos de las proposiciones específicas respecto a la resolución del sistema de ecuaciones (ítems 1 .5) , a la resolución del problemas (ítems 6-10) y a la demostración (ítems 11-15). En general los estudiantes tienden declarar un desempeño regular (neutral) y con una percepción de control e intención de la conducta superior. Tal como se puede observar en la tabla siguiente la percepción de control y la percepción de desempeño están fuertemente asociadas a la intención del logro del desempeño esperado, notándose además que las percepciones sobre las normas son claramente más débiles y frecuentemente la relacionada con los padres no es estadísticamente significativa.

Ítem	Media	DE	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
1	3,20	1,979															
2	3,24	1,480	0,068														
3	4,28	1,792	-0,099	0,288													
4	4,60	2,000	0,505	-0,177	-0,002												
5	4,40	2,062	0,460	-0,156	0,025	0,718											
6	4,52	2,275	0,318	-0,076	-0,129	0,322	0,531										
7	4,04	1,968	0,319	-0,018	-0,192	0,100	0,314	0,758									
8	4,80	1,826	-0,046	0,111	0,005	0,240	0,177	0,086	0,199								
9	5,0	2,041	0,351	-0,166	-0,262	0,592	0,703	0,583	0,404	0,280							
10	5,88	1,943	0,407	-0,048	-0,74	0,630	0,896	0,674	0,437	0,134	0,756						
11	4,04	1,791	0,468	-0,208	-0,185	0,610	0,740	0,414	0,236	-0,061	0,730	0,780					
12	3,88	1,641	0,777	0,115	-0,158	0,391	0,446	0,475	0,453	0,075	0,299	0,439	0,257				
13	4,48	2,002	0,301	0,269	0,228	0,300	0,375	0,181	0,037	0,574	0,387	0,401	0,366	0,221			
14	4,44	1,895	0,520	-0,247	-0,050	0,796	0,817	0,293	0,118	0,183	0,711	0,671	0,793	0,420	0,392		
15	4,52	2,044	0,622	-0,126	-0,110	0,736	0,858	0,352	0,191	0,018	0,649	0,824	0,837	0,467	0,405	0,832	

Tabla 3. Correlaciones de las variables (N=25).

DE desviación estándar. Items: **1,6 y 11** =actitud; 2, 3, 7, 8, 12 y 13= norma subjetiva; *4, 9 y 14*= percepción de control del comportamiento; 5,10 y 15=intención de la conducta de los estudiantes.

Conclusiones y Proyecciones

En términos globales, este estudio muestra la importancia de considerar las creencias que afectan a las actitudes, las percepciones de las normas sociales y a la percepción de control para explicar la intención de los comportamientos matemáticos de los estudiantes. En particular para estos estudiantes de nivel socioeconómico medio; de este modelo psico-social, las actitudes basadas en creencias respecto a su nivel de desempeño y su percepción de control, están recurrentemente más asociadas a la intención de la conducta que las percepciones sobre las normas sociales.

Sus potenciales aplicaciones son múltiples para mejorar los aprendizajes matemáticos y orientar los procesos de transformación esperados de los estudiantes. A modo ilustrativo, van desde las instancias evaluativas diagnósticas, apoyando el monitoreo de instancias evaluativas formativas y, de instancias sumativas. Desde la perspectiva de las estrategias metodológicas de enseñanza, contribuyen a ajustar decisiones de los análisis didácticos de la clase a las características de los estudiantes.

Finalmente, estos resultados exploratorios requieren ser generalizados. Se requiere no solo avanzar las componentes y relaciones del modelo con los tipos de aprendizajes abordados en este estudio respecto a otro tipo de estudiantes, sino que también, deben ser generalizables las relaciones del modelo con otros aprendizajes matemáticos. En breve, las generalizaciones de estos resultados pueden contribuir a generar mejores oportunidades de aprendizajes desde la identidad de los estudiantes.

Referencias

Arditzoglou, S. Y., y Crawley III, F. E. (1992). Structural Equation Modeling of Science and Mathematics Achievements of Secondary I Females in Arab Jerusalem: An Application of the Theory of Planned Behavior. Recuperado de: files.eric.ed.gov/fulltext/ED348230.pdf

Anand, P., Mizala, A., y Repetto, A. (2009). Using school scholarships to estimate the effect of private education on the academic achievement of low-income students in Chile. Economics of Education Review, 28(3), 370-381.

Ajzen, I. (1991). The theory of planned behavior. Organizational Behavior and Human Decision Processes, 50, 179-211.

Ajzen, I. (2004). Constructing a TPB questionnaire: Conceptual and methodological considerations. Recuperado de: people.umass.edu/aizen/pdf/tpb.measurement.pdf

Godin, G., Valois, O., Lepage, L., y Desharnais, R. (1992). Predictors of smoking behavior: An application of Ajzen's theory of planned behavior. British Journal of Addiction, 87(9), 1335-1343.

Grandón, E. E., Nasco, S. A., y Mykytyn Jr, P. P. (2011). Comparing theories to explain e-commerce adoption. Journal of Business Research, 64(3), 292-298.

Hinojosa Martínez, S., y Albornoz Pardo, C. (2013). Ganas de Emprender y Felicidad: un Estudio Exploratorio a Partir del Global Entrepreneurship Monitor en Chile. Journal Of Technology Management & Innovation, 8(1), 76-89.

Idíogoras, M. C., Christie, D. D., Díaz, E. M., Herborn, J. P., y de León, F. S. P. (2003). Comunicación persuasiva y cambio de actitudes hacia la seguridad de tránsito en peatones. Revista Latinoamericana de Psicología, 35(1), 77-90.

Kuh, G. D. (2009). The national survey of student engagement: Conceptual and empirical foundations. New Directions For Institutional Research, 141, 5-20.

Moyano, Moyano Díaz, E. (2002). Theory of planned behavior and pedestrians' intentions to violate traffic regulations. Transportation Research Part F: Traffic Psychology and Behaviour, 5(3), 169-175.

Ramírez, M. J. (2006). Understanding the low mathematics achievement of Chilean students: A cross-national analysis using TIMSS data. International Journal of Educational Research, 45(3), 102-116.

Schuchart, C. (2013). Upward mobility among secondary education students: the decision to obtain a better certificate. European journal of psychology of education, 28(2), 201-221.

Trafimow, D., & Fishbein, M. (1994). The importance of risk in determining the extent to which attitudes affect intentions to wear seat belts. Journal of Applied Social Psychology, 24(1), 1-11.

Velibor Bobo Kovac, David Lansing Cameron y Rune Høigaard (2014): The extended Theory of Planned Behavior and college grades: the role of cognition and pastbehavior in the prediction of students 'academic intentions and achievements, Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology.

Efectos de las estrategias estudio de clases y de casos en planificaciones de matemática propuestas por estudiantes de la carrera de pedagogía en educación básica

Pierina Zanocco Soto, Constanza Ripamonti Zañartu
Universidad Santo Tomás - Santiago-Chile
pzanocco@santotomas.cl, mripamonti@santotomas.cl

Resumen

La investigación *"Generación de ambientes reflexivos y decisiones pedagógicas fundamentadas, en la Didáctica de la Matemática: Estudio de casos y Estudio de clases"*, se focalizó en las dos asignaturas de Didáctica de la Matemática, del plan de formación de profesores de Pedagogía en Educación Básica. Se trabajó durante dos semestres con las estrategias mencionadas, privilegiando potenciar la generación de espacios reflexivos y toma de decisiones pedagógicas fundamentadas con marcos teóricos disciplinares, didácticos y pedagógicos referidos a la enseñanza y aprendizaje de la Matemática y relevando la importancia que tiene la planificación de clases en la preparación de profesores (LipingMa, 2010) donde además, el trabajo colaborativo y reflexivo permite mejorar sus prácticas pedagógicas (Hiebert y Stigler, 1999).

Dada la relevancia de la planificación, esta ponencia presenta el análisis de sesenta planificaciones de clases de Matemática de diez estudiantes de la Práctica Profesional de la carrera de Educación Básica. Estas son representativas de dos momentos: tres planificaciones, por estudiante, corresponden al inicio de la Práctica anterior y otras tres pertenecen al momento terminal de la Práctica Profesional. Para su evaluación se contó con una Pauta de veinte indicadores, cuyo peso está dado por un conjunto de criterios, como por ejemplo, precisión conceptual, adecuación, relevancia, coherencia, suficiencia, precisión técnica. Este análisis permite evidenciar el impacto que las estrategias Estudio de Clases y Estudio de Casos han tenido en la formación inicial de profesores en las habilidades mencionadas en el párrafo anterior, relevando justificaciones que sustentan las decisiones de cada planificación. Se presentan resultados de orden cuantitativo y cualitativo.

Introducción

Esta ponencia se enmarca dentro de la investigación *"Generación de ambientes reflexivos y decisiones pedagógicas fundamentadas, en la Didáctica de la Matemática: Estudio de casos y Estudio de clases"* realizada a partir del año 2012 hasta el presente año, Se trabajó con grupos de estudiantes de la carrera de Pedagogía en Educación Básica que asistían a las clases de Didáctica de la Matemática I y II.

Los resultados que se exponen en esta ponencia están relacionados con el trabajo realizado durante dos semestres con las estrategias mencionadas, privilegiando potenciar la generación de espacios reflexivos y toma de decisiones pedagógicas fundamentadas con marcos teóricos disciplinares, didácticos y pedagógicos referidos a la enseñanza y aprendizaje de la Matemática y relevando la importancia que tiene la planificación de clases en la preparación de profesores (LipingMa, 2010) donde además, el trabajo colaborativo y reflexivo permite mejorar sus prácticas pedagógicas (Hiebert y Stigler, 1999).

La necesidad de la formación de futuros docentes con habilidades reflexivas y de pensamiento crítico

Las investigaciones internacionales nos muestran un panorama desolador: mientras en la última prueba PISA[3], Chile subió seis puntos en lectura, se mantuvo con malos resultados en matemáticas. En 2010, en la prueba TEDS-M[4], que midió el desempeño en matemáticas de futuros docentes, los chilenos se ubicaron últimos. Si consideramos el último informe de la OCDE[5] sobre Educación Superior en Chile tendremos la confirmación que a las universidades privadas que no participan del CRUCH ingresan principalmente alumnos de colegios subvencionados o municipalizados y con puntajes cercanos a los 500 puntos en la PSU, evidenciando una formación escolar deficiente y/o incompleta. Esta brecha fue aún más pronunciada en la prueba de matemáticas.

El Programa INICIA[6] que surge como una propuesta del Ministerio de Educación de transformación de las instituciones, currículos y prácticas involucrados en la formación inicial docente, no muestra resultados mejores a los presentados en la formación de los profesores generalistas en el área de matemática; esto después de haber pasado por las aulas universitarias. Pareciera que el impacto en la formación de los futuros profesores, al menos en su formación disciplinar es mínimo.

Estos resultados se suman a creencias muy arraigadas en la cultura escolar en relación con la matemática. Felmer y Varas (2007) afirman en su estudio sobre la enseñanza de la matemática en EB: "En Chile domina la creencia de que la matemática es difícil, reservada sólo para algunos genios, y que la mayoría tiene que lidiar con ella o tratar de evitarla. Resulta plenamente aceptable que personas adultas exitosas profesionalmente digan que nunca entendieron tal o cual concepto de la matemática escolar. No hay ninguna razón para suponer que entre los numerosos alumnos que todos los años ingresan a nuestras instituciones de educación superior para estudiar Pedagogía en Educación Básica exista una creencia diferente. Se da en Chile – y lo ratifican los datos exhibidos - una paradoja fatal para nuestras ilusiones de elevar sustancialmente los resultados escolares: 'En Chile pensamos que la matemática es difícil y a la vez creemos que para enseñar matemática elemental no es necesario prepararse' ".

La investigadora china Liping Ma (2010), autora de un profundo análisis entre la enseñanza de las matemáticas en China y EE.UU., explica que, pese a sus esfuerzos, los países de gran tamaño y de recursos limitados no han logrado atraer a los mejores alumnos a la docencia, y, que la principal diferencia entre los profesores chinos y los norteamericanos no es la cantidad de horas/años de formación disciplinar y pedagógica, sino que sus conocimientos matemáticos de base y

3 2009. OCDE PISA : Program for International Student Assessment

4 2010 Michigan State University Center for Research in Mathematics and Science Education: Initial findings from the teacher education and development. Study in mathematics (teds-m) in the United States

5 2009,OCDE y el BIRD/Banco Mundial, La educación superior en Chile

6 Programa para la Formación Inicial Docente, MINEDUC, Chile

la cantidad de tiempo que dedican a planificar, evaluar y reflexionar respecto de sus prácticas pedagógicas y el aprendizaje de sus alumnos.

Según los resultados de su investigación el desafío que representa enseñar la matemática elemental, se puede fundamentar en dos pilares: el desarrollo de un conocimiento profundo de la matemática escolar a enseñar y prácticas pedagógicas rigurosas de planificación preparación y evaluación de sus clases.

Metodología

Dada la relevancia de la planificación, este trabajo presenta el análisis de tipo cuali-cuantitativo de sesenta planificaciones de clases de Matemática de diez estudiantes de la Práctica Profesional de la carrera de Educación Básica. Estas son representativas de dos momentos, tres planificaciones, por estudiante, corresponden al inicio de la Práctica Pedagógica anterior, Práctica III y otras tres pertenecen al momento terminal de la Práctica Profesional. Cada planificación fue analizada tanto desde la propuesta didáctica como de la fundamentación desde marcos teóricos disciplinares, didácticos y psicológicos, para su análisis se utilizó una pauta.

El instrumento

Para el análisis de las planificaciones se contó con una Pauta de veinte indicadores, cinco de los cuales se referían a la Comunicación escrita, con una ponderación de un 30 % y otros quince al Contenido, con una ponderación de un 70%. Los indicadores de contenido estaban relacionados con la propuesta de actividades para cada uno de los momentos de la clase, los recursos pedagógicos, los recursos evaluativos, fundamentación explícita de la toma de decisiones, entre otros. La escala de valoración estaba definida de 0 a 3 puntos. El peso de cada uno de estos indicadores estaba dado por un conjunto de criterios, como por ejemplo: precisión conceptual, adecuación, relevancia, coherencia, suficiencia, precisión técnica, los cuales se describen a continuación:

Tabla N° 1 Definición de criterios	
PCo	**Precisión Conceptual:** Los conceptos, ideas y teorías relacionados con los marcos referenciales teóricos pedagógicos y disciplinares presentan exactitud rigurosa y sus significados corresponden a las fuentes mencionadas.
P	**Pertinencia:** Las actividades de aprendizaje, los recursos didácticos, las instancias evaluativas, etc., están relacionados y corresponden al foco de la práctica establecido en el programa de asignaturas y a los contenidos estudiados en las asignaturas disciplinarias y pedagógicas que se integran a esta actividad curricular.
R	**Relevancia:** La información, conclusiones, inferencias, etc. responden a aspectos de importancia y destacados.
C	**Coherencia:** Los distintos componentes del acto didáctico, aprendizajes esperados, actividades, recursos, evaluación, intencionalidad del momento de la clase, la intervención estudiante, etc. Tienen conexión entre sí, están relacionados de modo lógico, evidencian unidad.
A	**Adecuación:** Las actividades, los recursos didácticos, las instancias evaluativas, los lenguajes, etc., se acomodan y son apropiados a las características contextuales de los/las alumnos/as.
S	**Suficiencia:** Las actividades, recursos, son los necesarios para lo que se requiere o se propone lograr.
Cl	**Claridad:** El mensaje en las distintas instancias comunicativas se distingue bien y es comprendido sin dificultad.
Es	**Estética:** Los recursos didácticos elaborados tienen una apariencia agradable a la vista, se aprecia en ellos armonía, belleza, prolijidad, limpieza.
Pt	**Precisión Técnica:** Los recursos didácticos (afiches, presentaciones, materiales concretos, etc.) y los recursos evaluativos (pruebas, controles, guías evaluativas) cumplen con las orientaciones, características y requisitos técnicos propios de cada uno.
Ex	**Exhaustividad:** Las descripciones, análisis, contienen todos los elementos y por tanto lo expuesto está completo.

A continuación, se muestran cuatro ejemplos de indicadores

Propone una secuencia didáctica acorde a los aprendizajes comprometidos en la clase. (P-C-A)

Propone actividades de cierre que aseguran la sistematización y metacognición de los aprendizajes comprometidos en la clase. (P-C)

Explicita los fundamentos didácticos considerados para el diseño de la propuesta de clase. (PC -R-C –A y –Cl)

Elabora recursos didácticos para la clase con calidad técnica y estética.(Pt-Es)

Los resultados

A continuación, se muestra una tabla con los datos estadísticos de las mediciones realizadas tanto en la Práctica III como en la Práctica Profesional considerando tanto los aspectos de la Comunicación como de los Contenidos.

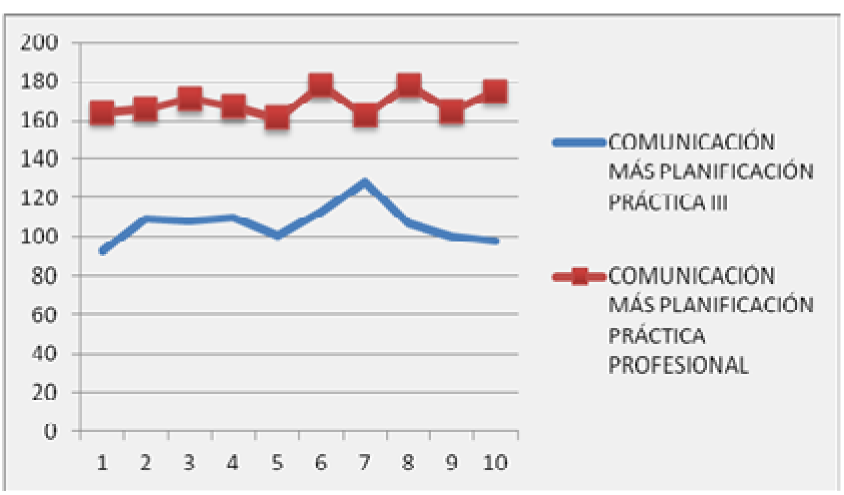
Tabla N° 2 Resultados obtenidos de la aplicación de la pauta en las instancias Práctica III y Práctica Profesional.

PRÁCTICA	ASPECTOS DE LA COMUNICACIÓN		ASPECTOS DEL CONTENIDO		TOTAL	
	MEDIA	DESVIACIÓN	MEDIA	DESVIACIÓN	MEDIA	DESVIACIÓN
III	22.7	5.9	79	7.9	106.7	9.7
PROFESIONAL	41.7	6.6	127	6.1	168.8	6.2
T de student	1.61*		8.24 *		3.6*	

Podemos observar que los t de student calculados son significativos al 0.05, lo cual nos muestra los avances logrados por los estudiantes en las planificaciones de sus clases.

A continuación, se presenta un gráfico con los puntajes obtenidos por los estudiantes en sus planificaciones en las dos instancias medidas.

Gráfico N° 1 Resultados obtenidos por los estudiantes en cada una de las aplicaciones de la Pauta, Práctica III y Práctica Profesional.



