REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

RECHIEM

VOLUMEN 8
1
2014
ISSN 0718-1213

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diseño y Diagramación de la Edición Digital

Editorial Gráfica: Duográfica Ltda
Contacto: rechiem@sochiem.cl

Revista Chilena de Educación Matemática RECHIEM

VOLUMEN 8 N° 1-2014
ISSN N° 0718-1213

Revista RECHIEM, es una publicación de la Sociedad Chilena de Educación Matemática.
Las opiniones señaladas en notas o artículos firmados no representan las del Comité Editorial ni de la Sociedad.
LA dirección se reserva el derecho de publicar o sintetizar los artículos que estime conveniente. Correspondencia dirigirla a: rechiem@sochiem.cl

RECHIEM©
Inscripción N°143.059
ISSN n°0718-1213

Diseño de portada: Miguel Díaz Flores
Diseño y Diagramación (Edición Digital): Duográfica Ltda.
Noviembre 2014

Índice de contenidos

Índice de contenidos

Editorial

Este número de la Revista Chilena de Educación Matemática, RECHIEM, pretende presentar in extenso un análisis de la investigación educativa de nuestros días en Chile, en Latinoamérica y en Hispanoamérica, en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, actividad, esta última, que es reconocida, en algunos países, como Educación Matemática y en otros como Didáctica de la Matemática.

Cada trabajo que se despliega en este número, revisa tópicos relevantes que se están pensando por parte de los investigadores autores, considerando una mirada de la Matemática como una actividad científica.

Por otra parte, se presenta aquí a la Educación Matemática vinculada a la actividad de enseñar, como también a la tarea de aprender. Interesa a los editores de esta publicación, difundir la producción de los conocimientos matemáticos, respetando los objetos particulares de estudio, lo que sin duda provocará transformaciones tanto en los conocimientos como en los lectores y usuarios de RECHIEM. Es por ello que, cada año se realizan las Jornadas Nacionales de Educación Matemática, organizadas por Sochiem y por Universidades, donde se ha ido reconociendo, cada vez más, la necesidad de hacer estudios empíricos y teóricos, sobre las condiciones didácticas de los procesos de enseñanza y de aprendizaje en los distintos niveles: básicos, medios o superior y que son los que constituyen esta edición.

En síntesis, RECHIEM contiene una base teórica sólida, que posibilitará una mejor comprensión e identificación de las diversas posiciones educativas y así analizar las relaciones entre aquellas, comprendiéndolas didácticamente.

Carlos Silva Córdova
Presidente
Sociedad Chilena Educación Matemática - SOCHIEM

Una visión acerca de la educación matemática en Chile: La interpretación de algunos hitos en el proceso de llegar al presente y lo que falta, los rezagados en el proceso de reforma que vive el país[1]

Fidel Oteiza Morra.

Presentación

¿Cómo caracterizar la situación actual de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en Chile?, ¿Es posible, en pocas palabras, describir lo que a juicio de este autor, son los principales hitos, condiciones y fenómenos que podrían explicar ese presente?, y, ¿Qué nos enseña esta búsqueda? Estamos en medio de un proceso de reforma, y en la discusión acerca de la calidad, se echan de menos temas centrales. ¿Cuáles son esos rezagados? La respuesta no es historia ni representa nada más que la visión de quién escribe. La respuesta es, por lo tanto, parcial y está signada por la experiencia de un educador que ha tenido la oportunidad de ser observador y actor en varios decenios del proceso que describe e interpreta. La respuesta es una oportunidad para explicitar los lentes con los que se mira la Educación y la Educación Matemática en Chile en un lapso de cerca de cincuenta años de experiencia. También, es la oportunidad de reflexionar y ofrecer a otros la oportunidad de hacer explícita su propia mirada. Eugene Meehan, en su particular forma de hacer filosofía dice "estamos en la realidad como el botero que rema de espalda al lugar al que se dirige y usa los signos y datos de lo que deja atrás para anticipar lo que viene" (E. Meehan, 1981). Agrega, "estamos en el presente, el futuro es opaco, sólo lo podemos anticipar usándolos signos del pasado a la luz del presente", "el pasado no existe sino en lo que queda de sus efectos y, todo lo que nos importa está en el futuro". ¿Qué nos enseña el camino recorrido, las expectativas cumplidas y las que no se dieron a la realidad, los aciertos y los errores? Reflexionar, hacer explícitas nuestras visiones y compartirlas, es una contribución de los actores de hoy a un futuro más rico en posibilidades para los niños, niñas y jóvenes que se inician en la aventura de aprender y de hacer Matemática.

Luego de una breve presentación de algunos de los descriptores más visibles del presente de la Educación Matemática en Chile, se hace una reseña acerca de los hitos, situaciones, decisiones e intervenciones que, a juicio del autor, explican o hacen comprensible aspectos centrales de esa imagen de presente. Para finalizar con una reflexión sobre lo que no está en la discusión acerca de la calidad y que representan desafíos importantes para la Educación y la Educación Matemática en el país.

1 La Educación Matemática en el Siglo XXI, Xicotéscatl Martínez Ruiz y Patricia Macarena Gallardo, editores. (2015). Colección Paideia Siglo XXI, Instituto Politécnico Nacional, México.(pp.. 41 - 66)

Una mirada sin perspectiva

Es muy difícil hacer una interpretación del presente, tanto acerca de lo que ese presente es y de cuál puede ser su impacto. Los hechos recientes, lo que está fresco en los titulares del periódico y se debate en los medios se ven sin perspectiva. Pero, estamos con los remos en la mano – Eugene Meehan nuevamente - y las decisiones que hagamos dependen de esas interpretaciones.

El país vive un momento de grandes expectativas de cambio en la educación. El debate es permanente y acalorado. Se propone un cambio en el formato mismo de la institucionalidad escolar que afecta al 90% de la población escolar. ¿Cómo se financia y quién administra los recursos que el Estado destina a la educación? Se trata de una pregunta que afecta el plano regulador de todo el sistema educativo. La cuestión no ha dejado a nadie indiferente.

Los jóvenes salieron a la calle y movilizaron al país hace ocho años: "Educación gratuita y de calidad para todos" fue la consigna. Se la llamó la "Revolución de los Pingüinos". El tema – en la agenda de hoy - ha opacado todo otro aspecto de la reforma educacional que lleva algo más de veinte años de puesta en acción.

Algunos rasgos de la situación actual pueden ser: el país tiene un sistema educativo de 1° a 12° que incorpora a la gran mayoría de los niños, niñas y jóvenes en cada nivel de la escuela. Muy cercano a un 100% en los primeros niveles y sobre un 85% en los niveles terminales. La educación de tercer nivel ha crecido hasta llegar a un acceso cercano al 50% de cada cohorte educacional. La educación es obligatoria de 1° al grado 12°, lo que obliga al Estado a proveerla y los padres a ponerla en práctica en sus hijos. La infraestructura escolar se ha renovado en una proporción bastante alta; los establecimientos educacionales han visto, en estos veinte años, aumentar los recursos educativos, las bibliotecas, centros de recursos y – en forma especial y cuidada desde el comienzo de los noventa a la fecha, han sido dotados con recursos digitales y conectividad a la Web-; se ha generado una cantidad considerable de proyectos educativos focalizados en sectores pobres, niños con necesidades especiales, formación inicial y en servicio de docentes, capacitación en uso de los recursos digitales (Enlaces[2]), textos escolares, bibliotecas escolares, pasantías para docentes en diferentes centros de formación de varios países, entre otros proyectos diseñados y desarrollados por el Estado a través del Ministerio de Educación. Paralelamente se generalizó la aplicación de un sistema de evaluación de los aprendizajes con cobertura nacional el "Simce[3]", con pruebas en varios niveles del sistema cuyos resultados han sido la base principal para conocer el los logros del sistema en su conjunto, en las diferentes regiones y en los establecimientos mismos. Desde fines de los noventa se inició el desarrollo y la aplicación de estándares, en el nivel de aprendizaje y luego en el de formación inicial de docentes. El currículo nacional ha sido definido y redefinido en varias oportunidades, encontrándose en proceso una nueva revisión que ha significado cambios importantes.

2 Enlaces, programa nacional que ha acompañado al sistema educativo, las escuelas y los docentes en la incorporación de las tecnologías de la información.

3 El sistema nacional de evaluación de resultados de aprendizaje fue fundado en 1988 con el objetivo de proveer de información relevante para su quehacer a los distintos actores del sistema educativo. Su principal propósito consiste en contribuir al mejoramiento de la calidad y equidad de la educación.

Ha sido más de veinte años de reforma sostenida, adoptada como un "Política de Estado". La inversión en pensamiento, acciones y recursos, fue enorme. Los efectos se notan en todas las partes del sistema educativo, infraestructura, recursos, currículo e inversión en los recursos humanos.

En síntesis, una sociedad inquieta por la calidad de la educación, un estado decidido a generar una nueva institucionalidad con el objeto de atacar la incapacidad del modelo actual para reducir la brecha entre los que tienen y los que no. El indicador más poderoso de esa falencia es el nivel de estratificación de los resultados obtenidos por establecimientos públicos y privados. Esta inquietud generalizada ha generado debates cuyo apasionamiento indica el nivel de compromiso de los actores con la educación. En la base de ese movimiento de reforma, la existencia un sistema educativo que lenta, pero consistentemente, ha contribuido a elevar los niveles de escolaridad nacionales. En efecto, la inmensa mayoría de los adultos en el país, admite que tiene más años de escuela, escolaridad, que sus padres y que sus hijos tendrán más y mejor educación que ellos. Otro indicador importante es el incremento en el acceso al nivel terciario, esto hace que muchos de los alumnos de las universidades e institutos profesionales sean primera generación en ese nivel.