Este análisis permite evidenciar el impacto que las estrategias Estudio de Clases y Estudio de Casos han tenido en la formación inicial de profesores en las habilidades mencionadas, relevando justificaciones que sustentan las decisiones de cada planificación.

Conclusiones

La aplicación de ambas estrategias: Estudio de Casos y Estudio de Clases, ha producido efectos positivos en la propuesta de sus planificaciones y, por ende, también en la realización de sus clases.

Los/Las estudiantes:

- Formulan juicios fundamentados en referentes teóricos disciplinares, didácticos y psicológicos.
- Focalizan los aspectos más relevantes respecto de sus decisiones pedagógicas llegando a proyectar los efectos de estas.
- Establecen y justifican secuencias de aprendizaje en sus planificaciones tomando en cuenta los referentes teóricos y las características de sus alumnos.
- Justifican la selección tanto de sus recursos didácticos como evaluativos.
- Toman decisiones pedagógicas fundamentadas acerca de secuencias de objetivos de clases.
- Demuestran capacidades de autocrítica luego de llevar a la práctica su planificación, analizando los resultados obtenidos en sus alumnos y proponiendo acciones para corregir aspectos que se podrían optimizar.

Referencias

Arcavi, A., Isoda, M y Mena, A. (2007) El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Felmer, P. y Varas, L (2007) ¿Por qué fallamos los chilenos en Matemática?, rescatado en junio 2011 de http://www.dim.uchile.cl/~pfelmer/doc/FELMER%20VARAS.12.12.2007.pdf

Hiebert, J., Stigler, J. (1999) The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom. Nueva York: The Free Press.

Isoda, M. y Olfos, R. (2009) El enfoque de Resolución de Problemas. En la enseñanza de la Matemática a partir del Estudio de Clases. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Living Ma (2010) Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales. La comprensión de las matemáticas fundamentales que tienen los profesores en China y los EEUU. Santiago: Ediciones Academia Chilena de Ciencias.

Reyes, C. (2011) Estudio de casos en la formación de profesores de matemáticas: integrando matemáticas y pedagogía.

Villa, A y Poblete, M, C. (2007) Aprendizaje basado en competencias. Universidad Deusto, Bilbao, España.

Interpretación de la concepción dinámica de límite en el marco teórico APOE

Paula Jouannet Ortiz, Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
paulajouannet@udec.cl, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen

El presente trabajo se enmarca en una investigación mayor, la cual se propone atender la problemática subyacente de las dificultades y obstáculos en el aprendizaje y enseñanza del concepto de límite que merodean la dicotomía descrita por la concepción dinámica, entendiendo ésta en el sentido de Tall y Vinner (1981), y la definición formal de límite. Particularmente, en esta primera etapa de la investigación, se abordó la interpretación de la concepción dinámica de límite en términos de construcciones y mecanismos mentales, conceptos proporcionados por el marco teórico APOE. Esto se ha realizado mediante la indagación, complementándose con antecedentes de investigaciones en didáctica de la matemática y entrevistas semiestructuradas. Primeramente, se ha descrito la noción dinámica de límite como una organización compuesta de dos acercamientos, uno en el dominio y el otro en el recorrido, conectados mediante el concepto de imagen, a través de una implicancia. Posteriormente, se precisa progresivamente la ambigua idea de acercamiento, determinando características y asociando figuras en un principio, para luego identificarla con objetos matemáticos concretos. En definitiva, el acercamiento de una variable a un valor, se ha considerado posible de concebir como una sucesión finita o infinita de valores. También ha surgido la noción de acercamiento por vecindades a cierto valor. A su vez, los acercamientos pueden ser laterales, izquierdo o derecho, o bilaterales. Finalmente, se ha concebido la noción dinámica de límite como una organización susceptible a constituir un proceso, conformado por la coordinación de dos procesos de acercamiento de igual naturaleza, en el dominio y el recorrido de la función. La coordinación se efectúa mediante el concepto de imagen y el conectivo lógico condicional.

Palabras clave: Teoría APOE, límite de funciones, concepción dinámica

Introducción

El campo de investigación en Didáctica de la Matemática que se ha constituido en torno concepto de límite ha sido ampliamente desarrollado por numerosos investigadores, abordando tanto cuestiones relacionadas con el aprendizaje y cognición de esta noción, como lo que concierne a su enseñanza.

En particular, en la investigación por parte de Tall y Vinner (1981) sobre algunos problemas causados por la falta de coherencia y consistencia entre la imagen conceptual relativa a la noción límite. Esto es, toda la estructura cognitiva del individuo asociada a este concepto, y la definición formal del concepto, afirma que el límite de una función es a menudo considerado como un proceso dinámico, donde x se acerca a x_0 y, como consecuencia, $f(x)$ se acerca a ℓ, concepción que es acompañada con una clara sensación de movimiento. Los investigadores afirman que esta concepción, que forma parte de la imagen conceptual del límite, podría entrar en conflicto con la definición formal de límite. De ahí que la concepción dinámica asociada al límite haya constituido una cuestión relevante de considerar al momento de investigar sobre el aprendizaje de esta noción. Cottril, Dubinsky, Nichols, Schwinngendorf, Thomas y Vidakovic (1996) convienen dicha concepción dinámica como un componente del esquema asociado al concepto de límite, considerándola como parte necesaria para la construcción del límite.

No obstante el desarrollo de la discusión en torno a la concepción dinámica y su incidencia en el aprendizaje del concepto de límite, se estima que, en consideración de la perdurabilidad de la concepción dinámica, se podría indagar con mayor profundidad en la potencialidad de ésta, en cuanto a la posibilidad de constituir ella una llave en el engendramiento de una noción rigurosa matemáticamente y permanente en el transcurso del tiempo.

Marco Teórico

El marco que sustenta la interpretación de la concepción dinámica de límite es la teoría APOE, diseñada por Ed Dubinsky (1996) sobre la base de la teoría de Piaget sobre la construcción del conocimiento. Posteriormente se ha desarrollado con los aportes de varios investigadores del grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community). La sigla APOE alude a conceptos propios de la teoría, que son Acción, Proceso, Objeto y Esquema. La teoría se ubica en el ámbito de entendimiento de conceptos matemáticos, sosteniendo que el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, mediante construcciones mentales (acción, proceso, objeto y esquema), y mecanismos mentales (interiorización coordinación, encapsulación, descencapsulación y tematización). Las acciones se relacionan con operaciones efectuadas sobre objetos que obedecen a estímulos externos. En la reflexión, una acción puede interiorizarse en un proceso, el cual no precisa de estímulos externos para su evocación. A su vez, dos procesos se pueden coordinar en otro proceso. En la medida que el individuo realiza transformaciones sobre el proceso considerándolo como un todo, se entiende como la encapsulación de un proceso en un objeto, la cual, a diferencia de las dos anteriores, corresponde a una estructura estática. Asimismo, un objeto se puede descencapsular en un proceso, permitiendo regresar a la construcción que le dio origen. Por otra parte, los esquemas comprometen construcciones más amplias, correspondiendo a una colección coherente de construcciones y mecanismos mentales. Cuando un esquema se concibe como un objeto, éste se ha tematizado.

La teoría APOE provee un ciclo de investigación compuesto por tres elementos: análisis teórico o descomposición genética, diseño y aplicación de instrumentos, y análisis y verificación de los datos. El objetivo principal de la descomposición genética es proveer un modelo para el aprendizaje de un determinado concepto matemático, esta se prueba, se analiza y en caso de ser necesario se vuelve a la descomposición genética y se refina. Se sigue este ciclo en una investigación las veces que sea necesario.

Problemática y objetivo de investigación

En la descripción de dificultades con respecto al aprendizaje del concepto de límite de funciones, Sánchez (2012) alude a lo investigado por Vinner (1991), quien señala que la concepción dinámica prevalece sobre la definición formal, tanto en la resolución de problemas, comprensión de propiedades y explicitación de la definición de límite. En efecto, la alusión a la concepción dinámica, de modo independiente a la definición formal de límite, eventualmente permita el abordaje de tales tareas de manera satisfactoria. Sin embargo, en su carencia de rigurosidad, a saber, pudiera también conducir a errores. De hecho, en una medición inicial, se ha constatado tal situación. La totalidad de los estudiantes aludidos respondieron erróneamente a la pregunta que se enuncia a continuación.

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ *y* $\lim_{y\to y_0} g(x) = \ell$ *y* $g \circ f$ *está bien definida, ¿es verdad que* $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \ell$ *? Justifique brevemente.*

La totalidad de encuestados que justificaron la respuesta, hicieron referencia a la noción dinámica de límite. Este fenómeno forma parte de las dificultades y obstáculos que ha contemplado una investigación más amplia, en la cual se ha planteado el objetivo de diseñar una descomposición genética asociada al límite, en la cual se acople la concepción dinámica de límite como una elaboración mental, vinculándose de este modo, mediante construcciones y mecanismos mentales, dos nociones que en principio pudieran resultar distantes. No obstante, no es posible concebir directamente la concepción dinámica de límite como una construcción mental, debido a que no corresponde a una noción matemática formal.

De este modo, esta investigación se propone interpretar la concepción dinámica de límite en la teoría APOE. En esta dirección, se contempla desglosar elementos fundamentales de ésta y la relación entre ellos como organización. Debido a que la teoría se propone modelar construcciones asociadas a conceptos matemáticos, se plantea el objetivo de establecer formalizaciones de los elementos identificados, para finalmente otorgarles estatus de construcción mental.

Metodología

Se relaciona la investigación con la descripción de la noción dinámica de límite como organización, en la cual la idea de acercamiento se vislumbra como el único elemento no formal matemáticamente. Considerando que la idea de acercamiento es utilizada ordinariamente, se estima pertinente complementar la reflexión con una indagación en la interpretación de estudiantes de ésta, tanto previa como posteriormente a su utilización en el contexto del análisis elemental, para que así ellas sean reflejadas en una posterior formalización. Tal indagación de materializó en entrevistas semiestructuradas aplicadas a un grupo constituido por 5 alumnos que ya cursaron asignaturas de análisis elemental (caso 1) y un grupo de 5 alumnos que no (caso 2), apuntando a la dilucidación de características y clasificaciones de la idea de acercarse y a la asociación de ésta a figuras.

Finalmente, una vez realizada la asociación de conceptos matemáticos a la noción de acercamiento, se contemplaron antecedentes para la interpretación de la concepción dinámica en la teoría.

Antecedentes

La idea de noción dinámica de límite ya ha sido abordada por Cottril et al. (1996). En dicha investigación se diseña una descomposición de límite de funciones reales y de variable real, concepto que obedece a la tradicional ϵ-δ, la cual esencialmente establece que el *límite de* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *cuando* x *tiende a* $x_0 \in]a,b[$ es ℓ si

$$\forall\epsilon>0\ ,\ \exists\delta>0,\ \forall x \in\ ]a,b[\ ,\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\epsilon$$

En específico, describen la concepción dinámica de límite como un esquema que contempla, entre otras construcciones, la acción de la evaluación de la función f en unos pocos puntos, cada punto sucesivamente más cerca de x_0 que el punto anterior. El esquema se construye con la coordinación, a través de f, de dos procesos. El primero consiste en la interiorización de la acción mencionada, construyendo un proceso en el dominio de la función, en el cual x se aproxima a x_0. El segundo, en un proceso en el recorrido de la función, en el cual la variable independiente se acerca a ℓ.

Organización preliminar de la concepción dinámica de límite

Se han considerado como elementos constitutivos de la noción dinámica de límite, por un lado, el *acercamiento* de la variable independiente a x_0, y por otro, el *acercamiento* de las imágenes, por la función, de la variable independiente a ℓ. Estos elementos se han denotado simbólicamente $x\to x_0$ y $f(x)\to\ell$ respectivamente. La conexión de estos *acercamientos* se efectúa por medio del concepto de función, específicamente mediante el de imagen, obedeciendo a una implicancia. Hemos dispuesto gráficamente en la Figura 1 la organización de los elementos fundamentales de la concepción dinámica de límite, anteriormente descritos.

$$\boxed{x\to x_0} \xrightarrow{f} \boxed{f(x)\to\ell}$$

Figura 1: **Organización de los elementos de la concepción dinámica de límite.**

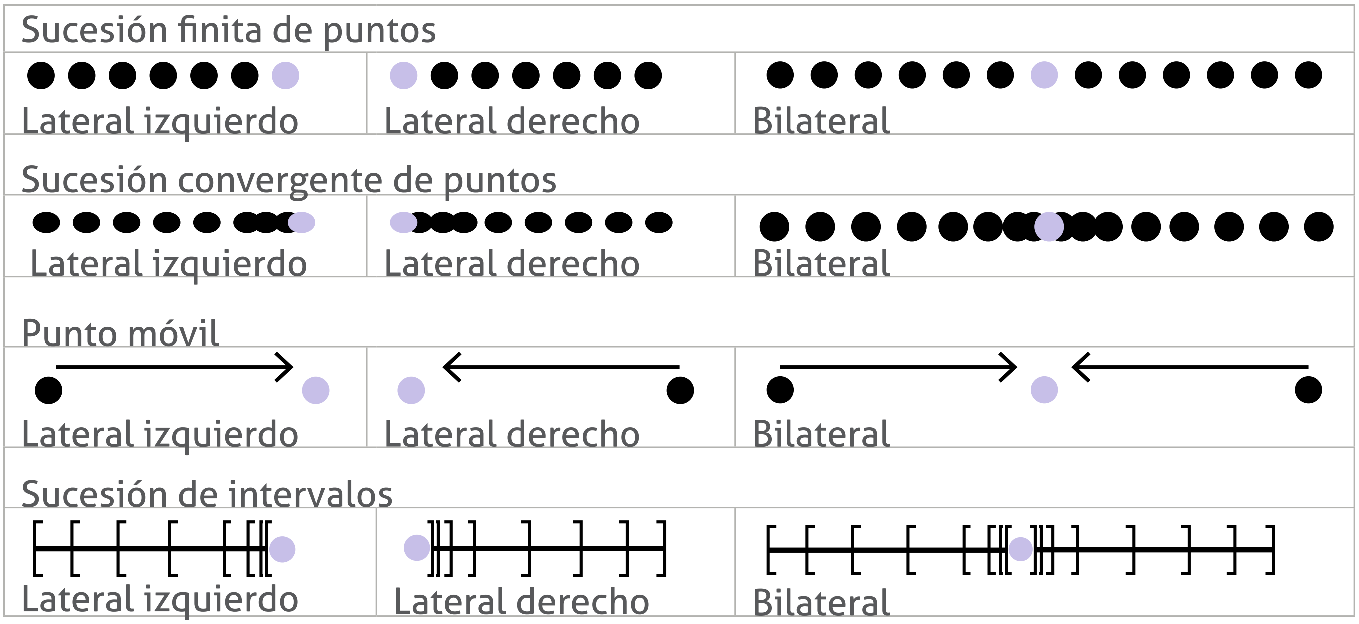
Del modo en que se ha establecido la organización de la concepción dinámica de límite, se advierte que para alcanzar el objetivo fundamental de la investigación, se hace necesaria la precisión de la idea de acercamiento de una variable a otra. El resto de los elementos involucrados en la organización establecida, los cuales corresponden al concepto de imagen de función y el conectivo lógico condicional, son nociones matemáticas formales.

Formalización de la idea de acercamiento de una variable a un valor

Ordinariamente, el vocablo *acercar* se interpreta como poner más cerca o menos lejos, donde la cercanía o lejanía se entiende, en general, en términos métricos. Como el *acercamiento* es efectuado sobre una variable, esto es, una cantidad susceptible de tomar distintos valores numéricos, es pertinente identificar esta idea con un conjunto que contenga tales valores. A su vez, se advierte que ésta, en general, compromete connotaciones temporales o variaciones, lo que sugiere la contemplación de algún elemento que refleje tal matiz. De este modo, se establece que el *acercamiento* de una variable a un valor constante debe concernir a un subconjunto del producto cartesiano entre el conjunto de los valores susceptibles a tomar por la variable y un conjunto asociado a una medida de tiempo, de modo que a cada elemento del conjunto que comprende el *acercamiento*, se asocie a una componente métrica y una temporal.

Además, se ha reportado la posibilidad de concebir el *acercamiento* de una variable a una constante considerando sólo los valores a un lado de la constante, o bien la derecha o bien a la izquierda, a los que se han denominado *acercamientos laterales*. En cambio, los que involucren valores a ambos lados de la constante, se han nombrado *acercamientos bilaterales*. Por otro lado, se han establecido categorías de análisis respecto a las figuras evocadas mentalmente en los dos casos de estudio en cuanto a la noción de *acercamiento*, las cuales se cotejan en la Tabla 1.

Tabla 1: Figuras asociadas a la noción de acercamiento de una variable a un valor.



Finalmente, en las formalizaciones determinadas han intervenido las nociones métricas aludidas por los sujetos de estudio. De considerarse una cantidad contable de valores en el *acercamiento*, éste puede formalizarse en una sucesión finita de puntos, donde cada punto involucrado es más cercano a la constante que el anterior, o bien en sucesión infinita convergente a la constante en cuestión. Si la variable es continua y existe una cantidad no numerable de valores involucrados, resultaría natural asociar la noción de función. No obstante, para formalizar la idea de *acercamiento* se debería recurrir a la definición de límite de funciones. Por tanto, en tal caso, se estima conveniente considerar un acercamiento mediante vecindades de la constante c, conformadas por puntos susceptibles a ser tomados por la variable. Tal noción se identifica con una sucesión de intervalos encajonados.

Interpretación de la noción dinámica en el marco teórico APOE

En consideración de los antecedentes y los resultados, en esta investigación se ha concebido la concepción dinámica de límite como una estructura susceptible a constituir un proceso construido por la coordinación de dos construcciones mentales vinculadas a la noción de *acercamiento* de una variable a un elemento, pudiendo ésta referirse a una sucesión finita, a una sucesión infinita o a una sucesión de intervalos. De este modo, identificando la concepción dinámica de límite con la frase "*cuando* x *se acerca a* x_0, $f(x)$ *se acerca a* ℓ", entendemos que ésta se trata de todo proceso construido por la coordinación de un proceso de *acercamiento* de x a x_0, en el dominio de la función, con un proceso de acercamiento de $f(x)$ a ℓ, en el recorrido de la función, siendo la coordinación mediada por el concepto de imagen y el conectivo lógico condicional.

Conclusiones y Comentarios

A modo de comentario, se advierte que la perdurabilidad y persistencia de la concepción dinámica de límite por sobre la definición formal se vislumbra en su relativa sencillez y versatilidad. El esquema que constituye la noción dinámica de límite se compone de sólo dos procesos, los cuales parecieran construirse espontáneamente por el individuo que los evoca, eventualmente, luego de ser enunciados por su profesor. Del mismo modo, pareciera ser que la coordinación no ostenta de mayor complejidad en el nivel superior. Si bien es cierto que el conectivo lógico condicional se caracteriza por ser un conectivo lógico bastante complejo de entender, la implicancia que está involucrada en la concepción dinámica de límite es sólo estudiada en caso de que el antecedente es una proposición verdadera, lo cual se traduce en examinar una relación de causalidad ordinaria. Por otro lado, el alcance de la noción de *acercarse* se vislumbra más amplio que el que sólo incluye referencias a números reales, ostentando caracterizar también *acercamientos* que no involucren necesariamente números, sino que figuras, superficies, cuerpos, colores y sonidos, entre otras variables.

Sin embargo, como ya se ha indicado, la alusión a la concepción dinámica de límite puede llevar a errores en algunos casos. En primer lugar, podemos atribuir estos desaciertos a la utilización del mismo vocablo para referirse tanto al *acercamiento* de las preimágenes como el de las imágenes, de modo que no se advierte en absoluto que pudieran comprometer procedimientos distintos.

Este estudio sugiere diseñar un modelo de construcción que consista en la formalización de la noción de acercamiento, la cual se ha configurado como una pieza fundamental de la concepción dinámica. En tal formalización, se debiese diferenciar el *acercamiento* en el dominio y el recorrido, contemplando además construcciones de apoyo, las cuales se anuncian como estructuras análogas a las nociones dinámicas, de modo que la noción formal de límite pueda construirse mediante la generalización de estos procesos, finalizando con la encapsulación en el objeto límite de funciones, el cual, por ende, no será entendido en términos de la habitual definición ϵ-δ .

Referencias

Cottril J., Dubinsky E., Nichols D., Schwinngendorf K., Thomas K., y Vidakovic D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. Journal of mathematical behavior, 15, 167-192.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed), Advanced Mathematical Thinking (pp. 95-123), Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. & McDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Holton (Ed.), The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study (pp. 273–280). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sánchez T. (2012). Límite finito de una Función en un Punto: Fenómenos que organiza (tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Tall D. y Vinner S. (1981) Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics. 12, 151–169.

Comprensión del producto vectorial desde los modos de pensamiento a partir de un análisis histórico-epistemológico

Rosario Guerra Martínez, Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
rosarioguerram@hotmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen

Se presenta aquí la primera de tres fases de investigación que se centra en la búsqueda de una comprensión profunda del objeto matemático "Producto vectorial", utilizando el marco teórico de los modos de pensamiento de Ana Sierpinska (2000), que permite definir distintos modos de pensar el objeto y establecer el tránsito entre ellos, con base en una metodología de estudio de casos.

En esta fase inicial, se definen los modos de pensamiento del producto vectorial a partir de un análisis histórico-epistemológico de dicho producto, donde el significado de éste adquiere gran relevancia en el origen de la teoría de los Cuaterniones, hasta el nacimiento del análisis moderno. Los modos que se precisan para una comprensión del producto vectorial son: el modo sintético-geométrico ($(P \times Q)$ como el vector perpendicular al plano que forman P y Q), el modo analítico-aritmético (como una expresión de la forma $P \times Q = (a_2 b_3 - a_3 b_2\, , a_3 b_1 - a_1 b_3\, , a_1 b_2 - a_2 b_1)$ y el modo analítico-estructural (como un producto que tiene las propiedades (1) de la no-conmutatividad, y (2) si $P \times Q = O$, si y solo si, P y Q son linealmente dependientes).

Palabras clave: modos de pensamiento, comprensión, producto vectorial.

Introducción

El análisis histórico-epistemológico que se realizó del producto vectorial, permitió mirar las distintas formas de entender que se tuvieron de este objeto matemático en distintos períodos de tiempo, desde una forma aritmética en sus inicios, pasando por una forma de pensar principalmente geométrica en una etapa intermedia, y finalmente en una forma estructural en la etapa en que se consolida el análisis vectorial. Esto permite definir los distintos modos de pensamiento, en la búsqueda de un tránsito entre ellos, para lograr una comprensión profunda del objeto.

El Producto Vectorial nace a partir del descubrimiento de los Cuaterniones por Sir William Rowan Hamilton en el año 1843, quien fue uno de los fundadores de la matemática moderna. Hamilton en esos años en sus trabajos sobre mecánica, comienza una búsqueda incansable sobre la forma de extender la comprensión geométrica de los números complejos en el plano, a una comprensión geométrica en tres dimensiones.

Dirige así su investigación en la búsqueda de una terna o número complejo tridimensional, pero durante muchos años no logra encontrar resultados satisfactorios para la geometría tridimensional, en particular al investigar una estructura para el producto. En esta operación observa que si bien la propiedad de conmutatividad es inherente a ella, Hamilton tuvo que dar un gran salto en la historia, abandonando ésta propiedad y aceptando que $ij = -ji$ (con i, j vectores en $\mathbf{R}^3$).

Además al intentar entender la multiplicación en el espacio, se dio cuenta de que eran necesarias cuaternas en lugar de ternas, fue así cómo nacen los Cuaterniones, números hipercomplejos cuatro dimensionales. Números con una parte escalar y una parte vectorial. Hamilton al definir las operaciones entre ellos, en particular la multiplicación de Cuaterniones, considerando solamente la parte vectorial o compleja del Cuaternión, dio origen también al producto vectorial o producto cruz.

A partir de allí la historia del Producto Vectorial está enlazada con la de los Cuaterniones, Según Gustavo Sierra y Pierre Francois (2008), en el artículo de "Historia sobre una Epistemología del Producto Vectorial", se distinguen tres etapas de la historia del producto vectorial:

- La primera referida a "Hamilton y el descubrimiento de los Cuaterniones" y el nacimiento del producto vectorial.
- La segunda etapa llamada "Los defensores y detractores de los Cuaterniones de Hamilton". Uno de los principales defensores fue Peter Guthrie Tait, quien publica un libro, donde desarrolla de forma más simple la teoría propuesta por Hamilton. En uno de sus capítulos explica los principios de la multiplicación de los Cuaterniones, como la anti-conmutatividad del producto vectorial (cruz).
  Un detractor de la teoría fue James Clerk Maxwell, quien rechaza a los Cuaterniones por tener una doble constitución, una escalar y otra vectorial, lo que dificulta su aplicación en diversos problemas, pero sí considera a esta teoría como una herramienta para entender de forma geométrica el cálculo, lo que implica aprehender a resolver un problema a través de su comprensión geométrica. Además realiza el producto de la parte escalar separado del producto de la parte vectorial, no considerando el producto del Cuaternión en su totalidad.
  Esta etapa se caracteriza porque se considera que la teoría de los Cuaterniones, constituyen una transición entre el cálculo geométrico plano al análisis vectorial.
- Y la última etapa, llamada "el nacimiento del análisis moderno", aquí destaca Josiah Willard Gibbs quien separa de forma definitiva la parte escalar de la vectorial de un Cuaternión, proponiendo dos productos, el producto escalar y el producto cruz, dando así inicio al análisis moderno.

Estado del arte del Producto Vectorial desde la matemática educativa

Se realizó una revisión de las actas de un destacado congreso de investigación en matemática educativa de Latinoamérica, RELME (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa), desde los volúmenes 19 al 27, entre los años 2006 al 2014 respectivamente. No encontrando ninguna investigación respecto a la enseñanza y aprendizaje del objeto matemático producto vectorial, lo que le da mayor significación a esta investigación.

Marco Teórico

Los modos de pensamiento es una teoría de la Didáctica de la Matemática creada por Anna Sierpinska, los cuales permiten interpretar los fenómenos que se relacionan con la forma de alcanzar un nivel superior de abstracción en conceptos del álgebra o del álgebra lineal.

La comprensión de las teorías matemáticas, en particular del álgebra lineal, requiere tanto de pensamiento práctico cómo de pensamiento teórico, por lo que esta teoría se desarrolla a partir de la explicitación del pensamiento "teórico". A partir de allí, Sierpinska identifica tres modos de comprender el álgebra lineal (Sierpinska, 2000), que son el resultado de la superación de dos obstáculos: uno, que rechaza los números dentro de la geometría, y el otro, que rechaza que la intuición geométrica pueda ser llevada a un dominio puramente aritmético. Además, ella señala que el desarrollo del álgebra lineal se da en dos procesos: Uno fue la aritmetización del espacio, que tuvo lugar al pasar de la geometría sintética a la geometría analítica, y el otro fue la desaritmetización del espacio a su estructuración.

Es así entonces como esta teoría define los tres modos de pensamiento que constituyen formas de pensar y entender los objetos matemáticos, y además permite la coordinación y el tránsito entre ellos, en que cada uno de los modos constituye una vía de acceso a los diferentes significados del objeto, permitiendo tener acceso a diferentes facetas del objeto matemático.

> **El modo sintético-geométrico (SG):** Los objetos son presentados al estudiante mediante una representación geométrica, una figura, un conjunto de puntos. Las interpretaciones se dan mediante las operaciones que están definidas entre conjuntos, en este caso de puntos, esto es la unión, la intersección, etc. (Parraguez, 2012, p. 17).
>
> **El modo analítico-aritmético (AA):** Los objetos matemáticos son pensados a través de relaciones numéricas, los puntos del plano aparecen como pares ordenados de reales, las rectas como ecuaciones, los vectores como n-uplas, las matrices son arreglos de números en filas y columnas. En este modo el pensamiento es teórico desde el momento en que el estudiante debe interpretar los objetos a partir de ciertas relaciones numéricas o simbólicas. (Parraguez, 2012, p. 17).
>
> **El modo analítico-estructural (AE):** Se recurre más bien a las propiedades de los objetos o a su caracterización a través de axiomas. Las matrices, funciones, sucesiones, entre otras, pueden ser vistas como elementos genéricos de un espacio vectorial. (Parraguez, 2012, p. 18).

A partir del estudio histórico-epistemológico que se ha realizado del producto vectorial, se sustentan los tres modos de comprender el producto vectorial, los cuales se describen a continuación:

El modo sintético-geométrico: Este modo considera relevante la etapa "Defensores y detractores de los Cuaterniones de Hamilton" donde matemáticos como Maxwell, ven el potencial de entender al objeto matemático en su modo geométrico, ya que permite una comprensión geométrica del cálculo.

El modo analítico-aritmético: Este modo se sustenta principalmente en la etapa de "Hamilton y el descubrimiento de los Cuaterniones", en la cual se realiza el producto de números cuatro dimensionales, donde su parte vectorial corresponde a lo que hoy se conoce como producto cruz.

El modo analítico-estructural: El cual consideramos que se consolida en la etapa "el nacimiento del análisis moderno", ya que aquí se separa la parte escalar, de la vectorial de un Cuaternión, por lo que se define formalmente el producto cruz, estableciendo sus distintas propiedades que hereda de la estructura de los Cuaterniones, que hoy en día son un cuerpo que no satisface la conmutatividad de la multiplicación.

Con base en las descripciones anteriores, se precisan los siguientes modos de pensar el producto vectorial:

Modo Sintético-Geométrico del producto vectorial: Se describe a través de la Figura 1.

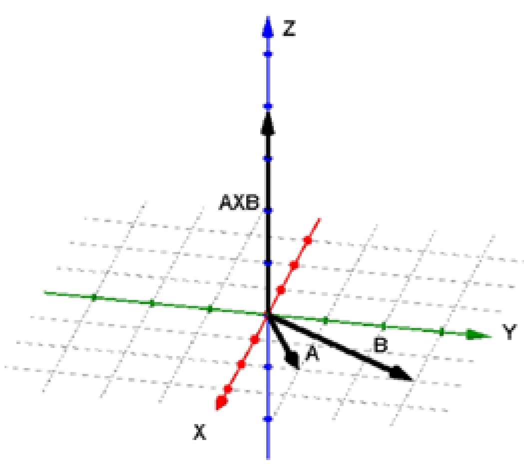


Figura 1: Producto vectorial como el vector normal a los otros dos.

Modo Analítico-Aritmético del producto vectorial: Se describe a partir de una fórmula que permite calcularlo.

Sean $P = (a_1 , a_2 , a_3)$ y $Q = (b_1 , b_2 , b_3)$ dos vectores en $\mathbf{R}^3$.

$$P \times Q = (a_2 b_3 - a_3 b_2 , a_3 b_1 - a_1 b_3 , a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Modo Analítico-Estructural del producto vectorial: Se describe a partir de dos propiedades que lo caracterizan.

Sean P, Q y R en $\mathbf{R}^3$:

Propiedad 1: $P \times Q = -(Q \times P)$
Propiedad 2: $P \times Q = 0$, si y solo si, P Y Q son linealmente dependientes.

Problemática y Metodología de investigación

Frente al objeto matemático de producto vectorial, su enseñanza está centrada en su forma analítico-aritmético, lo que conduce que el estudiante lo aplique en diversos problemas sólo como un algoritmo que permite calcular el producto vectorial, para lo cual utiliza diversas nemotecnias, como la regla de la mano derecha, el seudo determinante, el diagrama cíclico, etc., lo que no le permite acceder a una abstracción mayor del objeto, y va en contraposición con "El aprendizaje del álgebra lineal no puede reducirse a la práctica y al dominio de un conjunto de procedimientos de cálculo." (Parraguez, 2012, p. 14).

Además los alumnos (de cuarto año medio según el programa de estudio del MINEDUC, y alumnos de pregrado según los planes de estudio de carreras de pregrado como Ingeniería y Pedagogía en Matemáticas) que se ven enfrentados a utilizar este objeto matemático en diversas aplicaciones, ya sea en la Matemática o en la Física, se encuentran con un objeto que no cumple las mismas propiedades que la multiplicación estudiada desde la educación básica a la media.

En este sentido el aprendiz debe tener en cuenta en primer lugar que en el producto vectorial (cruz), se están multiplicando dos vectores, cada uno, con una magnitud, dirección y sentido en el espacio tridimensional. Además si bien es aceptado por todos que $6 \times 5 = 5 \times 6$, lo que es algo tan obvio, que no merece comentario alguno, ya que consideramos que la ley conmutativa le es intrínseca a la multiplicación. Pero ante el producto vectorial el aprendiz debe cambiar su concepción, y aceptar que $P \times Q$ no es igual $Q \quad P$, sino que $P \times Q = -Q \times P$, siendo la propiedad de no-conmutatividad la que rige este producto cruz. Pero no sólo esta propiedad causa controversias en el alumno, sino también la que afirma que si el producto cruz de dos vectores es igual a cero, no siendo necesariamente uno de ellos un vector nulo.

A partir de la problemática de estudio planteada surge entonces un supuesto de investigación, que afirma que los estudiantes logran una comprensión profunda del concepto producto vectorial cuando logran articular las distintas formas de entenderlo. De este supuesto se elabora el **objetivo de investigación**, referido a la búsqueda de una comprensión profunda del objeto matemático "Producto vectorial", utilizando los tres modos de pensar que se han sustentado para éste, con base en un análisis histórico epistemológico, y una metodología de estudio de casos.

El diseño metodológico que se utilizará para alcanzar el objetivo mencionado consta de tres fases:

La primera fase de investigación, se corresponde con el levantamiento de los tres modos de pensar el producto vectorial, con base en un análisis histórico-epistemológico. Así también en esta misma etapa, para constatar el modo de pensar que privilegian los aprendices de este tópico, se diseña y aplica una medición inicial a través de un cuestionario que tuvo por objetivo documentar la problemática planteada. Esta fue aplicada a un curso de 22 alumnos de la Carrera de Pedagogía en Matemáticas, que cursan su tercer semestre, y que han aprobado el curso de Álgebra Lineal, en la cual se constató de que en su resolución la mayoría de los estudiantes utilizaban principalmente las nemotecnias del diagrama cíclico y el seudo determinante, y no lograban transitar desde **AA** hacia los modos **SG** y **AE.**

En **la segunda fase de investigación,** (que actualmente está en proceso de construcción) se diseñan cuestionarios y entrevistas que se aplicarán a 3 casos de estudio (Arnal, Del Rincón y Latorre, 1992), para levantar y sustentar los elementos articuladores entre los distintos modos de pensar el producto vectorial.

Y la tercera fase de la investigación, consiste en diseñar con base en los resultados de las dos etapas anteriores, actividades para una propuesta didáctica que promueva la comprensión profunda del producto vectorial, en aprendices del concepto.

A modo de conclusión

A partir de la problemática de investigación que señala que la enseñanza del producto vectorial se centra en su modo analítico- aritmético, dando paso a la utilización de diversas nemotecnias por parte de los estudiantes. Se hace necesario por tanto definir, con un sustento epistemológico, distintos modos de pensar el objeto matemático, con la intensión de diseñar actividades de aprendizaje que permitan generar el tránsito entre ellos, para que los aprendices logren tener acceso a las distintas interpretaciones articuladas del objeto, logrando tener una comprensión profunda de este. Para lo cual el análisis histórico-epistemológico adquiere gran importancia, ya que permite sustentar los distintos modos de pensar el objeto producto vectorial.

Finalmente se quiere señalar que dadas las diversas aplicaciones del producto vectorial tanto en la parte matemática: cálculo de áreas y volúmenes, el teorema Stokes, Algebra de Lie; como en la Física: momento angular y torque, ecuaciones de Maxwell, Rotacional y Vorticidad, etc. Y la falta de investigación en matemática educativa, le da una mayor relevancia a seguir desarrollando las etapas propuestas para esta investigación.

Referencias

Arnal, J., Del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). Investigación educativa: fundamentos y metodología. Barcelona: Labor.

Ashurst, G. (1982). Fundamentos de las matemáticas modernas. Madrid: Alianza editorial, S.A.

Babini, J. (1967). Historia de las ideas modernas en matemática. Buenos Aires, Argentina: Eva V. Chesneau.

Figueroa Rebolledo, G., & Fierro Pradenas, R. (2002). Álgebra. Valparaíso: Instituto de Matemáticas Universidad Católica de Valparaíso.

Martínez Sierra, G., & Benoit Poirier, P. F. (2008). Una epistemología histórica del producto vectorial: del cuaternión al análisis vectorial. Latin-American Journal of Physics Education, 201-208.

Mena, A. (2001). Elementos de Matemáticas, 2. Valparaíso: Instituto de Matemáticas Universidad Católica de Valparaíso.

Parraguez, M. (2012). Teoría los Modos de Pensamiento. Valparaíso: Instituto de Matemáticas Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students'thinking in Linear Algebra En J. L. Dorier, (Eds.), The Teaching of Linear Algebra in Question (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Estilos de pensamiento como herramienta para la enseñanza de la matemática en estudiantes de ingeniería

Jaime Huincahue Arcos[a] y Claudio Gaete Peralta[b]
[a]Universidad de Playa Ancha - Campus San Felipe. Chile
[b]Universidad Bernardo O'Higgins. Chile
jaime.huincahue@upla.cl, claudio.gaete@ubo.cl

Resumen

Este trabajo estudia el perfil cognitivo de la carrera de Ingeniería Civil Industrial de la Universidad Bernardo O'Higgins, para indagar cómo este puede ser considerado dentro de las asignaturas de Matemática que forman parte de su estructura curricular. Este estudio se analiza desde la Teoría del Autogobierno Mental de Sternberg (1997), en donde se realiza una comparación de la evolución de los estilos de pensamiento durante el tránsito de los estudiantes en esta carrera. Se concluye que las asignaturas de Matemática tienen las herramientas para poder guiar un estilo de pensamiento idóneo según el perfil de egreso y el proyecto educativo institucional.