En la Matemática escolar, esas acciones y las políticas que las inspiraron, han generado cambios en el currículo, han tenido algún impacto en los programas de formación inicial docente, en los textos y otros recursos de aprendizaje, poco cambio en la forma en que se organiza y se realiza la clase de Matemática y algunos resultados positivos perceptibles en las pruebas nacionales y en PISA, entre las pruebas internacionales. La mayor parte de las propuestas de contenido matemático y de razonamiento matemático para el currículo nacional, en las que le ha tocado participar al autor, tales como: la noción de función, las probabilidades, la estadística, la geometría desde diversas perspectivas, los vectores, el paso que va desde las razones para hacer algo en un proceso matemático a la demostración, la búsqueda de regularidades y patrones, el cálculo mental, el álgebra desde pequeños, entre otros cambios significativos, están encontrando recién su camino a la sala de clases. Ese proceso, es otra fuente de aprendizaje, otra fuente de información acerca de cómo se genera y se pone en acción el currículo. De hecho, esta pregunta pasa directo a la sección de rezagados, por la imposibilidad de lograr, el autor y otros, que el tema del desarrollo curricular, adopte una forma que sea productiva y generativa de nuevas mejoras o ajustes con base en la experiencia.

Acerca de los rezagados, de las tareas pendientes

Hemos sido parte y testigos de un largo proceso de reforma iniciado al comienzo de los noventa. Ese mismo proceso y el desarrollo social, económico y político del país, ha generado nuevas demandas. La base administrativa misma del sistema. El problema más complejo y con más consecuencias que afecta la educación nacional, la estratificación de los resultados, la falta de equidad en el acceso a la educación. Más abajo, en la puesta en práctica de la acción educadora, quedan problemas que, o han sido rebeldes a los intentos anteriores o no han sido abordados. ¿Cuáles son los temas rebeldes o que esperan atención? Estamos en un momento en que se movilizan las piezas más fuertes del sistema. Eso ha obscurecido el resto, o sea mucho. Lo que espera atención, una nueva atención, es variado y en todos los niveles del sistema. Van desde temas de la filosofía de base y el norte de los procesos de reforma a los recursos que se generan para apoyar los procesos de aprendizaje, pasando por las instituciones universitarias y la propia profesión de profesor y las organizaciones profesionales.

Para comenzar, el modelo de educación que pueda ser el norte de las decisiones. En los ochenta se optó por un modelo de mercado, ¿Cuál es el modelo al que queremos acercarnos hoy? La globalización, a través de las pruebas internacionales, hace converger las miradas en los sistemas educativos de Asia y de algunos países europeos. ¿Son esos nortes deseables? ¿Cuál es la escuela que queremos construir? ¿La misma con refuerzos? ¿Una que permita competir con los gigantes? ¿Una propia y con base en nuestra realidad?

En una conversación reciente con alumnos de pedagogía nos planteábamos la tensión entre dos extremos posibles de un continuo de decisiones. El uno la cultura, el conocimiento validado, lo que la sociedad selecciona como deseable; en el otro el potencial de cada niño, niña o joven que está en edad escolar. ¿Cuál polo prima sobre el otro? Las asignaturas, los textos, la cultura de evaluación generalizada, que "pone nota" sobre la base de la capacidad de los estudiantes de dar cuenta de lo conocido, pertenecen al primero de los nombrados. La diferenciación según talentos o intereses, pertenece al segundo. ¿Cuál es el balance que nos parece adecuado?

No responder esa pregunta es ignorar que nuestros alumnos "están mirando para otro lado", no "están ni ahí" con la escuela que les ofrecemos. Que al pedir "educación de calidad gratuita para todos", están también pidiendo que definamos esa calidad.

Una cultura educacional que pone a la evaluación por sobre el cultivo de talentos. En otra parte lo llamamos "selección versus cultivo de talentos". Las pruebas nacionales, las pruebas de ingreso a la educación superior, la evaluación docente, la esperanza puesta en los procesos de acreditación y de control de la calidad, hablan de una filosofía educacional. Una filosofía que mide la calidad por los productos y resultados ***medibles***. ¿Qué hay de las condiciones, de la vida que genera esos resultados, de los medios para lograrlos?

Definitivo, el modelo educacional que queremos es un rezagado.

Podemos agregar otros. La forma en que se genera, se documenta, se transforma en recursos y se pone en práctica el currículo es otro rezagado. Con mi colega Patricio Montero pusimos en la discusión educacional, desde los años setenta, pero con mayor fuerza, en los noventa, la necesidad de generar una ***cultura de desarrollo curricular.*** Estamos muy consientes de que no hemos tenido éxito. El currículo, en esta visión, es fruto de un proceso formal de investigación y desarrollo que en etapas sucesivas crea las condiciones, los recursos y por sobre todo, el conocimiento que hace un currículo existir y optimizarse a partir de la información que genera el proceso.

La política actual en la definición del currículo, de la producción de textos y la o las formas en que estos llegan a la sala de clases, es una política que requiere una revisión profunda.

El desarrollo curricular es un rezagado más.

La falta de opciones para el estudiante chileno. Un único currículo nacional para todos y una forma de medir, también para todos, pone lo general y común, por encima del potencial individual, las necesidades y las expectativas de cada estudiante. Esto se observa en la falta de una diferenciación clara y de largo alcance en los últimos niveles de la educación secundaria, el 11° y 12°. En estos niveles estamos perdiendo mucha energía juvenil por insistir en que todos – y ahora estamos con educación obligatoria hasta el grado 12 – tengan hasta trece asignaturas. ¿Es esa la forma de preparar a jóvenes de 16 o más años para su ingreso a la educación superior, al trabajo a la vida?

La profesionalización de la carrera de profesor y la calidad de la vida – profesional y personal – del docente así como la posibilidad de proseguir estudios más allá del primer grado académico, es otro rezagado. También lo es la calidad desigual de los centros de formación inicial. La calidad de la vida de un profesional es determinante en el proceso de elección que hace un egresado de la educación secundaria. La calidad de la vida profesional y personal del docente, es un rezagado.

La vocación nacional por el conocimiento, la ciencia y la cultura, es un rezagado.

El impacto negativo de las evaluaciones de carácter nacional que por su naturaleza – pruebas estandarizadas y de selección múltiple en su inmensa mayoría – tienden a constituirse en el "currículo observado" o real, reduciendo los aprendizajes a los niveles de conocimiento y aplicación.

La Educación Técnico profesional que atiende al 46% de la matrícula en esos niveles.

El uso limitado de las tecnologías de la información de cara al potencial que tienen esas tecnologías para incorporar nuevas formas de trabajo en la sala de clases.

La falta de impacto y el desarrollo limitado de la investigación en Educación y en Educación Matemática en particular.

La inexistencia de una organización profesional de los profesores de Matemática.

La necesidad de profesores altamente calificados que formen a los futuros profesores. Y, en la sala de clases, la prevalencia casi absoluta de docentes que "cuentan el cuento de la Matemática" y preparan a sus estudiantes en vista de pruebas nacionales. Situyación a la que es aplicable la crítica de Roberto Araya:

Quizás uno de los fracasos más patentes de nuestro sistema educacional actual (...) es que prácticamente ninguno de nuestros estudiantes queda con la idea de que la matemática es el lenguaje para describir fenómenos de este mundo, ni para crear juegos/metáforas que los representen. (Roberto Araya. Inteligencia matemática. p. 75)

La educación integral, aquella en la que además del cultivo del conocimiento se desarrollan valores, sentimientos y el cuerpo, es un rezagado.

Otras miradas, otras perspectivas

La vida ha obligado a este autor a revisar el pasado de varias formas. Bruce Vogeli, del Teachers College de Nueva York, la persona que trabajó activamente en la creación del primer post grado en Matemática en Chile, La Licenciatura Matemática de la Universidad Técnica del Estado (el LAM), activó a más de treinta investigadores del área en América Latina para escribir un libro acerca de la Educación Matemática en las Américas durante los últimos cincuenta años. De hecho, el libro fue lanzado el pasado mes de octubre. Colaborar en ese trabajo fue mirar retrospectivamente el campo que nos ocupa. Esa mirada llama naturalmente a la pregunta formulada hoy nuevamente: ¿Qué nos enseña ese camino recorrido? En diciembre del 2013, hubo en Walwick, Inglaterra, un encuentro organizado por el British Council, Chile fue invitado por "ser un país que muestra un mejoramiento sostenido en los resultados de pruebas internacionales". Nuevamente la pregunta remitió al pasado reciente y al presente[4]. Un requerimiento similar provino de México, de parte de colegas que buscan una visión acerca de la enseñanza y el aprendizaje en varios países de la Región.

¿Qué nos enseña el pasado de la Matemática escolar en el país?, ¿Qué dice en relación a los temas que hoy enfrenta el campo?

Esta es una invitación a que otros desarrollen su propia interpretación del pasado y a que juntos usemos esa búsqueda para contribuir en la construcción del futuro.

Algunos hitos y posibles aprendizajes a partir de la experiencia

La escuela influye en la vida y en el futuro de la sociedad, la sociedad, las decisiones que toma y la forma en que se desenvuelve, influye en la escuela. ¿Cuáles son las decisiones, los eventos, los hitos que hicieron a la escuela del Chile de hoy? Si queremos interpretar el presente y generar un futuro mejor, tenemos que aprender de esa historia. "El conocimiento es la experiencia humana sistematizada", (E. Meehan, 1981). Lo que sigue es una selección hecha a la luz de una manera de pensar la educación. La misma forma de seleccionar y de expresar lo seleccionado, es una consecuencia sino una expresión de las hipótesis que el autor sostiene acerca de la realidad.