Introducción

El estudio del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática ha sido motivo de especial preocupación para educadores, profesores, administradores, directivos, familia y especialmente, para los propios estudiantes. Doerr y Lesh (2011) evidencian los obstáculos que han acompañado durante largo tiempo a este proceso en los diversos niveles y sistemas educativos, hasta el punto de considerarla uno de los ámbitos de mayor complejidad en la educación, explicando el reducido número de alumnos que logran adecuados grados de competencia y satisfacción por su desempeño (Burgos, 1992). Davis & Hersh (1998) reportan que la Matemática tiende a constituirse en un filtro selectivo en los distintos niveles educativos a escala mundial, evidenciado en las múltiples pruebas nacionales e internacionales.

En carreras como Ingeniería Civil Industrial (ICI), las matemáticas son insustituibles y vitales para la formación académica de sus estudiantes, independiente de la institución universitaria en donde estén insertas. En el diseño de su estructura curricular, la Matemática está agrupada en diferentes cursos y representa la base de múltiples contenidos que trascienden a la disciplina, cursando asignaturas relativas a esta ciencia durante varios semestres consecutivos, incluso estudiando simultáneamente varias asignaturas que no son parte de la Matemática, pero ven a ésta como una herramienta para fines relacionados con la formación.

En la Universidad Bernardo O´Higgins (UBO), el desarrollo de esta ciencia no es la excepción, declarando que "El Ingeniero Civil Industrial de la Universidad Bernardo O'Higgins es un profesional que maneja conocimientos tanto en las ciencias básicas, ciencias de la ingeniería y de su especialidad" (Ingeniería Civil Industrial, 2014), lo que realza la importancia del desarrollo de esta disciplina en sus estudiantes. Hoy, la Facultad de Ingeniería y Administración de esta casa de estudios, tiene la necesidad de que sus estudiantes sepan modelar fenómenos con Matemática y su aplicación a futuros problemas de su trabajo.

El perfil de ingreso de la carrera de ICI de la UBO presenta ciertas características que la diferencian de otras instituciones chilenas:

- En esta carrera, la casa de estudios no propone criterios de selección, lo que tiene como consecuencia grados de conocimiento que generalmente resultan ser inferiores a otras universidades que sí presentan dichos criterios. Como consecuencia de esto, los conocimientos previos que poseen los estudiantes, resultan ser desconocidos por el docente universitario.
- Los programas de estudios de esta carrera están fuertemente correlacionados al Discurso Matemático Escolar (DME) (Morales, Mena, Vera y Rivera; 2012), dejando de lado, entre otras cosas, las habilidades que se pretenden desarrollar con respecto a su perfil de egreso, no existiendo una integración entre la matemática estudiada y dicho perfil de egreso que posee esta carrera.
- Las clases de Matemática son, en general, uniformes para todos los estudiantes y no se encargan de diferenciar la variedad de conocimientos, aptitudes y actitudes presentes en una sala de clases, factores importantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Los estudiantes de ICI, en general, pertenecen a estratos socioeconómicos de nivel medio-bajo, siendo éste un factor en la obtención de bajos puntajes en la Prueba de Selección Universitaria (PSU). Por otro lado, la Matemática enseñada muchas veces obvia las diversidades antes mencionadas, generando un obstáculo para el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Los estilos de pensamiento

El contexto establecido anteriormente formula la pregunta sobre cómo poder generar la dirección formativa idónea en los estudiantes en el aula. Para ello, la psicología educacional tiene a referentes que hasta el presente han sido capaces de generar propuestas. Howard Gardner (1998) es un referente con la "Teoría de las Inteligencias Múltiples", aunque con dificultades no menores cuando el ámbito educacional es el nivel superior. Además, un estudio desde la inteligencia acota en demasía la problemática de la educación por -al menos- un motivo: la influencia cultural es significativamente potente en la enseñanza de la ciencias cuando las exigencias mínimas consideran la habilidad de modelar, siendo necesario complementar el estudio de la inteligencia con características socioculturales, que sean dinámicas y que ofrezcan un mapeo del ser humano como un agente social, en lo posible, alejándose de la individualidad, sino más bien dirigida hacia las comunidades sociales existentes. En este caso, los estudiantes de ICI de la UBO.

En 1997, Robert Sternberg crea la Teoría del Autogobierno Mental (TAM), y define los estilos como "…"una ruta del pensamiento". No es una habilidad, más bien, es una ruta preferida para usar las habilidades que uno tiene. Un estilo se refiere a cómo a alguien le gusta hacer algo" (Sternberg, 1997, p. 8). Estos estilos de pensamiento incluyen variables como el entorno, la cultura, la escolaridad, la crianza y el género, en donde todas ellas podrán definir un lineamiento en las rutas del pensamiento de un estudiante. Existen ejemplos en la Matemática Educativa que han utilizado esta teoría, como son los trabajos de Borromeo-Ferri (2006) con los Estilos de Pensamiento Matemático relacionado a la Modelación Matemática.

La TAM asume como hipótesis que:

> "la forma de gobernar que tenemos en el mundo no es coincidencia. Más aún, ellas son reflexiones externas de lo que ocurre en la mente de las personas. Así, las formas de gobernar que vemos son espejos de nuestras mentes" (Sternberg, 1997, p. 19).

Esto podría indicar por qué un estudiante hace o no hace alguna actividad a partir de sólo una forma de enseñanza mostrada en clases, pero por otro lado, también deja ver que se puede formar un gusto con procesos sociales, es decir, los estilos de pensamientos son dinámicos a través del tiempo, tienen múltiples variables que producen el desarrollo y evolución de éstos, que pueden inferir en las actividades internas y externas de la academia.

Los estilos de pensamiento permiten la caracterización de funciones y formas de pensamiento y niveles, alcances e inclinaciones del autogobierno mental. Según Sternberg (1997), las funciones son legislativas, ejecutivas y judiciales; las formas son monárquicas, jerárquicas, oligárquicas y anárquicas; los niveles son globales y locales; los alcances son internos y externos, y las inclinaciones son liberales y conservadoras. Sternberg genera el instrumento MSG Sternberg-Wagner Thinking Style Inventory (1997) para medir psicométricamente cada función y forma de pensamiento y niveles, alcances e inclinaciones de su teoría.

La Matemática tiene características capaces de incidir en los estilos de pensamiento de los estudiantes, mediante la forma de enseñanza que utiliza en docente. Consideramos que la Modelación Matemática es una de las habilidades integradoras entre la Matemática y los requerimientos de la carrera de turno, por lo que su tratamiento en todos los cursos no debe ser sobre la base del DME que ya conocen los estudiantes, sino que a las necesidades de la carrera, las que deben trascender de los contenidos disciplinares mismos.

Si observamos los instrumentos evaluativos que son aplicados a estudiantes de secundaria, generalmente son dirigidos hacia un pensamiento convergente por sobre el divergente, ya que los incentivos institucionales son consecuencia de buenos resultados en las pruebas nacionales, como lo son el Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE) o la Prueba de Selección Universitaria (PSU). El pensamiento convergente tiene la característica de realizar preguntas de selección múltiple, siendo éstas las únicas consideradas en la construcción de las pruebas anteriormente mencionadas. En síntesis, los estudiantes que salen del sistema secundario generalmente reciben su enseñanza a través de un pensamiento convergente, y según las características demandadas por un perfil de egreso. Es necesaria, entonces, la promoción de un pensamiento divergente en correspondencia con la idoneidad requerida para llegar a ser un Ingeniero Civil Industrial en esta casa de estudios.

Resultados y discusión

Para conocer el perfil cognitivo del egresado de ICI de la UBO se ha considerado el perfil de egreso, documentos del Departamento de Formación Integral de la UBO y una entrevista al director de la carrera. En el estudio de los datos se establecen las siguientes características esperadas del profesional:

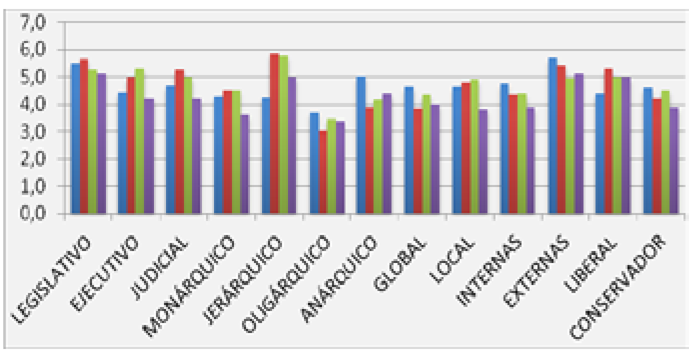
- La ética es un sello de la carrera.
- La creatividad es una característica que se pretende desarrollar en los estudiantes.
- Son líderes en su ocupación.
- Hoy los egresados poseen un enfoque operacional, pero el horizonte es la creación.
- El egresado debe evaluar reglas y procedimientos y juzgar tareas.
- Debe tener cierto dominio en áreas multidisciplinares. Debe saber gestión en distintas áreas de la industria, habilidades de liderazgo y emprendimiento.
- Debe tener desplante y seguridad.
- En la carrera se requiere que se observen problemas a nivel macro y micro.

Se ha realizado una experimentación utilizando como instrumento MSG Sternberg-Wagner Thinking Style Inventory (1997), aplicado aproximadamente al 43%, 44% y 33% de los estudiantes hombres en primer, tercer y último año respectivamente. Para una mejor correlación de datos se han considerado sólo hombres, ya que ellos representan el 68% del total de estudiantes de esta carrera.

Los resultados entregan el desarrollo de las funciones, formas, niveles, alcances e inclinaciones de los estilos de pensamiento, en donde las interpretaciones son realizadas a través de Sternberg (1997) y Escurra, Delgado y Quezada (2001). Se observa (Ver gráfica 1), que en la función legislativa no existe una variación significativa, no así en las función ejecutiva y judicial, ya que aumentan progresivamente a través de la carrera, concluyendo que prefieren seguir reglas, aceptando generalmente las actividades que propone una función legislativa (Sternberg, 1997). Además, que sea judicial significa que en una situación problema, prefieren juzgar ideas y realizar críticas en las formas de hacer las cosas de otras personas. Las formas del pensamiento aluden a que la formación promueve una forma jerárquica, significando que los estudiantes dan diferentes valoraciones a múltiples tareas dentro de su futuro quehacer profesional, aunque muestran indicadores altamente monárquicos, es decir, personas que abordan problemas desde un sólo punto de vista, fijando sus metas solamente sobre la base de sus preferencias, considerando el resto sin mayor importancia. Los bajos indicadores del pensamiento oligárquico y anárquico son correspondidos con las altas puntuaciones de la forma del pensamiento jerárquico y la baja puntuación de la función del pensamiento legislativo, respectivamente, este último es también correlacionado por los niveles de la función ejecutiva. Con respecto a los niveles del pensamiento, se evidencia que los estudiantes prefieren ser más locales que globales, dando evidencia de que la formación aumenta el nivel local, no así el nivel global; esto significa que los estudiantes prefieren mantener el pensamiento en un micronivel más que en un macronivel en cuanto a las tareas de su profesión. No existen diferencias significativas en cuanto al alcance interno del pensamiento, aunque existe una promoción del pensamiento interno, significando que prefieren ser personas más introvertidas que extrovertidas. Finalmente, las inclinaciones del pensamiento son promovidas en una dirección conservadora por sobre la liberal, es decir, evitan el cambio y prefieren seguir una rutina, en vez de ir más allá de los procedimientos y reglas existentes.

A partir de los resultados, notamos que los estudiantes de ICI adquieren el estilo Ejecutivo, en concordancia con el enfoque operacional que los estudiantes poseen actualmente, según lo declarado de forma explícita por su director de carrera.

El estilo liberal puede ser ligado a la innovación y al emprendimiento, deseables en el desarrollo de un ingeniero idóneo. Los estudiantes de ICI ingresan a la UBO no prefiriendo ser liberales, pero al finalizar sus estudios, evidencian ligeras preferencias de este estilo. A partir de esto, interpretamos que la carrera influye en el aprendizaje de este estilo, conforme a los objetivos trazados en su perfil de egreso. Además, se evidencian indicios de que el horizonte de esta carrera apunta hacia constructos creacionales.



Gráfica 1. Resultados de la aplicación del instrumento MSG Sternberg-Wagner Thinking Style Inventory (1997). El color azul, rojo y verde corresponden a los resultados de primer, tercer y último año, respectivamente. El puntaje bajo el nivel de la barra morada significa que no se prefiere el estilo, mientras que sobre el rango morado, existirán preferencias por ese estilo tiene la persona/comunidad.

Existe mayor variación en el estilo conservador, puesto que los estudiantes al momento de ingresar y egresar de esta institución poseen dicha preferencia; lo que podría interpretarse como una actitud neutral en el desarrollo de este estilo por parte de la UBO. En relación a esto y al realizar un contraste entre los estilos liberal y conservador, interpretamos que la UBO está apuntando a formar ingenieros que buscan innovar, pero que a la vez son conscientes de que están insertos dentro de una estructura de trabajo tradicional. Además, la Matemática es una empresa rígida en su manipulación formal, a partir de una axiomática se levantan resultados con una lógica generalmente aristotélica asociado al tradicional DME, lo que hace resaltar índices conservadores en el uso de la disciplina, esencialmente para respetar los constructos con los que se ha presentado la Matemática.

En cuanto al desplante y seguridad (ligados al alcance Externo), características que deben estar presentes en este tipo de profesionales, dicha casa de estudios tiene claridad que en el perfil de ingreso tales habilidades reflejan lo contrario, por lo que la UBO busca potenciar su desarrollo para cumplir con lo estipulado en su perfil de egreso. Sin embargo, notamos un proceso "inverso" en esta búsqueda: en vez de potenciar esta característica, se debilita.

Durante el presente año, la UBO aplicó el llamado test de Estilos de Aprendizaje de Kolb a 973 estudiantes que cursan primer año. Esto permitió identificar características personales sobre la forma en cómo es procesada la información. Dentro de la carrera de ICI, los resultados de este test arrojaron una identificación con el Estilo de Aprendizaje Divergente: personas que funcionan bien en situaciones que exigen producción de ideas y cuya fortaleza resulta ser la capacidad imaginativa, que tienden a considerar situaciones concretas desde muchas perspectivas. Esto significa que los estudiantes tienen características divergentes del aprendizaje.

La multidisciplinaridad que necesita el profesional requiere en la forma del pensamiento una jerarquización de tareas y un bajo nivel de oligarquía, lo cual inculcado por la institución. Sin embargo, se muestran nuevamente evidencias de bajos índices del pensamiento anárquico, lo que es correlacionado con bajos rasgos de creatividad en su futura práctica (Sternberg, 1997).

Las prácticas del docente requieren cambios de enfoque entre un nivel micro y macro del pensamiento, lo que no se refleja con los resultados obtenidos de los estudiantes.

El estilo local muestra mayor preferencia tanto al momento de ingresar como de egresar, reflejando una tendencia en el transcurso de la carrera. Es decir, la institución mantiene una focalización en cuestiones específicas por sobre las generales. Se concluye que las habilidades que fomenta la Matemática pueden ser tratadas para fortalecer habilidades necesarias del pensamiento en su práctica profesional, desde actividades que robustezcan la creatividad, variaciones en un micro y un macro nivel de las tareas y seguridad y confianza asociados tanto a la creencia de sus resultados como a las rutas elegidas para la resolución de las tareas matemáticas.

Referencias

Borromeo-Ferri R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(2), 86–95.

Burgos, M. (1992). Análisis del Rendimiento Académico en Matemáticas. Trabajo de grado. Facultad de Ingeniería. Universidad de Carabobo. Valencia.

Davis, P., & Hersh, R. (1988). Experiencias matemáticas. Barcelona: Labor-MEC.

Doerr, H. M., & Lesh, R. A. (2011). Models and modelling perspectives on teaching and learning mathematics in the twenty-first century. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), Trends in teaching and learning of mathematical modelling, (pp. 247-268). New York: Springer.

Escurra L., Delgado A. y Quezada R. (2001). Estilos de pensamiento en estudiantes de la U.N.M.S.M. Revista de Investigación en Psicología, 4(1), p. 9-34.

Gardner H. (1998). Inteligencias múltiples. La teoría en la práctica, Paidós: Barcelona.

Ingeniería Civil Industrial (2014). Perfil de Egreso. Recuperado el 1 de octubre de 2014 de http://www.ubo.cl/facultad_ingenieria/ingeneria_civil_industrial_ubo.php

Morales A, Mena J., Vera F. y Rivera R. El rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos físicos. Enseñanza de las Ciencias, 30(3), 237-256.

Sternberg, R. (1997). Thinking Styles. New York: Cambridge University Press.

APOE y el esquema del concepto transformación lineal

Isabel Maturana Peña, Marcela Parraguez González, María Trigueros Gaisman
PUCV, Chile. ITAM, México.
isamatup@hotmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl, trigue@itam.mx

Resumen

Basándonos en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objeto y Esquemas) (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014) investigamos el esquema del concepto Transformación Lineal, entendiendo éste como una articulación entre diferentes interpretaciones, las que hemos denominado interpretación funcional, matricial y geométrica. Fundamentamos un modelo multinterpretativo para el análisis del esquema del concepto transformación lineal, a partir de entrevistas semiestructuradas, desde donde se concluye, por ejemplo, que el concepto de kernel es determinante en la evolución del esquema del concepto transformación lineal.

Introducción

Analizamos el concepto transformación lineal considerando tres formas en que éste se presenta, y cada una de ellas fue descompuesta en sus elementos fundamentales y articulados básicamente por el concepto combinación lineal; es así que nuestro estudio propuso, y basándose en la metodología propia de la teoría APOE, una descomposición genética, por cada interpretación del concepto transformación lineal que permitió una descripción detallada del esquema para el concepto. Estas descomposiciones genéticas aparecen en forma detallada en Alme 27, bajo el título "Construcciones y Mecanismos Mentales para el Aprendizaje de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal" (Maturana, Parraguez , 2014) y en acta CIBEM VII, bajo el título "Una Mirada Cognitiva a las Transformaciones Lineales. Articulación entre sus Tres Interpretaciones: Funcional-Matricial-Geométrica" (Maturana, Parraguez, 2013). En esta última se muestran las primeras evidencias obtenidas en que se incorporan las tres interpretaciones, desde donde emerge un modelo multinterpretativo para el estudio del concepto transformación lineal.

Sobre el concepto de transformación lineal, la documentación hasta ahora obtenida da cuenta que su aprendizaje presenta una dificultad mayor, y son diversas las investigaciones en didáctica de la matemática que han abordado su problemática. Algunas de ellas, en la última década, corresponden a los aportes de Uicab y Oktaç (2006), Molina y Oktaç (2007); ambas investigaciones abordan la problemática de aprendizaje en un contexto geométrico de esa noción identificando aquellos modelos que pueden tener los estudiantes en relación al concepto transformación lineal y el grado de interferencia de éstos. Por otra parte, Roa y Oktaç (2010) dan cuenta de su investigación sobre la construcción de una Descomposición Genética del concepto transformación lineal, la cual se sustenta en la teoría APOE, proporcionando como resultado de investigación dos formas de construcción para ese concepto, ambas basadas en lo que llamamos interpretación funcional del concepto. Por su parte, Bagley, Rasmussen y Zandieh (2012) centran su investigación en la relación conceptual que los estudiantes establecen entre las matrices y las funciones lineales. Son algunos de los antecedentes que constituyeron la base para el diseño del modelo de investigación, entendido éste como una propuesta desde APOE, que describe en detalle las construcciones y mecanismos mentales necesarios para la construcción y evolución del esquema concepto transformación lineal. Es así que nuestros hallazgos dan cuenta de los niveles de coherencia en el esquema del concepto transformación lineal.

La Teoría APOE

Dubinsky (Arnon et al., 2014), basado en el concepto de abstracción reflexiva de Piaget, para describir la construcción de objetos mentales, distingue los siguientes mecanismos: interiorización, coordinación, encapsulación y reversión. Éstos, a su vez, originan diferentes construcciones mentales: acciones, procesos, objetos, esquemas (APOE).

Consideremos F un concepto matemático. Un individuo posee una concepción acción de F si las transformaciones que hace sobre él se realizan paso a paso, obedeciendo a estímulos que son y percibe como externos. Él interioriza la acción en una concepción proceso de F si puede realizar una operación interna que hace esencialmente la misma transformación por entero en su mente, sin necesariamente recorrer todos los pasos específicos. Si piensa en un proceso como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre su totalidad, ha encapsulado el proceso en una concepción objeto de F. Un esquema de aquel trozo es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente del individuo en una estructura cognitiva coherente. Una descomposición genética describe en detalle los aspectos constructivos de F para explicitar un camino factible de su aprendizaje en términos de construcciones y mecanismos mentales.

Diseño Metodológico de la Investigación

Incorporamos a la metodología propia de la teoría APOE el estudio de caso (Stake, 2010). La unidad de estudio que constituyó el "caso", son 20 alumnos chilenos de una universidad del país, estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemática. La selección de dichos estudiantes se vinculó con las siguientes categorías: estudiantes exitosos académicamente, avance curricular, ejercitan ampliamente en matemática, voluntarios, heterogeneidad en los procesos de formación de los estudiantes, accesibilidad de los investigadores. Es preciso dejar en claro que al caso de estudio se aplicó el ciclo de investigación previsto en la teoría APOE, el cual establece: un análisis teórico, conocido como descomposición genética; un diseño, basado en la descomposición genética teórica, y aplicación de instrumentos; seguido de un análisis y verificación de datos (Arnon et al., 2014). En este reporte damos cuenta de la etapa final en la investigación relacionada con la búsqueda de los indicadores para la construcción del esquema para el concepto transformación lineal, y establecemos la articulación entre las interpretaciones del concepto como criterio de selección para instaurar el nivel de la coherencia en el esquema para el concepto de transformación lineal. Trabajamos en un resumen tabular de la información sobre las construcciones mentales mostradas en un cuestionario previo, para algunos tramos de las descomposiciones genéticas propuestas. Denominaremos por las siglas F, M, y G a las interpretaciones Matricial, Funcional y Geométrica del concepto transformación lineal.

Tabla 1. Estudiantes que mostraron construcciones mentales próximas a la de objeto en la interpretación funcional.

ESTUDIANTE	ORDEN ELEGIDO RESPONDER AL CUESTIONARIO	CONSTRUCCIÓN MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACIÓN FUNCIONAL
E3	MFG	PROCESO
E6	FMG	PROCESO
E9	GMF	OBJETO
E15	FMG	PROCESO
E16	FMG	PROCESO
E17	FGM	PROCESO
E18	MFG	PROCESO

Tabla 2. Estudiantes que mostraron construcciones mentales próximas a la de objeto en la interpretación matricial.

ESTUDIANTE	ORDEN ELEGIDO RESPONDER AL CUESTIONARIO	CONSTRUCCIÓN MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACIÓN MATRICIAL
E3	MFG	PROCESO
E9	GMF	PROCESO
E13	MFG	PROCESO
E18	MFG	PROCESO

Tabla 3. Estudiantes que mostraron construcciones mentales próximas a la de objeto en la interpretación geométrica.

ESTUDIANTE	ORDEN ELEGIDO RESPONDER AL CUESTIONARIO	CONSTRUCCIÓN MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACIÓN MATRICIAL
E3	MFG	PROCESO
E5	MGF	PROCESO
E7	GFM	PROCESO
E9	GMF	OBJETO
E18	MFG	PROCESO
E19	FGM	PROCESO

Se realizó un proceso de triangulación de los datos y la información de las tablas anteriores (tablas 1, 2 y 3). El propósito es encontrar quiénes son los estudiantes del caso que mostraron construcciones mentales próximas a la de objeto para el concepto; es así que E3, E9 y E18 fueron los candidatos para ser entrevistados. En tabla 4 se muestra el resumen de este procedimiento.

Tabla 4. Triangulación de los datos de la investigación. Fuente propia, año 2013.

ESTUDIANTE	ORDEN ELEGIDO PARA DAR RESPUESTA AL CUESTIONARIO	CONSTRUCCIÓN MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACIÓN FUNCIONAL	CONSTRUCCIÓN MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACIÓN MATRICIAL	CONSTRUCCIÓN MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA
E3	MFG	PROCESO	PROCESO	PROCESO
E9	GMF	OBJETO	PROCESO	OBJETO
E18	MFG	PROCESO	OBJETO	PROCESO

La información mostrada por los estudiantes seleccionados, E3, E9 y E18, sobre la articulación de las interpretaciones, permitió planificar el guion de sus entrevistas.

El esquema y el modelo multinterpretativo

Nuestra propuesta para analizar los esquemas de los estudiantes seleccionados del caso, se basa en el modelo multinterpretativo para el concepto de transformación lineal. Éste es un concepto unificador para el álgebra lineal; por esta razón para la caracterización de su esquema como construcción mental, proponemos considerar las interpretaciones como esquemas mentales que nos permitirán determinar los niveles de coherencia en el esquema global del concepto.

Para obtener evidencias sobre estos niveles de coherencia en el esquema del concepto, consideramos el "exterior" de nuestras interpretaciones, que forman parte del concepto, pero que no fueron consideradas como elementos fundamentales en la construcción del concepto transformación lineal; es decir, no aparecen como construcciones o mecanismos mentales en ninguna de las descomposiciones genéticas de cada interpretación. El propósito es poner a prueba cada descomposición genética como modelo descriptivo

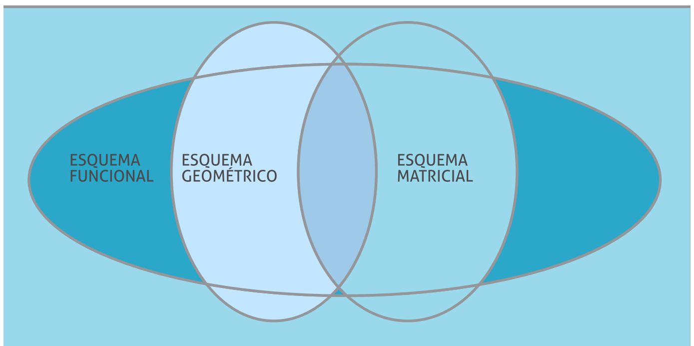


Figura 1. Las componentes propuestas para el estudio del esquema.

para el aprendizaje, y al mismo tiempo obtener evidencia de los elementos emergentes que construyen al concepto transformación lineal. En la figura1 damos cuenta de esta idea, sobre la estructura para el concepto transformación lineal, que posee componentes de origen funcional, matricial y geométrico, pero no desconocemos que es más que esto. Un ejemplo importante de un concepto en este "exterior", es el de isomorfismo de espacios vectoriales, el que puede servir para examinar los elementos emergentes, pues posee características transversales para el álgebra en general.

Para analizar la coherencia en el esquema del concepto transformación lineal y determinar sus componentes, proponemos que un estudiante muestra un nivel de esquema *Intra* para el concepto transformación lineal, si en alguna de sus interpretaciones da cuenta de poseer una construcción mental objeto, la que le permite realizar ciertas acciones sobre algunas estructuras fundamentales, pero no ha articulado las tres interpretaciones, por lo que responde a las preguntas que dan cuenta de la construcción del objeto del concepto transformación lineal en alguna de sus interpretaciones, sin establecer correspondencia con las otras del concepto. Es así que al enfrentarlo a situaciones referidas al concepto transformación lineal de un nivel superior, por ejemplo en relación al teorema del isomorfismo de espacios, no podría responder en forma adecuada.

Un estudiante que muestra un nivel de esquema *Inter* del concepto transformación lineal, es aquél que por lo menos ha articulado dos de las interpretaciones de este esquema; es de esta forma que responde a las preguntas que dan cuenta de la construcción del objeto del concepto transformación lineal, lo que le permite establecer las primeras correspondencias o concordancias con los teoremas propios de las transformaciones lineales.

Para finalizar, un estudiante muestra un nivel de esquema *Trans* del concepto transformación lineal, si responde a las preguntas que dan cuenta de la construcción del objeto del concepto transformación lineal, y es capaz de establecer correspondencia con todas las otras interpretaciones del concepto, por lo que establecería conexiones con los teoremas propios de las trasformaciones lineales, como por ejemplo el teorema del isomorfismo de espacios vectoriales. Es así que incorporamos en algunas de las preguntas seleccionadas para la entrevista la noción de isomorfismo de espacios vectoriales, a modo de poner a prueba todas las componentes del esquema del concepto transformación lineal. Pensamos que las nociones desde la perspectiva funcional, como las de inyectividad y epiyectividad, debieran emerger junto con la de linealidad. Éstas deben coordinarse con el concepto kernel y de dimensión, para en lo posible dar una respuesta que construya una función que respete la estructura de espacio vectorial. Los conceptos de grupo cociente y clase estarían en el límite del concepto transformación lineal, por lo que este tipo de construcción obedecería a un nivel Trans siempre que dé muestras de su coherencia.

Hemos dado cuenta de la forma en que fueron seleccionados los estudiantes del caso para las entrevistas, además de mostrar el criterio para analizar los esquemas, lo que constituye la directriz de análisis de nuestros datos.

Evidencias obtenidas en las entrevistas

A continuación, presentaremos un extracto de los relatos de los tres entrevistados, para dar respuesta a la siguiente pregunta, desde donde se pudo obtener algunas de las evidencias que sostenemos. Las entrevistas se realizaron por separado y se videograbaron.

Dada la transformación lineal $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, definida por $[F]_D^{D'}=\begin{pmatrix}-1/2 & 5/2 & 0\\ 1/2 & -1/2 & 1\end{pmatrix}$, donde $D=\langle(1,0,1),(1,1,0),(2,1,2)\rangle$ y $D'=\langle(1,1),(1,-1)\rangle$, determine si la transformación lineal F es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Extracto de la respuesta de E3 a la pregunta:

Realiza algunos cálculos, que aparecen en la **figura 2, los que corresponden a la búsqueda del kernel de la transformación lineal.**

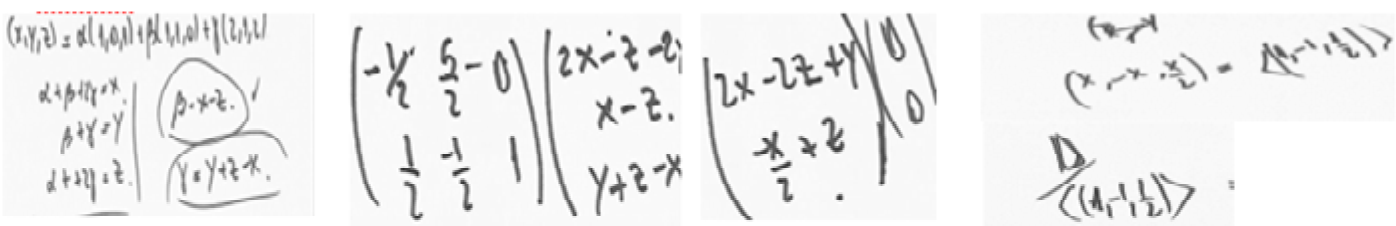


Figura 2. Los cálculos realizados por E3.

[Ent-267] ¿Es un isomorfismo de R^3 en R^2?

[E3--267] No. No, no, no. Porque quizás no es inyectivo. Hay que hacerlo.

E3 calcula el kernel, lo que le permite dar respuesta a la pregunta, y reconstruir la función preservando la estructura algebraica de espacio vectorial. Responde que no es un isomorfismo, pero frente a la situación de reformular la función para que sí lo sea, **E3** muestra que el esquema de la interpretación matricial le permite reconstruir la transformación en su interpretación funcional y responder a esta pregunta sobre el isomorfismo.

Extracto de la respuesta de E9 a la pregunta:

[E9--36] La dimensión de los espacios es distinta, así que no puede haber un isomorfismo.

[Ent-39] ¿Y no es posible redefinir nada...?

[E9--39] No, no es posible... Porque el espacio en el conjunto es de dimensión 3, aquí abajo no puede generar todo...Tenemos una base aquí de dimensión 2.

[E9--41] Y en la imagen. Y conjunto de dimensión 2 no puede generar...

E9, para dar respuesta a la pregunta, coordina las construcciones mentales proceso del concepto de dimensión con el concepto de función, mediante el teorema fundamental del álgebra lineal, lo que no alcanza para construir el teorema del isomorfismo de espacios vectoriales, pues falta coordinar con el concepto de núcleo de la transformación lineal que le permitiría construir el grupo cociente, lo que posibilitaría reconstruir un isomorfismo.

Extracto de la respuesta de E18 a la pregunta:

Comienza reflexionando sobre las dimensiones de los espacios de partida y de llegada:

[E18-126] Pero si vamos al teorema, este tiene tres, y si se confirma que tiene que ser cero, más dos... No nos daría la igualdad.

[Ent-127] A ver, cómo. Explícame.

[E18-127] Ya. Es que la dimensión de los espacios de partida... La dimensión... es 3. Si fuera un isomorfismo, el Kernel, o sea la dimensión del Kernel, tendría que ser cero. Sí, porque para que nos podamos devolver y ésa sea invertida. Y la dimensión del espacio de llegada tendría que llegar a todo el espacio, pero ése es dos. Entonces no nos va a dar dos.

El trabajo de **E18** muestra que coordina los conceptos de función, dimensión, Kernel e imagen, mediante el teorema de las dimensiones. Además establece que una transformación lineal entre espacios vectoriales finito dimensionales cumplen con la relación $dim(kerT)+dim(ImgT)=dim(V)$ donde V es el espacio vectorial de partida.

Algunas conclusiones

Desde el estudio de las entrevistas sobre el concepto de transformación lineal, nos fue posible establecer que al analizar el proceso de articulación de las interpretaciones del concepto se pone a prueba su esquema. Es así que los tres entrevistados mostraron, en términos generales, las siguientes construcciones mentales: espacio vectorial, vector, base, conjuntos linealmente independientes y linealmente dependientes, combinación lineal, función lineal, inyectividad, matriz, coordenada, matriz asociada a una transformación lineal, dimensión, Kernel, isomorfismo, teorema fundamental del álgebra de espacios vectoriales. Cada una de ellas como construcciones mentales proceso u objeto sobre las cuales efectuaban acciones o coordinaciones, las que estuvieron dispuestas en nuestras descomposiciones genéticas. La diferencia en la coherencia de sus esquemas se pudo establecer mediante la introducción del concepto de isomorfismo de espacios vectoriales, donde dos de los tres estudiantes entrevistados mostraron que las construcciones mentales de los conceptos de dimensión y kernel eran fundamentales. Ambos los relacionaron a la interpretación funcional del concepto transformación lineal, donde la estructura algebraica de espacio vectorial era fundamental. Por otra parte, en ambos emerge el concepto de grupo cociente, vinculado a la estructura de espacio vectorial. Pensamos que estos estudiantes lograron relacionar el álgebra abstracta con el álgebra lineal; mostrando así. uno de ellos, un esquema para el concepto de transformación lineal de nivel *Trans,* logrando articular las tres interpretaciones y construir el isomorfismo entre espacios vectoriales. Las diferencias con los otros entrevistados radicaron, por una parte, en las interpretaciones no construidas como construcción mental objeto, lo que les impidió levantar respuestas claras, y por otra parte, en el uso mecanizado de algunos teoremas sobre la dimensión de espacios vectoriales y su relación con el isomorfismo de espacios vectoriales. La inyectividad resultó ser otro indicador, pues no siempre se coordina con la noción de Kernel, lo que limita la construcción del esquema para el concepto de transformación lineal.

Referencias

Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). APOS Theory. New York: Springer.

Bagley, S., Rasmussen, C., & Zandieh, M. (2012). Inverse, composition, and identity: The case of function and linear transformation. In (Eds.) S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, and M. Oehrtman, Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics.

Maturana, I., Parraguez, M. (2014). Construcciones y Mecanismos Mentales para el Aprendizaje de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal. En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27, 771-778. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Maturana, I., Parraguez, M. (2013). Una Mirada Cognitiva a las Transformaciones Lineales. Articulación entre sus Tres Interpretaciones: Funcional-Matricial-Geométrica. En SEMUR (Ed), Acta VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, 1993-2000. Uruguay.

Molina, G., y Oktaç, A. (2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. En Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10 (1), pp. 241-273.

Roa, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2010) 13 (1): 89-112.

Stake, R.E. (2010). Investigación con estudio de casos. Barcelona: Labor.

Ubicab, R., Oktaç, A. (2006). Transformaciones Lineales en un ambiente de geometría dinámica. Tesis de doctorado, CICATA-IPN, D.F., México.

Uso de la sumatoria para acercarse al concepto de Integral como Suma de Riemann

José Daniel Galaz Arraño
Universidad Central de Chile. (Chile)
jose.galaz@ucentral.cl

Resumen

Este trabajo presenta una propuesta didáctica basada en el análisis de los programas curriculares chilenos y españoles. La propuesta didáctica involucra temáticas propias de la educación superior, pero está orientada a estudiantes de secundaria, particularmente, la utilización de la sumatoria para acercarse al concepto de integral. Se diseña una serie de actividades donde el estudiante es partícipe de su propio aprendizaje, buscando diversas estrategias de resolución a las problemáticas planteadas. Se muestra el análisis de cada una de las sesiones de trabajo, donde se pueden observar las producciones estudiantiles luego de haberse aplicado la propuesta.

Introducción

La propuesta didáctica realizada, nace tras participar de una pasantía para profesores de matemática realizada en la Universidad de Salamanca – España, todo lo anterior enmarcado en el programa de BecasChile. Dicha pasantía contempló etapas de formación en la disciplina, en Didáctica, en Evaluación, etc.; observación directa del sistema escolar español y creación de tal propuesta didáctica para su aplicación en Chile.

Con el fin de contribuir al desarrollo matemático de nuestros estudiantes, nace la inquietud de diseñar una propuesta didáctica que relacione temáticas propias de la educación superior con las correspondientes a temáticas propias de la educación media.

Marco Teórico

Para diseñar esta propuesta didáctica, se toman en consideración tanto los aspectos curriculares como los aspectos didácticos.