A continuación, una cronología rápida.

Una primera constatación apunta a los orígenes de la nación. En efecto, se puede constatar una preocupación temprana por la cultura desde los primeros pasos de la República. En 1810, Juan Egaña le presentó al Presidente de la Primera Junta de Gobierno, un plan de gobierno en que propuso: «la obra de Chile debe ser un gran colegio de artes y ciencias, en donde se imparta una educación civil y moral capaz de darnos costumbre y carácter[5]». También está presente en obra de Andrés Bello (1781, 1885). En Chile desde 1829, académico del Instituto Nacional, primero, y luego su participación en la creación de la Universidad de Chile (1842) de la que fue el primer rector. Domingo Faustina Sarmiento (1811, 1888) y su proyecto de una "educación pública, gratuita y laica". Escuela Normal de Preceptores (1842), la primera institución latinoamericana especializada en la formación de maestros. El hecho que el presidente de república, Manuel Montt, le encomendara estudiar los sistemas educativos de Europa y los Estados Unidos, hace pensar en los procesos de reforma posteriores y los actuales.

Las escuelas normales se desarrollaron en todo el país y sólo dejaron paso a la formación en centros universitarios en los años 70. Que no han sido sustituidas convenientemente y que la formación inicial docente requiere una revisión profunda

---

4"Mathematics Education in Chile: context, trends, results, and challenges", en Connecting Schools, Congreso del British Council, Walick, Ingraterra, Diciembre, 2013.

5 Es notable que el mismo Egaña, en 1811 publica a petición del Congreso una *Exposición de los principios que consolidan el pacto social de los habitantes de Chile,* en donde establece que «se establecerá en la república un Instituto Nacional para las ciencias, artes, oficios instrucción militar, religión, ejercicios que den actividad, vigor y salud, y cuanto pueda formar el carácter físico y moral del ciudadano».

en un marco nuevo para esa "Educación pública gratuita y laica" a la altura y en consonancia con el momento que vive el país, es una de las hipótesis que sostiene este autor al final de estas páginas.

Un paso decisivo se dio en 1889 con la creación del Instituto Pedagógico. Las escuelas normales formaron profesores para la enseñanza elemental. El Instituto Pedagógico nació para hacer lo mismo en el nivel secundario. Se contrató treinta profesores alemanes con nivel de doctor, quince eran matemáticos. Hasta los años 60, la formación de profesores de matemática y el currículo nacional de Matemática fue el que definieron esos profesionales. Textos de aritmética, álgebra y geometría como los de Francisco Pröshle Ricardo Pöenish, fueron "la definición operacional del currículo Matemática en las escuelas chilenas" (Rojas y Oteiza 2014).

El "Estado Docente" fue la política educacional desde mediados del siglo XIX hasta los años sesenta. "Gobernar es educar" es una afirmación clave de la política fue una declaración del Presidente de la República, Pedro Aguirre Cerda 1938 al 1941. Una línea interesante para comprender el desarrollo de la educación matemática en Chile se refiere a la preocupación por la formación técnica. En 1905 se creó la Escuela de Artes y Oficios, en 1961, la Universidad Técnica del Estado. Nuevamente, en la base de esta modalidad de educación, el país pidió la colaboración del Viejo Mundo, esta vez fueron técnicos de varias nacionalidades europeas, pero mayoritariamente de Italia. Lo que trajeron son las bases de la formación de técnicos en ramas industriales como la metalurgia, la forja, el torno, la fresa y los procesos productivos. Su impronta marcó la ruta de una rama de la educación que atiende a cerca del cincuenta por ciento de la población escolar en su nivel medio. Los profesores de Matemática fueron principalmente ingenieros y le dieron un carácter a la Matemática en el nivel superior, influyendo notablemente en la formación de los profesores de educación secundaria, que, en su mayoría, fueron formados en Matemática y en Física.

Un hito con profundas consecuencias se incubó en la post guerra, en los años cincuenta en el mundo y con impacto en Chile durante el decenio siguiente, el movimiento de la "Matemática Moderna". En el país, coincide con la reforma de 1958, que tuvo múltiples "primeras veces" en la cultura educacional chilena. Conceptos como "currículum", "planeamiento", "modelo curricular" – el de R.Tayler, en este caso – "consulta nacional para la adopción de decisiones educativas", "orientación escolar", "decisiones con base en la investigación", entre otras, se pusieron en práctica y llegaron al sistema educativo y las escuelas de educación. El Centro de Perfeccionamiento e Investigaciones Pedagógicas fue creado en ese período. La sola descripción de esa reforma requiere de un espacio similar al de este capítulo. Un impacto imposible de no mencionar es el de la expansión del sistema educativo, que fue cercana a un cincuenta por ciento en pocos años, con las consecuencias de una tal expansión en infraestructura, de una parte, en la calidad que mostró una baja debido a la falta de profesores calificados y la imposibilidad de implementar un sistema eficaz en la gestión, la puesta en práctica de las innovaciones y supervisión del sistema expandido.

En la Matemática escolar, los cambios fueron marcados. Para comenzar, de un currículo escolar definido por tres textos, los mencionados en Aritmética, Álgebra y Geometría, productos de la misión alemana de fines del siglo anterior, y por los profesores, principalmente egresados del también mencionado Instituto Pedagógico de la Universidad de Chile, se pasó a un currículo con planes y programas que seguían de cerca las propuestas del Grupo Bourbaky y la interpretación hecha en los EE.UU. traída a América Latina por une quipo liderado por Marshal Stone. Se pudo conocer a investigadores de europeos y americanos, especialistas de los institutos de investigación IREM[6] franceses e innovadores como Zoltan Dienes, apoyaron programas especiales para docentes y alumnos universitarios avanzados. Toda una efervescencia en torno a la Matemática y su enseñanza. Este autor no puede ser imparcial en este tema. Coincidió con su iniciación como profesor en el nivel medio y esa experiencia fue determinante en todo el desarrollo posterior como profesional. Lo que pasó después, es la misma historia que en el resto del mundo. La propuesta era más de lo que la sala de clases y la profesión podía hacer. Unos pocos años más tarde, la Matemática en Chile adoptó algo parecido al "back to basics" del hemisferio norte de América y la "Matemática Moderna" dejó el recuerdo de "cuando se le enseñaba conjuntos" a los niños y algunos signos reconocibles en textos y prácticas escolares, la noción de función, las inecuaciones, entre otros temas inexistentes en los currículos escolares hasta esa década. También un horror a los formalismos y a la demostración. Para el sesgo de este autor en la evaluación de ese período, vea una nota, al final del artículo.

El "bajón" de los setenta. El miedo a la Escuela Nacional Unificada, el fin de las escuelas normales. En Matemática, el fin de la Matemática Moderna, el refugio en lo conocido: "Back to basics" y las primeras pruebas nacionales.

Comienzo de los ochenta, la depresión del 82 y la "salida de la Universidad" de la formación inicial docente. La regionalización de las sedes de las universidades estatales en esas regiones y la "municipalización", la descentralización de la administración de escuelas y liceos.

> Durante los años 80, Chile emprendió uno de los más formidables experimentos en materia de política educacional que se conozcan en el mundo: reformó a escala nacional su sistema escolar para orientar su funcionamiento por una lógica de mercado. La radicalidad de esta reforma, que en pocos años terminó con el sistema escolar basado en el Estado Docente –que el país había construido desde mediados del siglo XIX–, es asombroso. (Bellei, 2010, pp. 14 y 15)

Impresiona la afirmación rotunda de Cristián Bellei: "uno de los más formidables experimentos". Al observar la conmoción que provoca la reforma en curso, Poner en la misma escena lo que sucedió en los años 80 y lo que se busca hoy, confirma lo afirmado por Bellei, se trata de movilizar un cambio muy profundo.

La medida que decretó a la pedagogía como carrera no universitaria es también de esa época. El Instituto Pedagógico, de larga tradición y de enorme prestigio en el resto de América, fue separado de la Universidad de Chile. La medida afectó a las escuelas de educación de las universidades estatales. Muy particular es lo que sucedió con la Escuela de Educación de la Universidad Católica. En efecto, muchos pensamos que tomaría el lugar dejado por el Pedagógico. Allí actuó otro fenómeno, las verdaderas "placas tectónicas" que debilitan y hacen templar la profesión docente, la disputa sorda pero potente entre los campos profesionales que – idealmente y en algunos

6 Institutos de investigación en la enseñanza de la Matemática en Francia.

momentos de la historia del país así fue – deben concurrir para la formación acabada de un docente. Científicos, las especialidades en ciencias, lengua, economía, entre otras y las especialidades en educación. El Pedagógico de la UC, dejó de tener alumnos propios debilitando en forma notable su influencia en los próximos decenios. Esa fue una decisión desde la cúpula intelectual que dirigió, en esos momentos esa casa de estudios.

Muy diferente a lo que observamos hoy, una escuela de educación íntimamente relacionada con un centro de investigación de alto nivel y un programa de doctorado reconocido y con varios años de producción.

Durante los setenta y los ochenta la investigación y la creación de innovaciones en educación se refugiaron en los ONG u otros espacios, varios de ellos al alero de la Iglesia Católica. El CIDE, el PIIE, entre otros, reunieron a investigadores y profesores inquietos, en ellos se incubó el proceso de reforma de los años noventa.

La Sociedad Chilena de Educación Matemática se inició en ese período, su primara sesión se realizó el 22 de abril de 1982, en el campus de la Universidad de Santiago.

Durante los primeros años del gobierno democrático los cambios que necesitaban el sistema educativo fueron objeto de una política de “Mejoramiento”. Las reformas se iniciaron en los años noventa. Y, fueron sostenidas por espacio de más de veinte años. Un fenómeno que se ha mantenido con poca variación que estuvo en el origen de esas reformas es la dura y plena constatación de que los indicadores de aprendizaje nacionales, las pruebas Simce, en particular, no mostraban ni muestran los mejoramientos esperados. La escuela cambia lentamente, un sistema educativo tiene más inercia aún.

El currículo ha cambiado, se ha distribuido textos, recursos que pueblan los CRA de escúrelas y liceos, Enlaces ha generalizado el uso de las tecnologías digitales en todos los establecimientos escolares del país, se ha generado estándares, para aprendizajes y para docentes, el Simce. La lista es larga, casi no hay aspecto de la escuela o de la vida en su entorno, que no fuera abordado por las sucesivas acciones de reforma. .

Las condiciones y la vida en escuelas y liceos ya no es la misma. El impacto de esos veinte años cambió el escenario de la educación nacional y puso las condiciones para un cambio aún más profundo que se gesta en estos momentos.

Algunos de los rezagados a la luz de las lecciones de la historia

En esta sección se hace lo anunciado, interpretar algunos de los temas complejos y rebeldes, los que han resistido o que requieren nuevas miradas y nuevas acciones. Una vez que nuevamente se abra lo que va dentro de la búsqueda de “educación de calidad”, estos temas estarán allí, esperando debida atención.

La profesión docente ha disminuido notablemente su estatus en la sociedad en los últimos cincuenta años. En parte se explica por la expansión del sistema y la naturaleza del proceso de desarrollo que ha experimentado el país, notablemente economicista y centrado en la producción y no en el conocimiento, la ciencia. Muy lejos del ideal planteado por Egaña en 1810:

"la obra de Chile debe ser un gran colegio de artes y ciencias, en donde se imparta una educación civil y moral capaz de darnos costumbre y carácter". Pero, además, podemos agregar la siguiente hipótesis explicativa:

La formación inicial docente no ha podido, en el país, sustituir a las escuelas normales en la educación elemental y que en el nivel de la educación secundaria, la ley que definió como "no universitaria" a las carreras de pedagogía, junto a la medida que terminó con el Instituto Pedagógico de la Universidad de Chile y las escuelas de educación asociadas a las sedes de esa misma universidad y de la Universidad Técnica del Estado, tuvo un efecto negativo en la profesión docente, que al día de hoy no ha parado de afectar la calidad del sistema de educación nacional, en general y a la profesión docente en particular.

Se puede agregar la mirada siguiente. La profesión de profesor debe profesionalizarse para tener el lugar y lograr lo que le es propio. Se trata de un complejo proceso social. En efecto, Es reflejo y causa de una sociedad sin la necesaria complejidad. Sociedad en la que diversos actores cumplen roles que completan, matizan, enriquecen las decisiones gruesas y significativas que, en una sociedad más simple, con menos energía interna, son asumidas por pocos actores, muchas veces sólo los empoderados por la autoridad política. En la medida que organizaciones culturales, científicas y profesionales, adquieran conocimiento con base en la investigación y la creación de alto nivel. En la medida que esos actores tengan peso en las decisiones que afectan a todos los ciudadanos, esas decisiones tendrán mayor valor y los miembros de la sociedad – los profesores, por ejemplo - podrán tener un lugar relevante.

En esta construcción, y a la luz de la historia, reconstrucción del rol del profesor en la sociedad, señales recientes son promisorias. En el escenario de la matemática escolar en el país, hay nuevos actores que, con base en el conocimiento, están contribuyendo a una nueva generación de especialistas en el campo. Haciendo referencia a las "placas tectónicas" que en nuestro caso son las de la Matemática docta y la Matemática escolar, es promisorio la convergencia de nuevos especialistas, en ambos campos, que con base en el conocimiento trabajan por una Matemática de calidad para todos.

En la falta de alternativas curriculares, la misma formación de docentes, la no diferenciación en los últimos dos años de educación secundaria, la insuficiencia en la investigación en educación y el retraso en disponer de propuestas curriculares técnicamente desarrolladas y evaluadas, la mirada desde la historia sugiere la siguiente pregunta…

¿Cuál es la autocrítica que debemos hacernos desde las universidades en cuanto al rol desempeñado en la política pública? Es un hecho que las universidades siempre han influido en ese dominio. ¿Podemos aceptar algunas falencias?, algunas áreas en las que la contribución de la universidad no ha estado a la altura de las decisiones que le dan forma y sentido a la educación en la actualidad. La autoridad política, a través del Ministerio de Educación, no ha tenido ni el contrapeso ni el peso del conocimiento y la información de calidad y avanzada que las universidades podrían ofrecer. ¿Porqué las universidades han formado profesores generalistas para los ocho niveles de la educación básica? La única respuesta es que se acomodaron a la política y no investigaron, no miraron lo que hacen otras naciones y durante más de treinta años, los docentes que enseñan, por ejemplo, Matemática, en los niveles de quinto a octavo básicos, que requieren de una formación fuerte, no la recibieron. Esto es, las universidades siguieron la política y no la revisaron críticamente para compensarla con los docentes que el sistema requiere. Algo semejante ha sucedido con los textos, los recursos y otras formas de plasmar el currículo.

Está en la esencia de la universidad el estar en la vanguardia. La historia reciente nos muestra que esto está cambiando. Los ejemplos de los que sucedió con Enlaces y las contribuciones de diversos centros universitarios a lo largo del país, la existencia de programas con nivel de doctorado, en esa área, los aportes del doctorado en Didáctica de la Matemática de la Universidad Católica de Valparaíso y el trabajo desarrollado por el Centro de Modelamiento de la Universidad de Chile, muestran que la investigación y el conocimiento avanzado contribuye en el presente y más en el futuro cercano del sistema educativo. El proceso de reforma iniciado a comienzo de los noventa ha potenciado a investigadores y centros de alta complejidad en las principales universidades del país. El potencial de lo que allí ha sucedido es enorme y apunta hacia una sociedad más compleja, con actores informados, con voz y con obra.

Hubo un momento en la historia del país que la Matemática y la educación le ofrecía una plataforma fuerte a los profesores. ¿Puede una generación de especialistas en Didáctica y en Matemática, que actuando en forma coherente generen en Chile generaciones de profesores altamente profesionales? Hay signos de que la respuesta es positiva y que está actuando.

Es indispensable complejizar el pensamiento que orienta las decisiones en educación. Sólo con actores informados, con base en conocimiento validado por la investigación, transformado en realidades probadas mediante el proceso técnico que une la investigación y el desarrollo, se elevará la calidad de esas decisiones, la calidad de las propuestas curriculares, la calidad de los textos y recursos y de cada componente del sistema educativo.

La escuela influye en la vida y en el futuro de la sociedad, la sociedad, las decisiones que toma y la forma en que se desenvuelve, influye en la escuela. Recíprocamente, la sociedad tiene su responsabilidad al potenciar la ciencia, la cultura y los actores que las cultiven y transformen en ofertas para todos. ¿Cuáles son las decisiones, los eventos, los hitos que hicieron a la escuela del Chile de hoy? ¿Cómo se proyecta esa historia en el camino que nos corresponde construir?

Para cerrar

Como se afirma en la introducción, esta no es historia, es simplemente un intento de observar el presente a la luz de algunos de los hitos más salientes del proceso que ha generado nuestra escuela de hoy. Es una visión personal totalmente signada por la experiencia de quién escribe. Es también una invitación a que visones diferentes, con otras interpretaciones y otras energías, construyan juntos un pensamiento educativo con la fuerza de ofrecer mejores oportunidades de aprendizaje a los niños, niñas y jóvenes que así lo esperan.

El país tiene una larga y potente tradición de educación. Un esfuerzo sostenido durante doscientos años ha generado lo que somos hoy. Las enseñanzas de ese proceso nos ayudan a comprender y a generar mejores condiciones para un futuro mejor. Las condiciones han cambiado profundamente, también son profundos los cambios y la variedad de nuevos actores. Nuevas condiciones y y nuevos actores con profesionalismo, información y conocimiento hacen pensar en una sociedad mejor, más justa y con posibilidades para muchos.

Un desafío central para lograr educación de calidad para todos está en la existencia, capacidad y dedicación de los actores que hacen la educación, los centros de formación docentes, los programas para graduados, los centros de investigación y desarrollo, docentes de docentes, investigadores, sociedades científicas y profesionales y, naturalmente, los profesores. El desafío de las generaciones actualmente activas en educación es el logro de una sociedad más compleja, con más y mejores actores construida con los aportes de diferentes filosofías, posturas, niveles e instituciones.

Gracias.

Referencias

Araya, Roberto. (2001). Inteligencia Matemática. Santiago-Chile: Editorial Universitaria.

Bellei, Cristián, (2010). "Evolución de las Políticas Educacionales en Chile (1980 – 2009)". En Bilbao, Alejandro y Salinas, Álvaro. El Libro Abierto de la Informática Educativa, Lecciones y Desafíos de la Red Enlaces.

Meehan, Eugene. (1981). Reasoned Argument in Social Science. London: Greenwood Press.

Rojas, Eliana y Oteiza, Fidel (2014). CHILE: "The Context and Pedagogy of Mathematics Teaching and Learning", en H. Rosario et al. (Eds.),Mathematics and its teaching in the Southern Americas (pp.381-402). Singapore. World Scientific Publishing.