De acuerdo al Plan de Estudios de Educación Media, los estudiantes de establecimientos de carácter científico-humanista, dentro de sus horas de clases semanales, tienen nueve horas dedicadas a formación diferenciada, en las cuales profundizan temáticas propias de cada asignatura. Para los estudiantes que eligen la opción científica, dentro de las asignaturas que involucran esta formación diferenciada, se encuentra Funciones y Procesos Infinitos, la cual se divide en tres unidades: procesos infinitos, funciones polinomiales y funciones trigonométricas.

Al realizar una revisión de distintas temáticas, principalmente tratadas en cursos de Cálculo, aparece el concepto de integral, el cual será relacionado con la sumatoria, tema que corresponde a la asignatura de Funciones y Procesos Infinitos, es decir, una temática propia de educación secundaria.

Se diseñan una serie de actividades que apuntan a los conceptos clave involucrados, teniendo como base la utilización de una ingeniería didáctica para la creación de estas actividades. En esta propuesta, se propone un trabajo participativo del estudiante, siendo creador de su propio aprendizaje, teniendo el profesor un rol mediador en el desarrollo de las actividades.

Metodología y Diseño de la Secuencia

De acuerdo al contexto de aplicación, cada una de las sesiones de trabajo está compuesta por tres horas pedagógicas (2 horas y 15 minutos). En estas sesiones, como principio fundamental, se plantea la idea de que el estudiante construya su propio aprendizaje, por lo cual se trabaja fundamentalmente en actividades donde el estudiante busca distintas estrategias para solucionar las problemáticas planteadas. Además, en cada una de las clases, se realiza una evaluación de lo aprendido sobre la base de una ficha de aprendizaje, la cual entrega información acerca del aprendizaje logrado durante el proceso de aplicación.

El diseño de la secuencia, plantea una primera etapa de exploración, una segunda etapa de trabajo de la técnica y una tercera etapa de búsqueda de estrategias de resolución a las problemáticas planteadas. Las primeras actividades realizadas apuntan al descubrimiento de los estudiantes de ciertos patrones numéricos y/o geométricos, los cuales tienen una regla de formación que se asemeja a algunas sumatorias clásicas, como lo son la suma de los "*n*" primeros naturales; las siguientes actividades realizan el trabajo de la técnica, propio de la matemática, donde se trabajan con las distintas propiedades, resolviendo distintas problemáticas que pueden modelarse por medio se sumatorias; las actividades finales de la propuesta apuntan al concepto intuitivo de integral, relacionándolo con la de sumatoria, en ellas los estudiantes intentan calcular un área desconocida. Se debe indicar que por las características propias del establecimiento, se trabajó solo con alumnas.

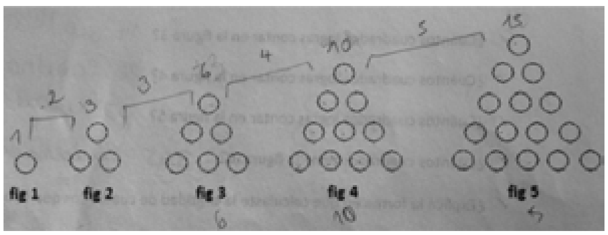
Resultados

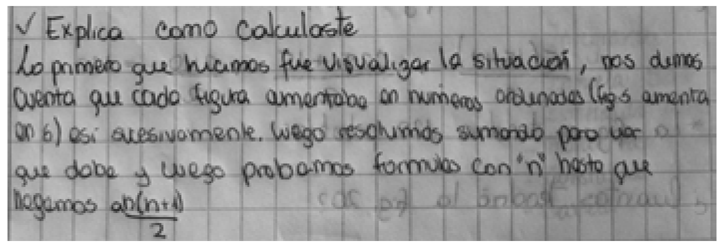
Clase 1: Actividad Exploratoria

La clase se centra en el descubrimiento de dos patrones de regularidades numéricas. La primera situación trata del descubrimiento de la "cantidad de pelotitas" que tendrá una secuencia de figuras, buscando las relaciones existentes entre la obtención de un término y otro; la segunda situación se trata del descubrimiento de la "cantidad de cuadrados" que se logran contar en un cuadrado de cierto lado, descubriendo también las relaciones existentes.

Se realizan preguntas que permiten gradualmente poner en una situación problemática a los estudiantes. En primer lugar, se preguntan los términos siguientes de la secuencia y luego términos más alejados; además, se pide establecer alguna fórmula que permita calcular la cantidad de "pelotitas" utilizadas para realizar cualquier figura. También se incluye un desafío y una nota histórica acerca de la suma de los cien primeros naturales.

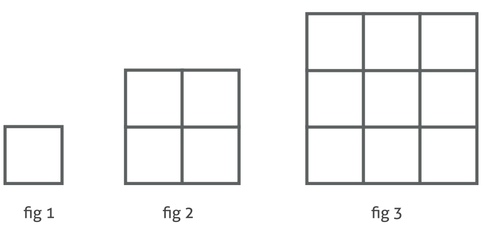
Al resolver la actividad los estudiantes logran establecer la cantidad de pelotitas que tienen las figuras, utilizando para ello diversas técnicas. En general, los estudiantes se dan cuenta que para pasar de una figura a otra, existe una relación, en este caso se puede visualizar lo realizado por el estudiante, el cual relaciona la cantidad de pelotitas que tiene una figura con respecto a la anterior, notando que en primer lugar la diferencia es "dos", luego "tres", "cuatro" y así sucesivamente. Al explicar esta situación con palabras, los estudiantes indican que las figuras aumentan "en números ordenados".





Producciones Estudiantiles Sesión 1

La segunda actividad propuesta para la clase trata de otra relación. Esta relación es acerca de la cantidad de cuadrados existentes en otro cuadrado, de esta forma se cuentan los cuadrados existentes en cuadrado de lado 1x1, 2x2, 3x3 y así sucesivamente.



Al igual que en la primera actividad, cada vez se va haciendo más complejo calcular el número de cuadrados existentes y las técnicas utilizadas por los estudiantes son similares a las anteriores. A diferencia de la primera situación, en esta actividad los estudiantes no logran establecer una fórmula, no obstante describen la relación existente por medio de un lenguaje natural, como se muestra en la figura anterior, donde se les pide explicar la forma de calcular la cantidad de cuadrados, ante lo cual el estudiante responde incluso dando un ejemplo: "sumar los cuadrados del uno hasta el número de la figura"

Clase 2. Aspectos Teóricos

La clase se centra en el desarrollo de aspectos teóricos tanto de la sumatoria como de las progresiones. En primer lugar se realiza un nexo entre lo visto en la clase anterior y lo que se tratará en clase. Se utilizan estos mismos ejemplos para explicar conceptos como sucesión, término enésimo o general, progresión aritmética, sumatoria. También, se trabaja el cómo reconocer progresiones aritméticas y establecer, a su vez, su término general. Esto último se realiza para poder escribir la suma de los términos de una progresión aritmética por medio de una sumatoria.

Se formaliza la idea de sumatoria y se indican las propiedades más importantes de ellas. De esta forma se plantean ejercicios en los cuales se realizan cálculos por medio de las propiedades de sumatoria. Adicional a este tipo de ejercicios, se plantea sumar cierta cantidad de elementos de una progresión aritmética donde se desconoce la posición del último término. Para ello, las alumnas logran determinar en qué posición se encuentra, luego escriben esto por medio de una sumatoria y, finalmente, lo suman utilizando las propiedades. A modo de ejemplo: 2 + 5 + 8 + ... + 59.

Las distintas tareas planteadas para la clase son realizadas satisfactoriamente por las alumnas

Clase 3.- Ejercicios y resolución de problemas

En esta clase se plantea una serie de ejercicios contextualizados donde la problemática puede ser resuelta por medio de la utilización del concepto de sumatoria.

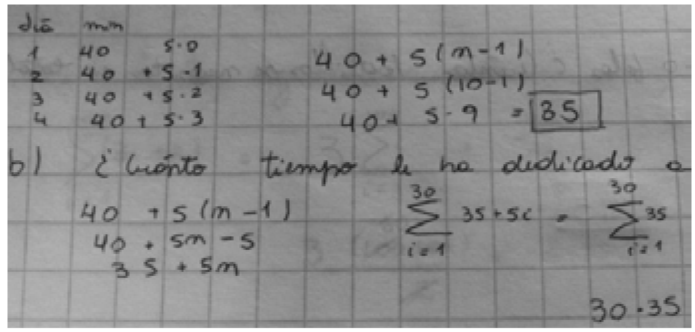
A modo de ejemplo, se plantea la siguiente situación:

Una joven, viendo que está próximo el verano, decide inscribirse en un gimnasio. El primer día de ejercicios realiza ejercicios durante 40 minutos y decide que añadirá 5 minutos cada día.

a)¿Cuánto tiempo se ejercita el décimo día?

b) ¿Cuánto tiempo ha dedicado a ejercitarse luego de un mes (30 días)

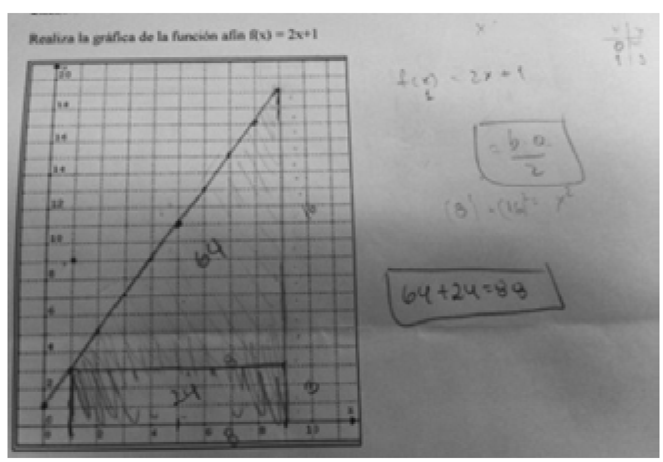
Para resolver este problema, las alumnas logran establecer las reglas de formación de las secuencias numéricas, compactan estas sumas por medio de una sumatoria y posteriormente utilizan las propiedades de sumatoria para realizar los cálculos, como se muestra en la siguiente figura.

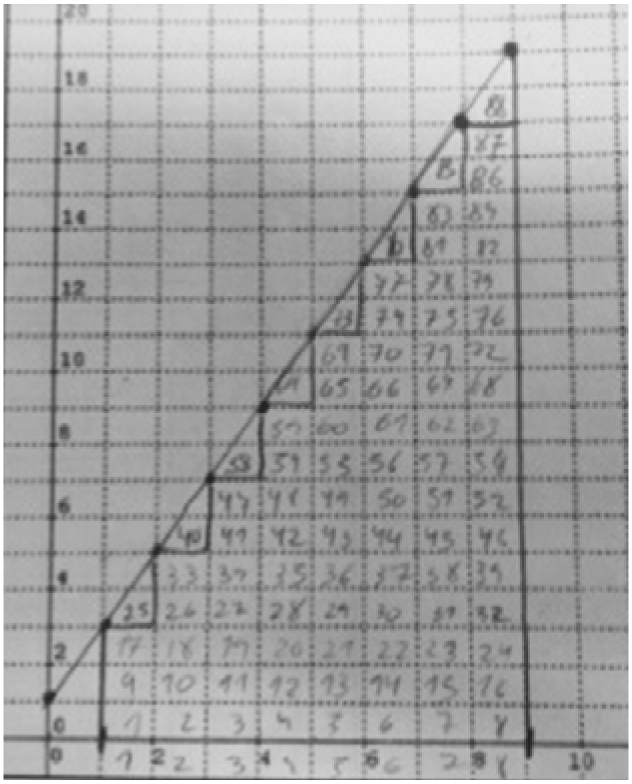


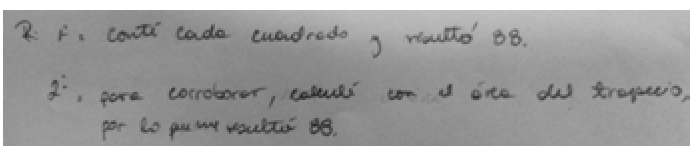
Producciones Estudiantiles Sesión 3

Clase 4.- La integral como suma de Riemann

La primera problemática planteada en esta clase es el cálculo del área determinada por una función y el eje x, en cierto intervalo, más precisamente, el cálculo del área de la función afín f(x) = 2x+5 en el intervalo [1,9]. Para ello se da la libertad de utilizar cualquier método que les resulte efectivo para realizar el cálculo del área solicitada.



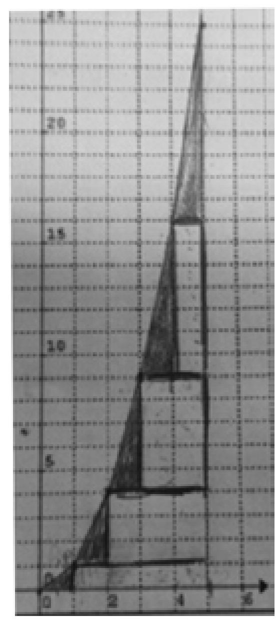


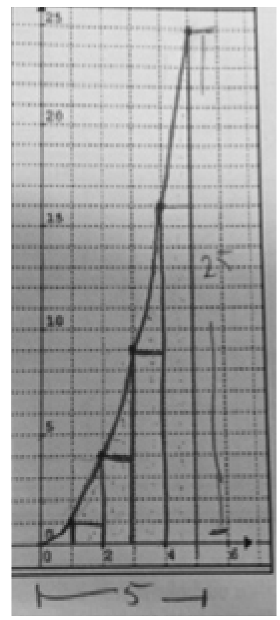


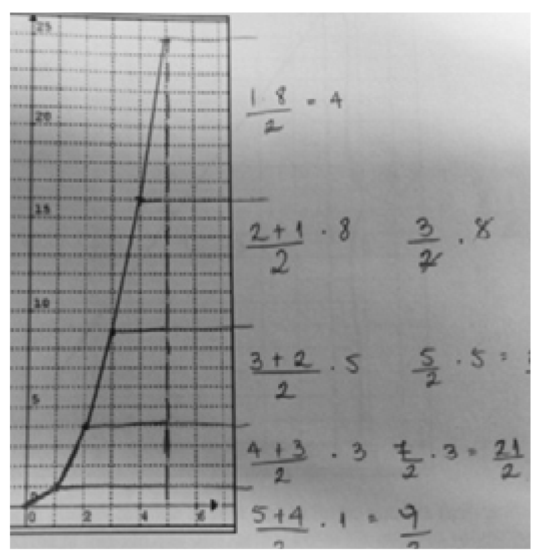
Producciones Estudiantiles Sesión 4

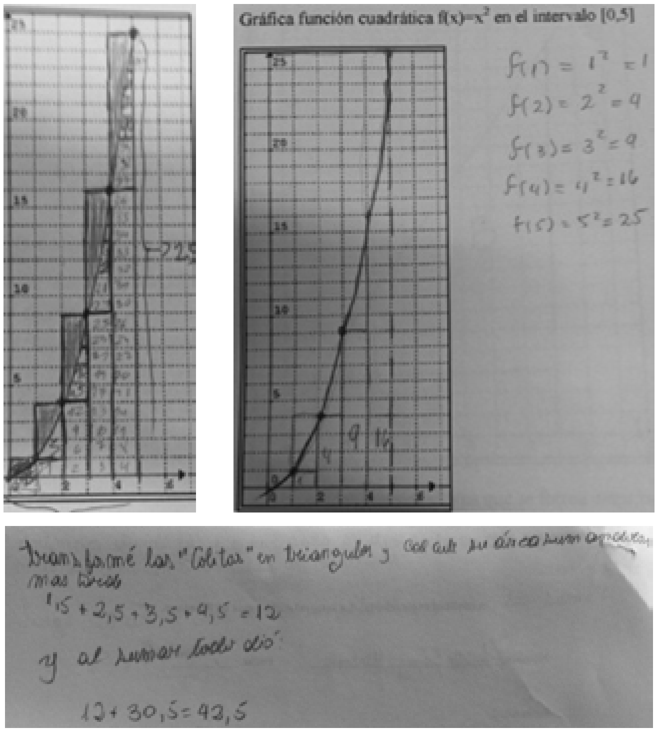
En las imágenes anteriores se puede apreciar algunas de las técnicas utilizadas por las alumnas para lograr realizar el cálculo del área solicitada, técnicas que van desde contar, separar la figura en áreas conocidas como triángulo y rectángulo o calcular directamente el área de un trapecio.

Una vez realizada la primera actividad, la segunda situación planteada es el cálculo del área que se forma entre el eje x y la función $f(x)=x^2$ en el intervalo [2,10]. Para ello, tal como en la primera problemática, se da la libertad para realizar el cálculo del área con el método que se estime más conveniente. De esta manera, al no existir fórmula asociada para el cálculo del área, las alumnas buscan distintas alternativas de solución. Se plantean diversas técnicas de resolución. Una alumna, por ejemplo, tiene como estrategia calcular el área de una hipérbola, dividirla por cuatro, luego calcular el área del rectángulo y restar el resultado obtenido anteriormente. Otras estudiantes separan el área total en área de figuras conocidas, como lo son los triángulos y los rectángulos; incluso una estudiante cuenta los cuadraditos uno a uno.





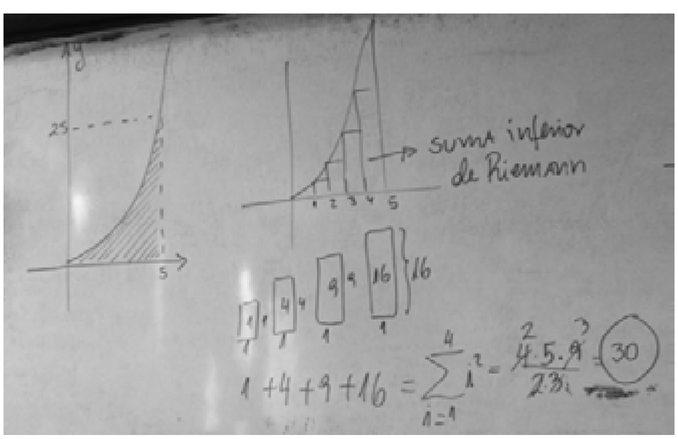




Producciones Estudiantiles Sesión 4

Clase 5.- Síntesis

En la última clase, se realiza una síntesis de lo visto en las sesiones anteriores, culminando con la explicación de que lo realizado en la clase anterior era un concepto matemático que se estudia en las asignaturas de Cálculo, como lo es la integral.



Trabajo de Síntesis - Sesión 5

En la imagen anterior, se muestra el cálculo del área solicitada y algunas de las técnicas que utilizaron para realizarlo. Se puede apreciar el cálculo de la suma inferior de Riemann escrita por medio de una sumatoria, la cual en este caso entrega una suma por defecto del área solicitada. Además de la suma inferior, también se realiza la suma superior de Riemann, donde se obtiene el área por exceso. Una vez obtenidas estas dos áreas, se realiza un promedio de ellas, con lo que se obtiene una aproximación del área solicitada.

Evaluación de las clases

Paralelo a la realización de todas estas actividades de la propuesta didáctica, se plantea la realización de fichas de aprendizaje, las cuales entregan la información respecto de lo que ocurre con el estudiante en cada una de las sesiones. Todo esto con el fin de investigar la forma en que el estudiante va construyendo su propio aprendizaje. Las preguntas de esta ficha de aprendizaje son las siguientes:

¿Sobre qué tema(s) o aspecto(s) se trabajó en la clase de hoy?