Generalización como estrategia cognitiva para el aprendizaje en técnicas de conteo

Alejandro Nettle Valenzuela, Isabel Maturana Peña, Marcela Parraguez González
Universidad de Playa Ancha, Chile; Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
anettle@upla.cl, isamatup@hotmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl
Superior, Aprendizaje Matemático.

Resumen

Basados en la teoría APOE (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros, Weller, 2014), proponemos para este taller: una descomposición genética como modelo interpretativo de estrategias cognitivas para el aprendizaje de los procesos de generalización —en tres situaciones de conteo a partir de configuraciones figurales—, y una construcción como propuesta de enseñanza con el propósito de modelar la problemática de aprendizaje referida a las técnicas de conteo. Mostraremos algunos de los resultados obtenidos con nuestra propuesta aplicada a estudiantes de educación secundaria y superior.

Introducción

Con el propósito de modelar la problemática de aprendizaje referida a la generalización en técnicas de conteo, y usando como referente teórico la teoría APOS (Arnon et al., 2014). Diseñamos una descomposición genética general para tres situaciones en las que la generalización del conteo ofrece características particulares de construcción, las que facilitan la reconstrucción de las estrategias cognitivas inmersas en el conteo.

Algunas de las evidencias obtenidas —sobre las problemáticas de enseñanza aprendizaje en relación a las estrategias de conteo— dan cuenta de la existencia de un problema de coordinación entre el conteo y el cardinal, y así surgen propuestas como la de Salgado y Trigueros (2009), diseñaron y analizaron una propuesta didáctica basadas en el ciclo de enseñanza de la teoría APOS.

El Ministerio de Educación de Chile a través de los Planes y Programas incorpora el estudio del conteo desde los primeros años de la educación formal chilena. Por otra parte; en la mayoría de las asignaturas del sistema terciario de educación chileno que consideran tópicos de álgebra, también incorporan el conteo como parte fundamental de éstas.

Teoría APOS.

Desde el punto de vista de la teoría APOS la construcción del conocimiento pasa por tres etapas básicas: acciones, procesos y objetos, las cuales no necesariamente son secuenciales. Una acción consiste en una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos a seguir. Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso, es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción en la mente del individuo, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Un individuo que tiene una concepción proceso de una transformación, puede reflexionar sobre ésta, describirla, o incluso revertir los pasos de la transformación sin realizar dichos pasos. Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto.

Diseño metodológico.

La experiencia se desarrolló como un estudio de casos (Stake, 2010) insertos en el período académico Primer Semestre del 2014, con estudiantes correspondientes a un grupo heterogéneo de primer año de la carrera en pedagogía y licenciatura en matemática en dos universidades chilenas.

La descomposición genética.

Proponemos el siguiente modelo de descomposición genética para la construcción de una técnica de conteo específica relacionada con problemas que requieran de representaciones figurales. Comenzaremos la descripción de la construcción considerando, la concepción mental acción como motor para la descripción de una estrategia de conteo, las acciones se realizan sobre las construcciones mentales objeto de regiones poligonales y de los números naturales, donde una construcción mental esquema tematizado del concepto sistema referencial, contiene a ambos objetos. Todos ellos son coordinados mediante una función inyectiva, que organiza el conteo iniciado; para continuar la repetición de estas acciones bajo variaciones controladas, permitiendo establecer lo invariante, como una construcción mental proceso, las que se transforman en concepciones mentales procesos generalizados mirados como un todo, técnicamente sustentado por APOS como un Totality, que se encapsulan en un objeto que se rotula mediante una conjetura explícita.

La propuesta.

Los evidencias que hemos obtenido confirman las problemáticas subyacentes en el aprendizaje de estrategias de conteo y sus generalizaciones; por esta razón separamos en tres situaciones los procesos de generalización: dos con una apariencia análoga basados en el conteo sobre geoplanos donde las estrategias de generalización tienen dos sentidos opuestos, uno mediante la incrustación sistemática de figuras para la construcción de la generalización y el otro, donde la generalización se obtiene de separar la totalidad externa de lo interno, para finalizar con una propuesta de conteo, donde su sencillez oculta los obstáculos en la simplificación necesaria para obtener la fórmula clásica de conteo.

Sostenemos como hipótesis en la formulación de este taller, que las tres situaciones que presentamos permiten la manipulación de objetos mediante la visualización, e incorporamos la teoría APOS para identificar e interpretar las estructuras cognitivas involucradas en los procesos de generalización, las que ayudan a entender cómo contamos. En nuestro caso es mediante acciones sobre objetos matemáticos que describiremos en detalle, los que ayudaran a describir y construir la generalización como fundamento del conteo.

Las Actividades y su diseño.

Polígonos con Vértices en un Geoplano. El Geoplano fue inventado por el matemático y pedagogo egipcio Caleb Gattegno (1911-1988) para enseñar geometría a niños pequeños. Consiste en una superficie plana en la que se dispone, de manera regular, una serie de puntos. Dependiendo de cómo estén colocados estos puntos se distinguen varios tipos de Geoplanos, aunque los que más se utilizan son el Geoplano triangular, el cuadrado o cuadrangular y el circular.

Presentación de las actividades con geoplanos.

Un geoplano de malla cuadrada es una configuración rectangular de puntos de formas como las siguientes:

```
* * *
* * *
* * *
```

El geoplano de la figura es del tipo 3x3 (3 filas y 3 columnas). En estas actividades nos limitaremos a trabajar con geoplanos de malla cuadrada.

Situación 1.

Primer Desafío

Investigue cuál es el polígono de mayor cantidad de lados (o vértices) que pueden dibujarse, si los vértices son puntos de un geoplano de malla cuadrada de tipo $n \times n$, con $n \in$ ¥, $n \geq 2$.

Segundo Desafío

Demuestre su descubrimiento por inducción.

Evidencias obtenidas de la Situación 1

Presentamos el primer desafío a estudiantes de un establecimiento educacional chileno con edades entre 17 y 18 años, y sus respuestas, se transformaron en hacer varios intentos de dibujos para diferentes geoplanos de un mismo orden, y después proceder a contar sus lados, y ver cuál es el óptimo, por ejemplo, en la figura 1 se ilustra la situación:

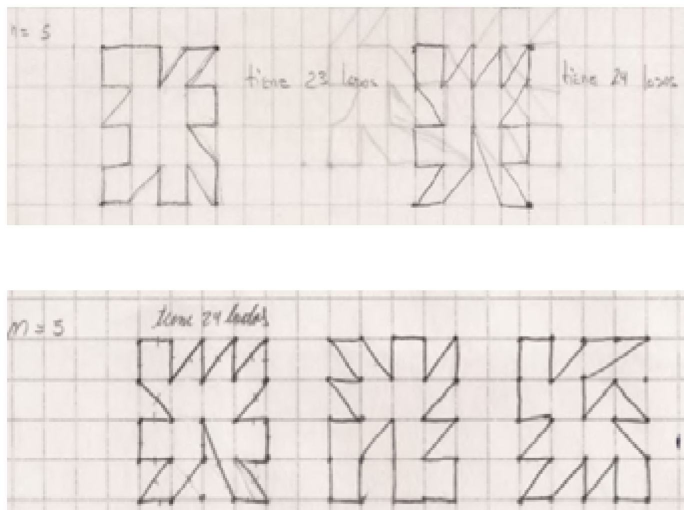


Figura 1. Respuestas de los estudiantes del caso 1.

Sin embargo, en este grupo de estudiantes no logramos obtener evidencias que incrustaran una figura dentro de otra, como por ejemplo:

Figura 2.

Supongamos que para un geoplano de n=3 tenemos la siguiente figura 2, la cual la podemos incrustar en un geoplano de n=7 , obteniendo la figura 3.

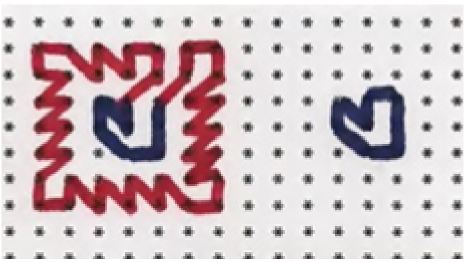


Figura 3.

Esta forma de proceder de los estudiantes hizo que no alcanzaran una demostración por inducción. Por ello proponemos un trabajo en etapas, desde la teoría APOS para el Taller, de tal forma que los asistentes alcancen la demostración por inducción de la conjetura que se proponga.

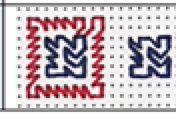
La Propuesta desde la perspectiva teórica de APOS.

Se propone completar las siguientes tablas.

Tabla 1. Desarrollo de la actividad del taller a partir de construcciones mentales acciones.

Para n=2		Polígono de 4 lados
Para n=4		
Para n=5		Polígono de 24 lados

Tabla 2. Desarrollo de la actividad a partir de construcciones mentales procesos que se encapsulan

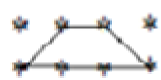
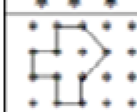
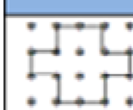
Para n=6 Para n=7 Para n=8		Polígono de 47 lados Polígono de 64 lados
Para n=9		

Situación 2.

Primer Desafío

Complete la siguiente tabla 4 y responda las preguntas que aparecen al final de ella.

Tabla 3. Completar la información faltante.

FIGURA	NÚMERO DE PUNTOS	ÁREAS
	3	1/2
		2
	9	
	12	5
		
	10	
	8	4
	14	
	13	8

¿Existe relación entre el número de puntos interiores del polígono y su área?

¿Existe alguna relación entre el número de puntos en el geoplano y el área de un polígono?

Podría explicar.

Segundo Desafío

Encuentre todos los polígonos de área ½ en un geoplano de 5 x 5 puntos.

Evidencias obtenidas de la Situación 2.
Se realizó la experiencia con estudiantes universitarios y las evidencias obtenidas dan cuenta que no lograron establecer en forma explícita la fórmula de Pick, no obstante, lograron dar respuesta a lo concreto, esto es las acciones pedidas fueron realizadas en forma adecuada, por ejemplo en la figura 4 es una evidencia de ello:

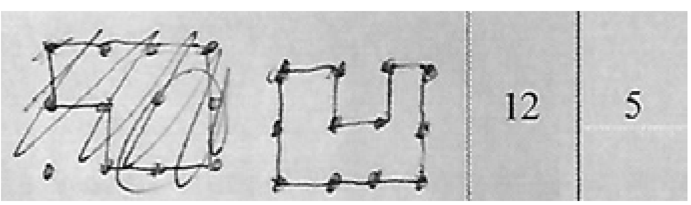


Figura 4. Respuesta de un estudiante en el llenado de la tabla.

Podemos concluir que, en ambos casos no se dio pie a los procesos de generalización necesarios para la construcción de la fórmula de Pick.

En la figura 5. Es posible apreciar la estrategia, de un estudiante, para dar respuesta a una de las preguntas, la que no alcanza para argumentar.

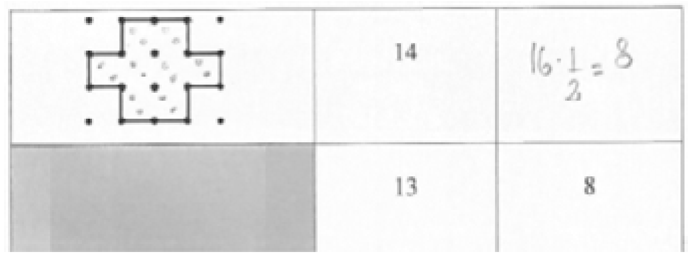


Figura 5. Producción de estudiante en el llenado de la tabla.

El Problema y su análisis: el Área en un Geoplano - Teorema de Pick.

Basados la propuesta de Verdugo, Briseño, Vázquez, Palmas (2000) sobre el teorema de Pick; donde, desarrollan estrategias didácticas para la construcción de la fórmula de Pick con el propósito de aproximar el área de regiones poligonales sencillas. En su estudio realizan procesos de generalización en la búsqueda del teorema de Pick, por esta razón estudiamos los procesos dispuestos como un antecedente para nuestro modelo, la Descomposición Genética.

En este caso trataremos en el geoplano, el concepto de área de figuras poligonales, en particular lo que se denomina la fórmula de Pick. La fórmula de Pick relaciona el área de un polígono simple cuyos vértices tienen coordenadas enteras con el número de puntos en su interior y en su borde. Existen dos versiones de ella, la primera relaciona sin puntos en el interior y la segunda con puntos en el interior.

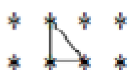
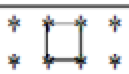
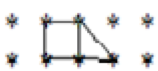
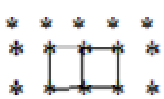
Sea B el número de puntos en el borde del polígono, entonces el área A del polígono se puede calcular a partir de la fórmula: $A = \frac{B}{2} - 1$

Pop otra parte, al considerar puntos interiores se tiene que: Sea i el número de puntos interiores del polígono y B el número de puntos en el borde del polígono, entonces el área A del polígono se puede calcular a partir de la fórmula:

$$A = i + \frac{B}{2} - 1$$

Una descripción en términos que facilite su construcción como un proceso recursivo de generalización, para ello la descomposición genética propuesta a partir de acciones sobre ciertas construcciones mentales objeto estará dirigida por las siguientes preguntas: ¿Cuál es el área de un polígono de n puntos en la orilla y ninguno al interior? ¿Cuál es el área de un polígono de n puntos en la orilla y m en su interior?

La Propuesta desde la perspectiva teórica de APOS.

Figura	Número de puntos	Área
Por ejemplo 	3	1/2
	4	
 	5 6	
…	…	…
	n	

Situación 3.

El Desafío

Considera la siguiente situación.

En el siguiente modelo de circunferencia verde, se posiciona una ficha azul alrededor de ella, como aparece en la figura.

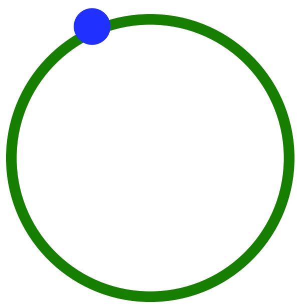


Figura 6. La situación

Pregunta 1.- ¿De cuántas maneras puedes posicionar esta ficha?

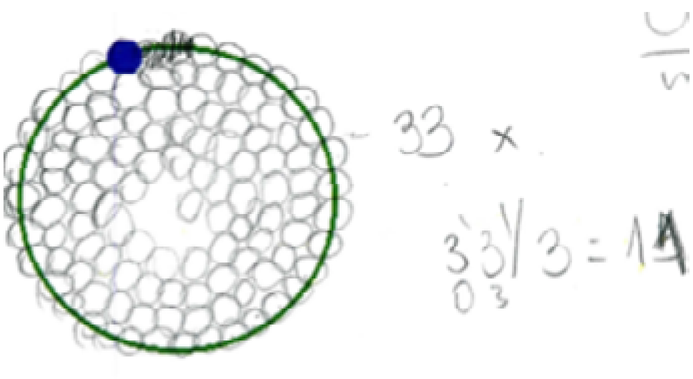
Pregunta 2.- Si, en la situacion anterior consideramos dos fichas, ¿De cuántas maneras puedes posicionar estas fichas?

Pregunta 3.- Completa la siguiente tabla.

Número de Fichas	De cuántas maneras puedes posicionar estas fichas?
1	
2	
3	
.	
n	

Evidencias obtenidas de la Situación 3.

Se planteó el desafío anterior a estudiantes universitarios de Primer Año, sin que hayan tenido una aproximación anterior al tema, ellos evidenciaron en sus respuestas, elementos externos a las variables matemáticas adecuadas para resolver el problema, entre las cuales se encuentran: problemáticas de abstracción de los elementos en juego, como considerar las cualidades físicas de los objetos a posicionar (tamaño, espesor, etc), problemas con el sistema referencial. Un ejemplo de ello se aprecia en la figura 7, los estudiantes que respondieron de esta forma:



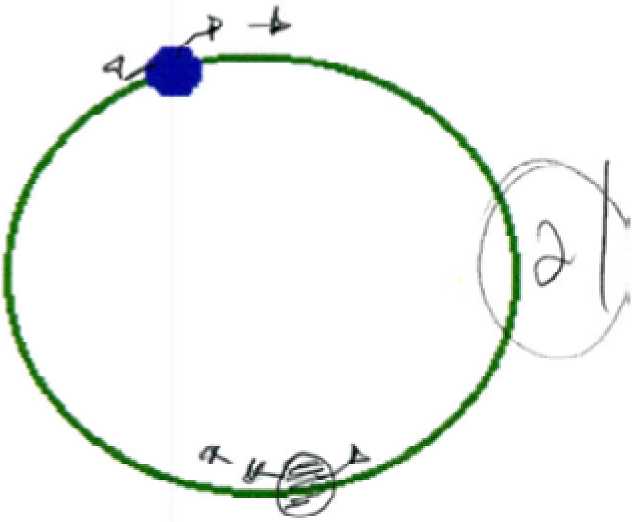


Figura. La situacion

Figura 7. Producciones de los estudiantes

Constituyen una evidencia de las problemáticas antes señaladas, desde la Descomposición genética, podemos decir que la construcción mental de sistema referencial no es un esquema.

El Problema y su análisis.

El objetivo de esta actividad es proponer el análisis de una situación de elementos ordenados y permutados en un contexto circunferencial.

En este campo, sus particularidades y restricciones respecto de sus métodos y objetos de estudio. Específicamente; el problema está asociado al conjunto de los números naturales y axiomas de Peano, y a un clásico problema de conteo que considera establecer ordenamientos y permutaciones. La permutación puede estar referida a un arreglo con ordenamiento rectilíneo o, alternativamente, circular. Se considera que una permutación circular es una permutación que se aplica a conjuntos ordenados sobre una circunferencia, es decir, que no tienen principio ni final. Así; el uso de la noción de orden en este contexto matemático exige depurar el contexto distinguiendo sólo los elementos que son pertinentes al problema, lo que tensiona su resolución, y entonces surge una problemática que puede ser abordada desde la didáctica.

El problema que hemos establecido en este taller es un clásico dentro de las unidades que tratan el saber asociado al conteo en matemática discreta, y hay diferentes registros de ello:

Siete muchachos forman una ronda. ¿De cuántas maneras distintas se pueden colocar en círculo?? (Vilenkin, 1972: p. 26).

Si seis personas, designadas como A, B, C, ... , F, se sientan entorno de una mesa redonda, ¿cuántas disposiciones circulares diferentes son posibles, si las disposiciones se consideran iguales cuando una puede obtenerse de la otra mediante una rotación? (Grimaldi,1997: p. 11).

....

Encuentre las m formas en que 7 personas pueden sentarse: a) En una fila de sillas; b) alrededor de una mesa redonda (Lipschutz, 2009: p. 98)

Entonces; el desafío se plantea para obtener el número de arreglos diferentes en que puede(n) posicionarse 1, 2, 3, 4, ..., n objetos alrededor de un círculo, sin que importe la posición absoluta de los objetos en círculo, advirtiendo la posición relativa entre los objetos, es decir, dos permutaciones circulares serán iguales si la posición relativa entre los n objetos es la misma, aunque la posición absoluta entre ellos sea diferente.