¿Qué aprendí en la clase de hoy?

¿Cómo le explicarías a alguna compañera lo que viste en esta clase?

Conclusiones

Luego de aplicar la propuesta didáctica y realizar un análisis general de ella, se puede indicar que se logró el objetivo, es decir, utilizar la temática de sumatoria y relacionarla con el concepto de integral como Suma de Riemann. Como se pudo apreciar en el análisis de las distintas clases, las estudiantes entre las estrategias que plantean, implícitamente ocupan la idea de generar particiones, separando el área que es desconocida en otras áreas más pequeñas que si son conocidas. Al realizar la síntesis de la unidad, explicar el concepto de integral y cómo esto se relaciona con las estrategias utilizadas, reafirma positivamente la autoestima de las alumnas, sintiendo que son capaces de construir su propio aprendizaje.

En cuanto a los aspectos más efectivos de la unidad, se puede indicar que: de la primera clase, la actividad 1 fue la más lograda, pudiéndose calcular los términos que continúan en la secuencia y la fórmula general; de la segunda clase, las alumnas lograron comprender, en su mayoría, la utilización de las propiedades de sumatoria; de la cuarta clase, la metodología utilizada ayudó a que se lograran los objetivos. En primer lugar, se planteó lo más simple, donde se debía obtener el área delimitada por función afín y el eje x, una vez que las alumnas buscaron distintas estrategias de cálculo, se realizó una plenaria, la cual dio seguridad a las alumnas, pues pensaban, en algunos casos, que su método no era correcto.

En cuanto a los aspectos menos efectivos de la unidad, se puede indicar que: de la primera clase, la actividad 2 fue la que causó más dificultad para las alumnas que, si bien lograron establecer los términos que continúan en la secuencia numérica y también escribir con palabras lo que ocurre, fue muy complejo para muchas alumnas determinar la regla de formación de dichos términos de forma algebraica, por lo cual, para una nueva aplicación, lo más óptimo sería encontrar una secuencia numérica que tenga una regla de formación más simple; de la tercera clase, se tuvo la dificultad de no haber ejercitado lo suficiente para que todas las alumnas internalizaran las propiedades de sumatoria y luego pudieran aplicar esto a la resolución de problemas.

Para mejorar la unidad de aprendizaje, debe considerarse un rediseño en cuanto a la distribución de los tiempos dedicados a cada una de las actividades, puesto que en algunos casos fueron escasos en relación todos los objetivos de aprendizaje planteadas.

Referencias

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez(Ed.), Ingeniería didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y lainnovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 33-59). Colombia: Unaempresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica

Chevallard, Y. (1999) El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches en Didactique des Mathematiques, Vol 19, Francia

Mineduc – Chile (2012) Estándares Orientaciones para los Egresados de las Carreras de Pedagogía. Chile

Mineduc Chile (2002) Programa de Estudio Funciones y Procesos Infinitos. Chile

Los números racionales: Una mirada desde la teoría los modos de pensamiento en la formación inicial de profesores.

Daniela Bonilla Barraza, Marcela Parraguez González
Colegio Tamelcura (Chile), Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
danielabonillab@gmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen

El siguiente reporte de investigación, tiene por objetivo mostrar evidencias, de las diferentes maneras de pensar que los profesores en formación inicial, ponen de relieve, para dar cuenta de la comprensión del sistema de los números racionales.

El marco teórico sobre el cual se basa este estudio es *los modos de pensamiento* de Anna Sierpinska; desde este referente comprendemos el sistema de los números racionales en tres perspectivas, (Analítico –Estructural): como un representante de una clase de equivalencia, (Analítico –Aritmético): como un cociente de dos números enteros (con divisor distinto de cero), y (Sintético- Geométrico): como un punto en la recta numérica. Los resultados de esta investigación, dan cuenta que los profesores en formación inicial privilegian los modo de pensar SG y AA por sobre AE, por lo tanto, es esencial crear actividades que promuevan la comprensión del sistema de los números racionales a través del tránsito entre los tres modos de pensar.

Antecedentes, Marco teórico y Objetivos de investigación

La presente investigación, tiene por objetivo mostrar evidencias con sustento teórico, de las diferentes maneras de pensar que los profesores en formación inicial, ponen de relieve, para dar cuenta de la comprensión del sistema de los números racionales.

Distinguimos los conceptos de sistema y conjunto, puesto que en algunos casos se utilizan como sinónimos, sin embargo, en esta investigación entendemos por conjunto a una noción intuitiva que hace alusión a una colección de objetos; en cambio, un sistema es un conjunto que posee ciertas propiedades que hace que sus elementos se comporten de una determinada forma. Consideramos por lo tanto, que el sistema de los números racionales, está caracterizado por una estructura algebraica (Dummit, 1991: 262; Hungerford, 2003: 143).

El marco teórico sobre el cual se basa este estudio es *los modos de pensamiento* propuestos por Anna Sierpinska (2000), donde se distinguen tres modos de pensar un concepto: analítico-estructural (AE) –a partir de su definición formal–, analítico-aritmético (AA) –como una expresión analítica que caracteriza al objeto–, y sintético-geométrico (SG) –como figuras que lo representan–.

Situamos entonces, a partir de los elementos que nos brinda el referente teórico, el sistema de los números racionales desde tres perspectivas, (AE): como un representante de una clase de equivalencia, (AA): como un cociente de dos números enteros (con divisor distinto de cero), y (SG): como un punto en la recta numérica (Figura 1).

Desde la teoría, comprender un objeto matemático, es poder abordarlo articuladamente desde AE, AA y SG (Parraguez, 2012). Es por esta razón, que el objetivo principal de la investigación es diseñar una propuesta didáctica para la comprensión del sistema de los números racionales en la formación de profesores, integrando los tres modos de pensar dispuestos en la figura 1.

AE

$$Q = \{[\langle n,m\rangle]_R : n, m \in Z, m \neq 0\}$$
Donde $[\langle n,m\rangle]_R$ es la clase de equivalencia del par (n,m)
R una relación de $Z\ x\ (Z-\{0\}$, donde $(n,m) \wedge (p,q) \in Z\ x\ (Z-\{0\})$, tal que: $(n,m)R(p,q)\ si\ y\ solo\ si\ nq = pm$.

AA

$$Q = \{\tfrac{a}{b}\ /\ a \in Z \wedge b \in Z, b \neq 0\}$$

SG

Figura 1: Modos de pensar el sistema de los números racionales.

Consideramos que estos tres modos de pensar, que hemos definido para el sistema de los números racionales, permiten analizar la forma en que los docentes en formación inicial los comprenden, ya que en la mayoría de las mallas curriculares de las carreras de Pedagogía en Matemática en nuestro país, se aborda la construcción axiomática de los sistemas numéricos. Así como también los estándares de desempeño docente son claros en enfatizar que: "El futuro profesor (a) comprende: las construcciones de Z a partir de N y de Q a partir de Z, la noción de cardinalidad de conjuntos." (Ministerio de Educación, 2012, p.112).

Con la intención de reunir antecedentes empíricos con sustento teórico para diseñar la propuesta didáctica, nos planteamos los siguientes objetivos específicos:

- Indagar en la forma que comprenden el sistema de los números racionales docentes de matemática en formación inicial.
- Identificar los elementos matemáticos que propician el tránsito entre los distintos modos de pensar que hemos definido para el sistema de los números racionales.

Metodología y resultados

Para los propósitos de investigación, utilizaremos como estrategia metodológica, estudio de casos, en la medida que "son particularmente apropiados para estudiar una situación en intensidad en un período de tiempo", (Arnal, Del Rincón y Latorre, 1992). Destacamos la importancia de esta metodología, puesto que nos proporciona antecedentes experimentales fundamentales en la toma de decisiones para diseñar nuestra propuesta.

Las unidades de análisis están conformadas por 10 docentes de matemática para enseñanza media de 8° semestre de una universidad chilena del norte del país. Ellos ya han trabajado la construcción de los sistemas numéricos en años anteriores.

Para alcanzar el primer objetivo específico de investigación, comenzamos por diseñar y aplicar una medición inicial, que consistió en un cuestionario de tres preguntas, que a continuación se describen:

Pregunta 1: ¿Cuáles de los siguientes números $\frac{2}{3}$, -4 , 0 *son racionales? Justifica tu respuesta. Muestra dos argumentos distintos.*
Pregunta 2:¿Qué estrategias usarías para justificar que los números $\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{6},\frac{4}{8}$ *representan un mismo número racional? Escribe el procedimiento.*

Pregunta 3: ¿El número 1 de N es igual al 1 de Z? ¿Al 1 de Q*? Reflexione y responda.*

Las preguntas 1 y 2 pueden ser abordadas desde los tres modos de pensar que hemos definido en la figura 1 para el sistema de los números racionales, sin embargo, la pregunta 3 sitúa a los informantes específicamente en un modo AE, puesto que las diferencias radican en la construcción axiomática de Q.

Análisis de respuestas del cuestionario exploratorio.

En relación a la pregunta 1: *¿Cuáles de los siguientes números* $\frac{2}{3}$, -4 , 0 *son racionales? Justifica tu respuesta. Muestra dos argumentos distintos.*

Como resultados de la medición inicial, destacamos que el total de los informantes (10) priorizan el modo AA para abordar esta pregunta, pues, sus argumentos principales radican en su definición como cociente. (Ver figura 2)

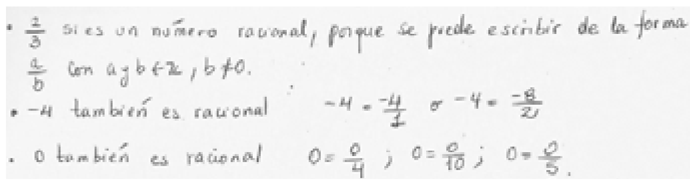


Figura 2: respuesta pregunta 1 del informante 8, I8

En la pregunta se solicitan dos argumentos distintos, por lo tanto, en esta segunda explicación la mayoría (8) de los informantes se sitúan en la relación conjuntista entre los sistemas numéricos, al parecer, estos docentes consideran esta relación como una estructura de contención que regula a *N, Z y* Q (ver figura 3) .

Figura 3: respuesta pregunta 1 del informante 3, I3

Para la *Pregunta 2: ¿Qué estrategias usarías para justificar que los números* $\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{6},\frac{4}{8}$ *representan un mismo número racional? Escribe el procedimiento.*

La mayoría de los docentes se sitúan en los modos SG y AA del sistema de los números racionales, como se detalla a continuación:

5 de los informantes, desde un modo SG, enfatizan que estos números tienen una única ubicación en la recta numérica, por esa razón son iguales. (Ver figura 4)

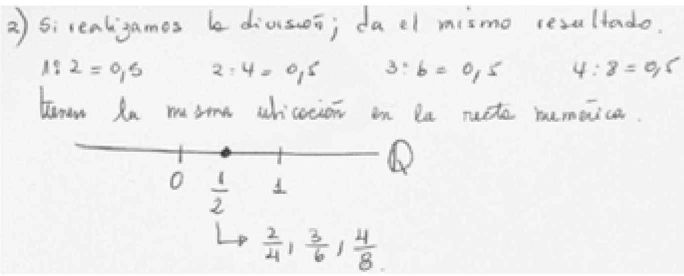

2) Si realizamos la división; da el mismo resultado.
1:2 = 0,5   2:4 = 0,5   3:6 = 0,5   4:8 = 0,5
tienen la misma ubicación en la recta numérica.

Figura 4: respuesta pregunta 2 del informante 8, I8

La totalidad de los informantes, muestran estrategias relativas a realizar cálculos para determinar si los números son equivalentes. Si bien esa es la propiedad que define el modo analitico estructural, al parecer los informantes no se sitúan en ese modo para responder, si no , más bien solo la utilizan como un procedimiento que se enseña en la formacion escolar para verificar lo pedido(ver figura 5) .

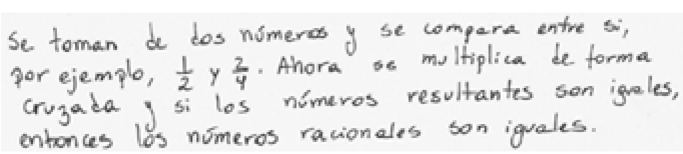

Se toman de dos números y se compara entre si, por ejemplo, 1/2 y 2/4. Ahora se multiplica de forma cruzada y si los números resultantes son iguales, entonces los números racionales son iguales.

Figura 5: respuesta pregunta 2 del informante 3, I3

Con respecto a la *Pregunta 3: ¿El número 1 de N es igual al 1 de Z? ¿Al 1 de Q? Reflexione y responda.*

Se considera esta pregunta del cuestionario fundamental para evidenciar si los docentes logran situarse en un modo AE, pues las dos preguntas anteriores se pueden responder a partir de la matemática que se enseña en secundaria en establecimientos educacionales, en cambio, para esta pregunta específicamente el informante tiene que realizar una reflexión desde una construcción axiomática previa.

La mayoría de los informantes (9) muestran en sus argumentos, que la relación dada entre los sistemas numéricos *N, Z* y Q, desde la perspectiva conjuntista es lo que ellos consideran como estructura, pues, responden que es el mismo número 1, independiente del sistema donde esté definido (Ver figura 6) y en otros casos, reconocen que si bien las representaciones son distintas, es el mismo número. (Ver figura 7).

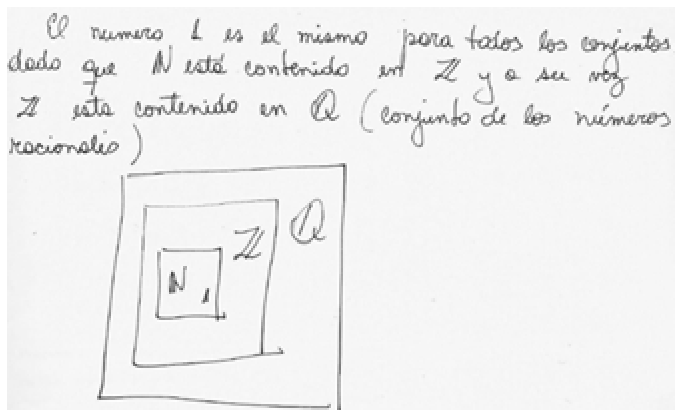

El numero 1 es el mismo para todos los conjuntos, dado que N está contenido en Z y a su vez Z esta contenido en Q (conjunto de los números racionales)

Figura 6: respuesta pregunta 2 del informante 5, I5

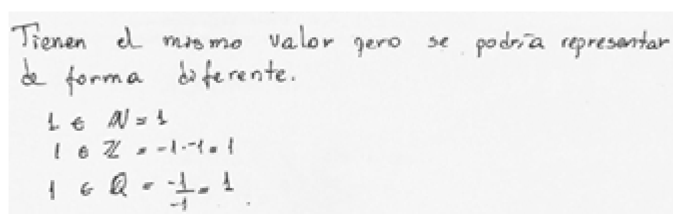

Tienen el mismo valor pero se podría representar de forma diferente.
$1 \in N = 1$
$1 \in Z = -1 \cdot -1 = 1$
$1 \in Q = \frac{-1}{-1} = 1$

Figura 7: respuesta pregunta 3 del informante 7, I7

Con respecto a la misma pregunta 3, solo uno de los docentes, reflexiona sobre la posibilidad de que estos números sean distintos, pero se sitúa en la relación conjuntista de *N*, *Z* y Q, por lo que no encuentra argumentos suficientes para interpretar su respuesta desde los modos de pensar. (Ver figura 8)

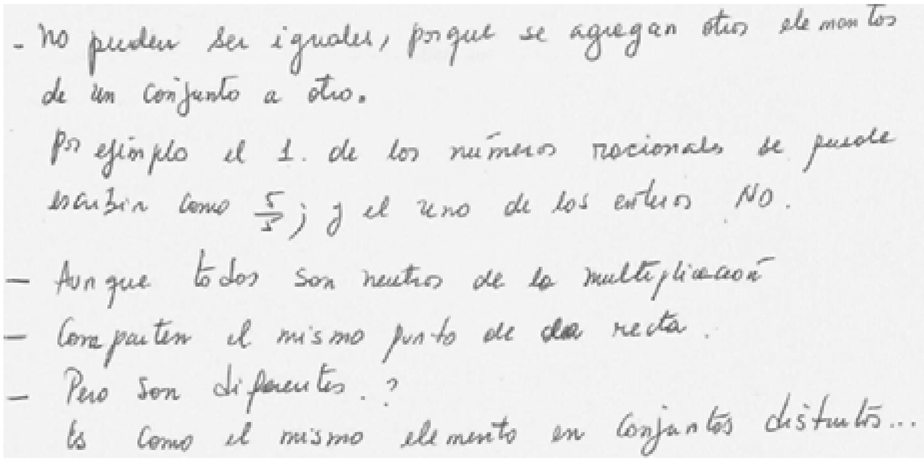

- No pueden ser iguales, porque se agregan otros elementos de un conjunto a otro.
Por ejemplo el 1. de los números racionales se puede escribir como $\frac{5}{5}$; y el uno de los enteros NO.
— Aunque todos son neutros de la multiplicación
— Comparten el mismo punto de la recta.
— Pero son diferentes. ?
Es como el mismo elemento en conjuntos distintos...

Figura 8: respuesta pregunta 3 del informante 8, I8

Como conclusión de la aplicación del cuestionario exploratorio al caso en estudio, podemos señalar que los profesores comprenden el sistema de los números racionales a partir de su definición como cociente y la operatoria incluida en este tratamiento. Sin embargo presentan grandes dificultades para comprender el sistema de los números racionales en un modo AE. Esto queda en evidencia al argumentar mayoritariamente a partir de la relación conjuntista entre *N, Z* y Q que al parecer se considera como estructura, desprovista de las clases de equivalencia.

A partir de estos resultados, consideramos fundamental diseñar actividades que potencien el tránsito entre los modos **AE** y **SG**; **AE** y **AA** de Q.

Elementos para una propuesta didáctica

En función a nuestro segundo objetivo específico, se realizó una revisión bibliográfica matemática y didáctica, en busca de aquellos elementos que permiten articular los 3 modos de pensar Q, dispuestos en la figura 1.

Se destaca de esa indagación como elemento esencial en el tránsito AE – SG, la recta numérica, puesto que, es fundamental en la comprensión de los sistemas numéricos, pero consideramos que su tratamiento debe ser más importante que una simple representación. Por ello, es relevante promover en los futuros docentes la reflexión sobre ¿cómo se disponen los números racionales en la recta numérica?

A partir de los resultados de la medición inicial, se proponen las siguientes actividades que potencian los tránsitos AE – SG y AE- AA , siendo fundamental el rol del docente , dado que , es el encargado de institucionalizar cada objeto, una vez resueltas las actividades.