En este caso, el enfoque APOS otorga una base teórica para analizar la forma en la que se construye los conceptos matemáticos para estudiar cómo evolucionan.

A modo de conclusión.

El desarrrollo de este taller -a través de estas tres situaciones- permite construir un modelo explicativo de los procesos de generalización como estrategia cognitiva para el aprendizaje de técnicas de conteo mediante una descomposición genética, que desde acciones sobre construcciones mentales objetos posibilitan la generalización.

Referencias

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). APOS Theory. New York: Springer.

Grimaldi, R.P. (1997). Matemáticas Discreta y Combinatoria. México: Addison Wesley Iberoamericana, S.A..

Lipschutz, Seymour (2009). Matemáticas Discreta. México: McGraw Hill.

Salgado, H., Trigueros, M. (2009). Conteo: una propuesta didáctica y su análisis. Educación Matemática, 21 (1), pp. 91-117.

Stake, R.E. (2010). Investigación como estudio de casos. Barcelona: Labor.

Verdugo, Julieta; Briseño, Luis; Vázquez, Rita; y Palmas, Oscar; (2000). Área de figuras en el geoplano. [en línea]. México: Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias / UNAM, Septiembre de 2014. Disponible en: <http:// www.cneq.unam.mx>.

Vilenkin, N. (1972). ¿De cuántas formas?: Combinatoria. Moscú: Editorial MIR.

Modelo multidimensional de la conceptualización de las fracciones en 4º grado

Raimundo Olfos, Tatiana Goldrina, Soledad Estrella
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.
Raimundo.olfos@ucv.cl
Nivel básico, aprendizaje matemático

Resumen

A partir del estudio de los avances y logros de alumnos de cuarto básico (n=1532), se analizó la pertinencia de un modelo multidimensional para explicar la conceptualización de las fracciones. Los hallazgos muestran que el modelo es consistente con los datos y que las categorías de la conceptualización son pertinentes para explicar la conceptualización de las fracciones.

Palabras Claves: Conceptualización de las fracciones, teoría de campos conceptuales,

Introducción

El presente estudio se enfoca en el aprendizaje de las fracciones como la conceptualización de un objeto matemático, en el marco de los aportes teóricos de Vergnaud (1990), Sierpinska (1994), Pirie y Kieren (1994) y Gallardo y González (2006). Vergnaud identifica la representación semiótica como una dimensión del concepto, junto a los invariantes sobre los que reposa su operacionalidad y a las situaciones en que emerge el concepto. La teoría de Pirie-Kieren destaca el aspecto dinámico de la conceptualización en matemáticas, siempre en construcción; que parte desde un saber primitivo e integra conocimientos previos, imágenes, abstracción de cualidades y niveles superiores de metacognición, estructuración e invención. Sierpinska (1994) desarrolla un enfoque dialéctico, que incluye preconcepciones y esquemas de pensamiento, bajo los cuales la comprensión de los objetos matemáticos por parte de los alumnos corresponde a la superación de los obstáculos epistemológicos subyacentes. Gallardo y González (2006), subsumen las categorías citadas al plantear cinco dimensiones para caracterizar la conceptualización: "origen", "funcionamiento", "evolución", "factores" y "efectos". La dimensión origen hace referencia a las situaciones y circunstancias responsables de la aparición de la comprensión, y acontecimientos concretos previos generadores de tales situaciones. La dimensión funcionamiento, se vincula tanto a las conexiones internas del sujeto con el conocimiento matemático, como a las representaciones externas que para Vergnaud (1990) constituyen parte de la conceptualización. La dimensión evolución se refiere a la faceta dinámica de la comprensión, esto es, al aspecto de permanente crecimiento que caracteriza a la comprensión en matemáticas (Pirie y Kieren, 1994; Kieren, Pirie y Calvert, 1999). La dimensión factores hace referencia a los aspectos condicionantes de la comprensión, tales como las capacidades cognitivas generales del sujeto y la valoración personal que éste realiza sobre el objeto (Sierpinska, 1994). La dimensión efectos se refiere a los resultados o productos de la comprensión del sujeto, por ejemplo, los comportamientos adaptados y la resolución de problemas, como también a efectos internos como nuevas estructuras cognitivas semánticas resultantes de un cambio en la comprensión.

Sobre la base de los antecedentes expuestos, la Tabla 1 presenta categorías para cuatro dimensiones de la conceptualización, proveyendo el marco a utilizar en este estudio para medir el nivel de aprendizaje en cuanto nivel de conceptualización de las fracciones en 4º grado de primaria; tema reconocidamente difícil, tanto en la literatura como en los informes de resultados de pruebas nacionales (SIMCE) e internacionales (TIMSS). Cabe hacer notar que la conceptualización es un proceso en permanente construcción, propiedad que es rescatada por la dimensión evolución.

Tabla 1

Dimensiones y categorías para la conceptualización de las fracciones

Dimensión	Descripción	Categorías
Origen	Situación que exige respuesta adaptada	- División - Medida
Representación	Símbolos que ligan a la representación interna	- Lenguaje natural - Pictórico (con y sin unidad de medida) - Numérico (fraccionario y uso de coma decimal)
Evolución	Fases asociadas a niveles de comprensión	- Pre noción: Repartición equitativa, las partes forman todo. - *En la noción:* Equi-partición, parte todo, reversibilidad -*Noción profunda*: Posición en la recta, número abstracto. - *Más allá de la noción:* Complemento, uso de coma decimal, relación cm. y mm., orden.
Efectos	Descripción de acciones o solución de problemas	- Identificación de conceptos en juego. - Aplicación en la resolución de problemas.

El estudio distingue entre el logro –que alcanzan los alumnos al finalizar el periodo escolar–, y el avance –ganancia desde los conocimientos iniciales a los finales. Las preguntas centrales

a) ¿cuál es el nivel de avance y el logro alcanzado por los alumnos en la conceptualización de las fracciones?
b) ¿Cómo se manifiestan los avances y logros en función de las distintas dimensiones de la conceptualización de las fracciones?

Metodología

Diseño y variables

Se implementó un diseño no experimental, expo-facto, que distingue las siguientes variables del alumno sobre la conceptualización de las fracciones: i) avance en la conceptualización de las fracciones, ii) logro en la conceptualización de las fracciones de acuerdo a los contenidos del currículo nacional (Ministerio de Educación, MINEDUC, 2009) y iii) resultados de los alumnos en una prueba nacional de matemática al finalizar el estudio (MINEDUC, 2011).

Instrumentos

Cuestionario. Se diseñó una prueba con 33 ítems de selección múltiple para determinar el nivel de conceptualización del alumno con respecto a las fracciones. Con esta prueba se midió el "logro" de los alumnos al finalizar el año escolar. Trece ítems de la prueba constituyeron el pre-pos test, la diferencia dio origen a la variable "avance". La prueba alcanzó una confiabilidad de KR_{20}= .76, y alcanzó una alta correlación con los resultados de la prueba nacional de matemática (SIMCE 2010) obtenidos por los grupos cursos de la muestra, r= .68**, aportando a la validez concurrente del instrumento.

Los ítems fueron adaptados desde instrumentos de evaluaciones a gran escala –SIMCE (MINEDUC, 2009), TIMSS (NCES, 2007), atendiendo a los contenidos del currículum chileno (MINEDUC, 2009) y a las dimensiones establecidas en la Tabla 1 en torno a la conceptualización de las fracciones, garantizando la validez de contenido del instrumento. La Tabla 2 presenta ejemplos de preguntas con las cuatro dimensiones de la conceptualización.

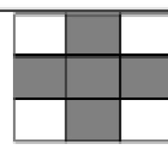
Tabla 2

Ejemplos de preguntas para el alumno con dimensiones sobre la conceptualización

Pregunta B1.

Parte de la figura está sombreada. ¿Qué fracción de la figura está sombreada?

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{6}{9}$



Origen	Representación	Evolución	Efecto
División	Pictórico con unidad de medida	En la noción: parte-todo	Identificación del concepto

Pregunta B3.

El curso de Trinidad tiene 24 alumnos. Todos juegan a la pelota. ¿Cuántos equipos de 6 alumnos se pueden forman para jugar?

a) 2 equipos b) 6 equipos c) 4 equipos d) 24 equipos

Origen	Representación	Evolución	Efecto
División	Lenguaje natural	Previo a la noción: Repartición equitativa	Aplicación resolución de problema

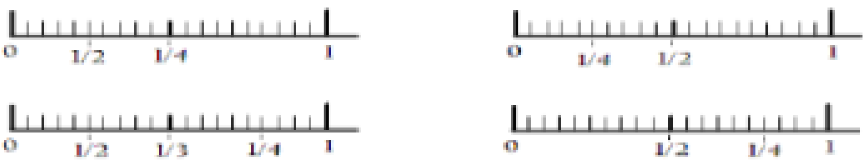
Pregunta C4.

¿Cuál de las siguientes expresiones es igual a $\frac{1}{10}$? a) 10 b) 1 c) 0,1 d) 0,01

Origen	Representación	Evolución	Efecto
División	Numérica	Más allá de la noción: Uso coma decimal	Identificación del concepto

Pregunta C2.

¿En qué caso están bien ubicadas las fracciones en la recta numérica?



Origen	Representación	Evolución	Efecto
Medición	Pictórica – Numérica	Noción profunda: Posición en la recta	Identificación del concepto

Participantes

52 cursos de 4º grado con un total de 1532 alumnos. Las escuelas pertenecen a tres comunas grandes de la Región de Valparaíso, Chile.