Propuesta de actividades

Sea R una relación definida sobre $Z\,x\,(Z - \{0\})$, *donde* $(n,m) \wedge (p,q) \in Zx(Z\text{-}\{0\})$ *, tal que:* $(n,m)R(p,q)$ si y solo si $nq = pm$.

a) *Pruebe que la relación anterior es una relación de equivalencia.*
b) *Escriba pares ordenados de la clase de equivalencia de:*

(0,1) =	(1,8) =
(2,3) =	(7,8) =
(1,2) =	(2,2) =
(3,4) =	(1,4) =
(5,8) =	(3,8) =

c) Ubique estos pares ordenados en el plano discreto de $Z \times (Z - \{0\})$ *. ¿qué observas?*
d) Escribe tus observaciones sobre los números racionales, desde las distintas perspectivas tratadas.
e) Reflexione sobre ¿cómo se forma la recta numérica del sistema de los números racionales? justifique

Análisis a priori

El desarrollo de las actividades (a y b), promueve inicialmente el tratamiento en un modo AE de Q. Como conocimiento previo, se necesitan los conceptos de: relación, relaciones de equivalencias y producto cartesiano.

A partir de la relación dada, los estudiantes (futuros docentes) encontrarán infinitos pares equivalentes a otros. Esta idea refuerza el concepto de representante de una clase de equivalencia. Una vez comprendido este modo AE, se puede transitar hacia un modo AA, abordando por ejemplo la clase del par (2,3), como el conjunto $\overline{(2,3)} = \{(4,6), (6,9), (-2,-3) \ldots \ldots \ldots\}$ ya que la relación está definida desde $Z \times (Z - \{0\})$. Esto deriva en el modo AA de Q, esto es,

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \,/\, a \in Z \wedge b \in Z, b \neq 0 \right\}.$$

En otras actividades se potencian el tránsito entre los modos AE y SG, considerando como idea esencial de dicha articulación la construcción de la recta numérica de Q. A partir del trabajo con las clases de equivalencia, se espera que los docentes, ubiquen los pares ordenados de cada clase en el sistema de referencia $Z \times (Z - \{0\})$, y que observen las posiciones de los puntos de una misma clase, para dar cuenta que estos pertenecen a una misma recta que parte desde el origen. Estas rectas no se intersectan en otro punto, con lo que se comprueba que cada número racional es único y que le corresponde un único punto en la recta numérica. Para disponer las clases de equivalencia de un mismo número racional en la recta numérica se pueden "trazar todas" las rectas uniendo los puntos de una misma clase de equivalencia y trazar una recta L' paralela a la recta L.
Esta recta L' es la representación del sistema de los números racionales en la recta numérica, hecho que interpretado de nuestro referente teórico equivale a un tránsito de AE a SG, (Ver figura 9).

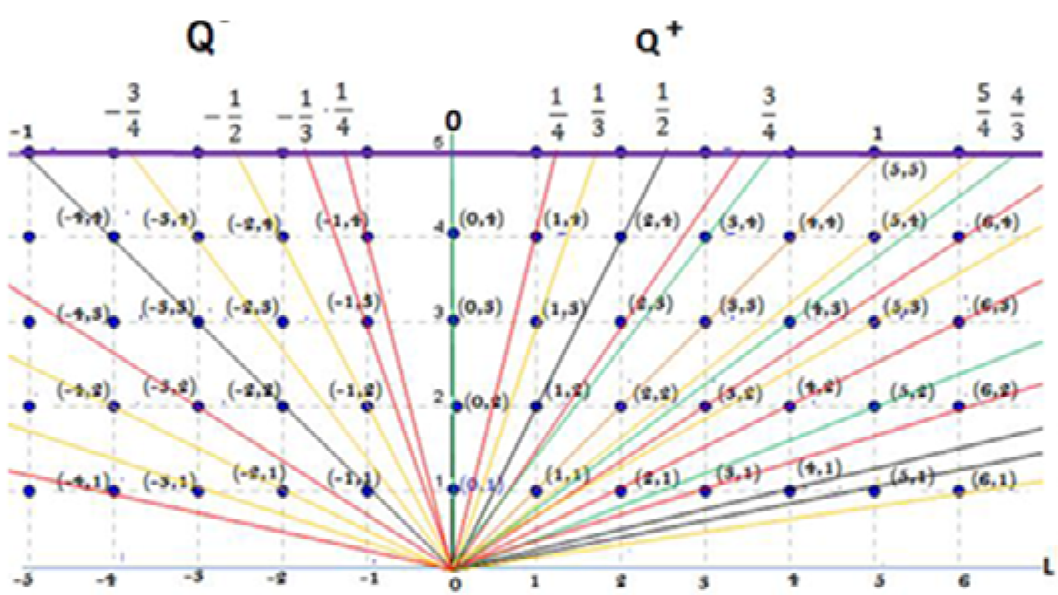


Figura 9: números racionales en la recta numérica desde AE - SG

Reflexiones finales

Con este estudio se propone una primera interpretación de los modos de pensar los números racionales y, al mismo tiempo, de la pregunta sobre los modos de pensar que privilegian los docentes en formación inicial, para tratar situaciones que los involucran.

Se propone, así, esta forma de comprender los números racionales a la comunidad interesada en el aprendizaje de este tema como un posible modelo de enseñanza-aprendizaje de Q y como diseño de investigación que permita validarla.

Es necesario llevar a cabo más investigación y para ello se sugiere la aplicación de las actividades en estudiantes de pedagogía en matemáticas, luego de la construcción del sistema de los números enteros, para que ellos muestren, a través de argumentos observables, los articuladores entre los distintos modos de pensar Q, en particular lo que se plantea en la figura 9. También se sugieren entrevistas a los estudiantes para profundizar en su razonamiento y poder con ello tener más evidencia que sustente los tránsitos AE – AA y AE – SG de Q.

Referencias

Arnal, J., del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). Investigación educativa: fundamentos y metodología. Barcelona: Labor.

Dummit, D. & Foote, R. (1991).Abstract Algebra.New Jersey: Prentice-Hall.

Hungerford, T.W. (2003). Algebra GTM 73.New York: Spinger.

Ministerio de Educación. (2012). Estándares orientadores para carrera de pedagogía en Educación media. Santiago: Ministerio de Educación.

Parraguez, M. (2012). Teoría los modos de pensamiento: Didáctica de la Matemática

Valparaíso: Ediciones Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra.En J.

L.Dorier (ed.), On the Teaching of Linear Algebra. KluwerAcademicPublishers, 209-246.

Duval en la virtualidad: Un apoyo real para los estudiantes y aumentar la retención en universidades del CRUCH

Nicolás Alarcón, José Klenner, Liliana Hernández,
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, UNAB, UTA
nicolasalarcon147@hotmail.com, jose.klenner@gmail.com, liliana.hernandez.uta@gmail.com

Resumen

Una de las dificultades que tienen las universidades es que cada año reciben un contingente de nuevos estudiantes, recién egresados de Enseñanza Media, provenientes de distintos lugares y colegios. Esto ha requerido que las universidades del consejo de rectores implementen distintas acciones tendientes a nivelar la formación de sus estudiantes para mejorar los índices de retención estudiantil, que las políticas públicas requieren. En relación a lo anterior, se presenta una alternativa de apoyo a los estudiantes que pretenden seguir estudios superiores que necesiten matemática en su nueva carrera. Este trabajo tiene por objetivo divulgar experiencias exitosas logradas en plataforma virtuales, en donde el aprendiz puede acceder a un proceso de aprendizaje con retroalimentación. En general, la propuesta asume la frase de Duval (1999) "no hay noesis sin semiosis", de esta forma tal propuesta ha consistido en proveer de herramientas virtuales al estudiante, para que el transite entre distintos registros semióticos, propendiendo a que este realice los tratamientos y conversiones que le serán requeridas en los cursos de primer nivel de la universidad y que además el estudiante se puede someter a un proceso de autoevaluación con retroalimentación inmediata, la que ha sido construida y basada en los análisis didácticos del contenido. La fortaleza de la tecnología usada -de acceso libre- es que fundamentalmente integra varios recursos de distintos ambientes tecnológicos, que pueden ser continuamente actualizados.

Antecedentes

Las políticas públicas en relación a la formación de profesionales con aporte del estado, requiere que los recursos sean utilizados de la mejor forma. Es por eso que resumiendo esto en lenguaje coloquial, el estado está propendiendo a que las universidades del CRUCH se comprometan con sus planes de estudios. A graduar al 100% de los alumnos que reciben, en el tiempo que no exceda a los 5 años de formación, de esta forma, el estado tendría que becar sólo por este tiempo a los estudiantes. Naturalmente esto requiere que las universidades reciban un contingente de estudiantes de buena calidad, con conocimientos y competencias para enfrentar su nueva formación. Las evaluaciones internacionales en matemáticas, tales como la PISA, muestran que la formación secundaria es deficitaria; lo mismo ocurre con mediciones nacionales, como la prueba SIMCE. Es decir, pasarán varios años para que esta situación cambie.

En el intertanto las universidades están en un zapato chino, ya que por un lado requieren de una cierta cantidad de alumnos para funcionar y el porcentaje de alumnos con buena formación no es suficiente para cubrir la oferta académica. Esto se agudiza en las regiones, especialmente las universidades de los extremos y por otro los aranceles de referencia son fijados por la eficiencia en los procesos de formación, entre los que se cuenta la retención en los primeros años, la retención en la carrera y el tiempo de graduación de los estudiantes.

Las universidades de servicio públicos, como lo son las del CRUCH, deben cumplir una labor social y acoger alumnos con distintas formaciones, especialmente a los estudiantes con bajos recursos, es por eso que esta propuesta pretende ayudar a nivelar a los estudiantes, antes de que ingresen a la universidad aprovechando el interés que tienen los estudiantes por la universidades de los proponentes.

Una de las dificultades que tienen las universidades es que reciben cada año un contingente de nuevos estudiantes, recién egresados de Enseñanza Media provenientes de distintos lugares y colegios, esto ha requerido que las universidades del Consejo de Rectores implementen distintas acciones tendientes a nivelar la formación de sus estudiantes para mejorar los índices de retención que las políticas públicas requieren. En relación a lo anterior se presenta una alternativa de apoyo a los estudiantes que pretenden seguir estudios superiores que necesiten matemática en su nueva carrera.

La propuesta permite acoger a estudiantes de distintos niveles de formación, ya sea por los contenidos o por la profundidad con que fueron tratados estos. El estudiante, en un proceso de evaluación continua, puede ir avanzando y completando la formación que le falta, de acuerdo a los tiempos que dispone y está dispuesto a invertir.

Duval: No hay noesis sin semiosis

En la plataforma, en donde el estudiante puede acceder a un proceso de construcción de conocimiento con retroalimentación, se puede implementar bajo el marco teórico de registros semióticos de Duval. En general las propuestas hacen suya la frase de Duval "no hay noesis sin semiosis", es decir, es imposible acceder a un contendido matemático sin pasar por el "manejo" de todos los símbolos que la historia y los matemáticos han construido para dar cuenta del contenido.

Como ejemplo tenemos la parábola: el estudiante para comprender cabalmente la parábola debe pasar por los distintos registros que son utilizados para referirse a ella, uno de estos es el registro algebraico en todas sus expresiones, proveniente de la geometría analítica y sus gráficas, pero también tenemos las representaciones de la parábola como lugar geométrico o como una figura que tiene una propiedad óptica o representación de caída libre de cuerpos. Todas estas representaciones deben abordadas mediante tratamientos y conversiones (Duval, 1999).

Las herramientas virtuales permiten estos tratamientos y conversiones, y el estudiante las puede ir desarrollando y potenciando de acuerdo a la institución que lo acoge. Basado en las experiencias como profesores y el conocimiento de la institución a la que pertenecemos (las culturas institucionales, las tradiciones en los cursos de matemáticas, etc.) podemos orientar, focalizar y someter al estudiante a controles de procesos de construcción de conocimiento, que fortalezcan registros más utilizados por nuestras instituciones o que sabemos que son debilidades que comúnmente emergen y son requeridas en la construcción de otros contenidos.

Resumiendo entonces, la retroalimentación inmediata fue construida basada en los análisis didácticos del contenido para generar los a prioris, pensando en los requerimientos futuros en cada institución, para que al ingresar los estudiantes no sientan el choque y se puedan sumergir fácilmente en los paradigmas de la institución que los acogerá.

La tecnología

Creemos que a esta altura del partido, nadie duda de la importancia de la tecnología y lo delicado que es usar este tipo de herramientas que pueden desviar la atención del estudiante y/o cortar los procesos de construcción de conocimiento matemático. Antes se ha hecho hincapié de cómo se debe usar, así que ahora nos remitiremos a qué nos referimos en términos de recursos tecnológicos.

Una de las fortalezas de la tecnología usada es que su acceso es abierto; la otra, es que integra varios recursos de distintos ambientes tecnológicos, tales como geogebra, animaciones, tests, foros, videos, elementos que soportan en la actualidad las plataformas moodle, pero con el anexo que cuentan con la posibilidad de usar lenguaje latex, para escribir expresiones matemáticas. Además cuenta con un procesador matemático que puede realizar manejo simbólico, como por ejemplo calcular derivadas, simplificar expresiones algebraicas, etc.. También se puede graficar funciones y relaciones.

Fomentando la argumentación en la construcción social

Si bien es cierto los trabajos de Duval (1999) son el primer sustento de las propuestas, también estas son fortalecidas por resultados de investigaciones de la Socioepistemología. En relación a esto último tenemos como referentes teóricos basales los artículos de Cordero en relación a la variación de parámetros (Cordero 2006b; Cordero, Montalto y Mena 2010) y las ideas de resignificación y funcionalidad del conocimiento (Cordero 2007, 2008, 2010); los trabajos relativos a modelación-graficación (Morales y Cordero en prensa) y los trabajos de Argumentación y Modelación (Morales, Mena, Vera y Rivera 2012).

Como ya lo han evidenciado estos mismos trabajos y otros de Sociepistemología (Buendía 2005, 2012; Cordero y Suárez 2008; Arrieta 2003) con el constructo del Discurso Matemático Escolar (dME), el problema de la enseñanza de la matemática radica en que está centrada en los conceptos matemáticos, lo que en consecuencia se presenta una matemática sin significados y alejada de lo que los estudiantes requieren. Es así que hay situaciones de aprendizajes virtuales que pretender dar más significados (las representaciones semióticas gráficas principalmente), con el objeto de desarrollar la interpretación vía argumentación gráfica, como modelos gráficos de algunos contenidos matemáticos, por ejemplos, las ideas de periodicidad , simetrías, entre otras.

En relación a la argumentación tenemos los trabajos realizados por Crespo (2007, 2010, 2011, 2012), en especial Crespo (2010), en donde se presenta una visión socioepistemológica de la demostración en matemática y la argumentación en distintos escenarios. Sin duda que es importante desarrollar competencias argumentativas de los ciudadanos, más aún si éstas conducen a conclusiones apropiadas, útiles para su vida. La lógica formal de la matemática ha sido valorada por la sociedad por tener esta virtud, lamentablemente en las aulas de matemáticas no es reconocida una argumentación si no se utiliza simbología, lenguaje y lógica matemática. Es claro que en el proceso de construcción de un conocimiento un individuo no puede –desde el inicio- expresar con plena claridad las ideas que recién se están configurando en su mente, pero al defender sus ideas ante la comunidad, pueden ser perfeccionadas y posteriormente valoradas por ella, ya que pasan a ser un conocimiento común funcional, de acuerdo a la problemática que estaban abordando, quedando así el conocimiento resignificado, el cual puede seguir evolucionando, transformarse en otro conocimiento funcional.

Construcción de Conocimiento en la virtualidad

Esta propuesta ayuda a la constitución de una comunidad de personas que no están en aulas, que pueden pertenecer a distintos colegios y niveles de formación, que probablemente tienen PC o tablets u otros recursos al que pueden acceder para apoyarse o colaborar con la comunidad. Esto pasa a ser un nuevo recurso para la nivelación y que debemos utilizar, para eso debemos liberarnos de la idea que los estudiantes aprenden sólo en clases o con tareas asociadas a cursos específicos: los alumnos aprenden en comunidades virtuales también. Hay que tomar conciencia que la web dispone de muchos recursos y el asunto es cómo aprovecharlos y en este caso, se puede canalizar esto a través de foros con el fin de que los estudiantes desarrollen habilidades de argumentación. Si se dispone de recursos para monitorear estos foros, se podría producir un proceso de institucionalización (Brousseau, 1986) en donde se establezca el contenido construido en forma virtual.

Resultados de este tipo de apoyos.

Los resultados que hemos obtenido mediante la utilización de estos recursos han sido buenos, especialmente si estas nivelaciones están hechas acorde a los cursos y pruebas que las instituciones realizan para sus nuevas cohortes.

En una de las universidades, la plataforma se amplió a ser usada como metodología para desarrollar lo central de los problemas de cálculo y álgebra iniciales, más aún, para realizar evaluaciones presenciales, se toma en cuenta lo desarrollado en plataforma.

Otra ventaja es que también se pueden hacer todo tipos de estudios de seguimiento de los que participan del apoyo virtual, por ejemplo, saber lo intentos y/o apoyos que requirió un estudiante para acceder a un conocimiento específico.

Cuáles apoyos fueron más eficientes y cuáles tuvieron mejor acogida por parte de los estudiantes.

Referencias

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación *como proceso de matematización en el aula . (Tesis doctoral no publicada). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.*

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspecto as generators of knowledge in a social practice Framework. A socioepistemological study. Educational Studies in Mathematics, 58 (3), 299- 333.

Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores. Revista Educación Matemática Vol 24 num 2, paginas 5-31

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2), 33-112.

Cordero, F. (2006b). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matemática. La Matemática e la sua Didattica, 20(1), 59-79.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10(1), 7-38.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Ed.), Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano (pp. 285-309). México, D. F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Cordero, F. Suárez, L. (2008) Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. Revista Electrónica Investigación Educación y Ciencias. [online] 3 (1), 51-58.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010) Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: Una práctica institucional en el bachillerato. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13(2), 187-214.

Cordero, F.; Mena, J. y Montalto (2010). Il ruolo Della giustificazione funzionale in una situa- zione di risignificazione dell'asintoto. Línsegnemento Della matematica e Delle scienze integrate, 33 B(4), 457-488.

Crespo, C. (2007). Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la Socioepistemología. Tesis Doctoral. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA-IPN

Crespo Crespo, C. (2011). Acerca de la lógica de la construcción del conocimiento matemático. P. Lestón (Ed.). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 24. méxico: Clame, 721-728

Crespo, C.; Farfán, R.; Lezama, J. (2010). Argumentaciones y demostraciones: una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13(3), 129-158.

Crespo, C. (2012) Socioepistemología. En M. Pochulu, M. Rodríguez (Comp), Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. (pp. 91-114), Argentina: Universidad Nacional de general Sarmiento y Editorial Universitaria Villa María

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle, Colombia

Morales, A., Mena, J., Vera, F., Rivera, R. (2012). El rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos físicos. Enseñanza de las Ciencias Revista de Investigación y experiencias didácticas. NÚM. 30.3 ,237-256

Morales, A., Cordero, F. (en prensa). La graficacion-modelación y la Sere de Taylor. Una Socioepistemología del Cálculo. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA.PNA, 1 (2), pp. 47-66.

SOCHIEM

2015