Procedimientos

Recolección: La aplicación de las pruebas a los alumnos fue en sus aulas y supervisada. El pretest se aplicó al inicio del año y la prueba de logro al finalizar el año lectivo 2010. Análisis: Se realizaron análisis descriptivos del logro y avance de los alumnos en función de las dimensiones de la conceptualización.

Resultados

Conocimientos de los alumnos

Los alumnos respondieron correctamente en promedio un 31% del pretest y un 38,9% del postest, presentando un avance del 7,9% respecto a la conceptualización de las fracciones (n=40). Además, los grupos cursos alcanzaron un 35,1 % en promedio de respuestas correctas en el test de logro (n=52). Tanto el avance como el logro de los alumnos en relación al aprendizaje de las fracciones son bajos, a pesar de ser éste un contenido curricular obligatorio para 4º grado y contemplado en las evaluaciones nacionales, incidentes estas últimas en el prestigio de los establecimientos y en las contrataciones e incentivos de los docentes.

Como muestra la Tabla 3, elaborada a partir de los ítems del pre-pos test, las dificultades en la conceptualización de las fracciones están asociadas a las categorías de las dimensiones de la conceptualización. Con respecto al factor "origen", los ítems sobre medición muestran mayor dificultad que los de división, lo que se evidencia en avance y logro. Análogamente, las preguntas referidas a la noción profunda y más allá de la noción muestran mayor dificultad que las preguntas de pre-noción y en la noción. De igual manera, en cuanto a efectos, los logros en los ítems de resolución de problemas –más allá del concepto–, muestran mayor dificultad que los ítems sobre el concepto en juego. Ello no ocurre en el avance, ya que la dificultad es la misma para los ítems sobre el concepto como para la resolución de problemas. En cuanto a las representaciones, los ítems con representaciones pictóricas resultaron más fáciles que los basados en representaciones numéricas.

Tabla 3

Promedio avance y logro en ítems por dimensiones
de la conceptualización de las fracciones

Dimensión	Categorías de la dimensión	Promedio de avance (%)	Promedio de logro (%)
Origen	*División o reparto*	9	58
	Medición	7	24
Representación	*Pictórica*	7,7	46
	Numérica	11,3	32
Evolución	*Pre-noción*	12,5	52,5
	En la noción	9	58
	Noción profunda	11	31,5
	Más allá de la noción	8,3	21,7
Efecto	*Conceptos en juego*	10	41
	Más allá, Resolución de problemas	10	35

En síntesis, la Tabla 3 muestra que el avance es escaso en todas las dimensiones, del orden del 10%, y que el logro es mayor en las categorías más simples de cada dimensión y en promedio está por debajo del 40%.

El análisis de las dimensiones de la conceptualización de las fracciones por parte de los alumnos se focalizó en la dimensión "evolución" de la conceptualización. Para presentar los resultados se agruparon las categorías "Pre-noción y en la noción" y las categorías "Noción profunda y más allá de la noción".

Tabla 4

Porcentajes de Logro y Avance según evolución conceptual

	Logro		Avance	
	Pre-noción o en la noción	Noción profunda o más allá	Pre-noción o en la noción	Noción profunda o más allá
%	41	18	10	6,7

La Tabla 4 muestra que los alumnos obtuvieron 18% logro en ítems de las categorías "noción profunda o más allá de la noción" y 41% de logro en ítems simples, "pre-noción o en la noción". Los alumnos obtuvieron mayores logros en ítems simples "pre-noción o en la noción" que, en ítems profundos, "profundos o más allá de la noción".

Discusión

La dimensión "origen" muestra que los problemas de medición son más complejos que los de división o reparto. La dimensión "representación" muestra que los ítems pictóricos son más fáciles que aquellos expresados en lenguaje numérico. La dimensión efecto no muestra con tanta claridad la diferencia entre sus categorías.

En relación a la dimensión "evolución", el estudio muestra el escaso avance y bajo logro de los alumnos. Tanto el avance como el logro fue mayor en ítems simples que en ítems profundos, proveyendo evidencias de la complejidad asociada a la conceptualización, y lo apropiado que resulta utilizar la dimensión evolución, como lo plantean Pirie y Kieren (1994).

Recomendaciones: atender a las distintas dimensiones de la conceptualización en la enseñanza de las fracciones, cuidando abarcar las dimensiones y ordenar en el tiempo las respectivas categorías.

Proyecciones. Dado que los datos se recogieron desde una muestra estratificada de profesores de una región extensa del país, los hallazgos constituyen un indicio de alcance nacional, siendo de interés para la formulación de políticas públicas; en particular en lo referente a la orientación de la formación inicial y continua del profesorado de educación primaria.

Referencias

Gallardo, J. & González, J. (2006). Assessing understanding in mathematics: steps towards an operative model. For the Learning of Mathematics, 26(2), 10-15.

Kieren, T., Pirie, S. & Calvert, L. (1999). Growing minds, growing mathematical understanding: mathematical understanding, abstraction and interaction. En L. Burton (Ed.) Learning mathematics: From hierarchies to networks, pp. 209-231. Londres: Routledge.

Ministerio de Educación [MINEDUC]. (2009). SIMCE 2008. Niveles de Logro 4º Básico para Educación Matemática. Unidad de Currículum y Evaluación Ministerio de Educación. Chile.

Ministerio de Educación [MINEDUC]. (2011). SIMCE

2010. Niveles de Logro 4º Básico para Educación Matemática. Unidad de Currículum y Evaluación Ministerio de Educación. Chile.

National Center For Education Statistics [NCES]. (2007). Student Questionnaire. grade 4th TIMSS USA. Department of Education. Washington, DC: U.S.

Pirie, S. & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it? Educational Studies in Mathematics 26, 165-190.

Sierpinska, A. (1994). Understanding in mathematics. Londres: The Falmer Press.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactiques des Mathématiques, 10(2-3), 133-170.

¿Es posible trabajar con gráficos estadísticos en preescolar?

Carmen Cervilla Rodríguez, Pedro Arteaga Cezón y Danilo Díaz-Levicoy
Universidad de Granada (España)
parteaga@ugr.es, dddiaz01@hotmail.com
Nivel educativo: preescolar. Categoría: Educación matemática en preescolar

Resumen

En este trabajo presentamos el diseño y puesta en práctica de un proyecto educativo globalizado sobre el consumo de frutas con el objetivo de incorporar contenidos de estadística, en particular de gráficos estadísticos y tablas de doble entrada, en las aulas de preescolar. El desarrollo de este proyecto se llevó a cabo con alumnos de entre 4 y 5 años en un aula de preescolar en Granada (España), en el cual los niños tenían que construir sus propias gráficas y tablas estadísticas para luego leerlas e interpretarlas, obteniendo información que les permitió argumentar e incluso realizar hipótesis. Los resultados de la puesta en práctica mostraron que es posible trabajar contenidos de estadística adaptados al nivel de preescolar.

Palabras clave: Estadística, Educación preescolar, Gráficos estadísticos, Interpretación, Comprensión.

Introducción

Si pensamos en las asignaturas que nos han acompañado durante todo nuestro trayecto dentro del sistema educativo, hay una asignatura que destaca, las matemáticas. Ésta es una materia que no gusta a muchos, pero que a otros encanta. Tenemos así, una disciplina polémica para sus estudiantes, a la vez popular. Sin embargo, dentro de esta, hay bloques que tienen más o menos atención que otros. Todos sabemos que el cálculo o la medida, son necesarias para enfrentarnos a situaciones cotidianas, ya que son aquellos bloques que derivan a acciones más observables.

No obstante, en muchas ocasiones, cuando vivimos el día a día, no nos percatamos de elementos que están a nuestro alrededor. Dentro de estos, se hallan los datos estadísticos. *"Cada vez estamos más rodeados de datos por todas partes, que además son cada vez más complejos, abundantes y dispersos"* (Corbalán y Sanz, 2012, p.5). Algún ejemplo de ello, son los resultados de encuestas o votaciones que se realizan y se dan a conocer por los medios de comunicación.

El desarrollo de las nuevas tecnologías y la cantidad de información presentada en Internet a través de tablas y gráficos es cada vez mayor, por lo que esta situación hace que más que nunca sea necesario formar individuos estadísticamente cultos para interpretar datos estadísticos (Ridgway, Nicholson, y McCusker, 2008).

Por este motivo, la capacidad de analizar e interpretar datos se hace necesaria y más aún en este momento, en la "sociedad de la información". Pero, ¿Se enseña estadística en las escuelas? ¿Se podría trabajar en las aulas de educación preescolar?

La realidad es que la estadística se enseña, pero como explican Corbalán y Sanz (2012), se tiene como último tema dentro de la programación y en caso que se llegue a esa unidad, se afronta con rapidez. Por lo tanto, debemos de cambiar este hábito para dirigirnos a una educación integral, en el que los alumnos aprendan de toda la variedad de conocimientos necesarios, tanto en esta disciplina, como en cualquier otra.

Nuestra opinión es que en las aulas de preescolar se podría trabajar con gráficos sencillos de barras, siempre adaptados al nivel educativo al que va destinado y utilizando contextos de interés para los niños. Por ello, en nuestro trabajo, presentamos el diseño de una serie de actividades para iniciar en el trabajo con gráficos de barras en un aula de segundo ciclo de preescolar (niños entre 4 y 5 años), así como el análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes al realizar dichas actividades.

Educación Matemática y Estadística en las aulas de preescolar

Autores como Alsina (2012a) y Edo (2005) proponen que las actividades matemáticas en las aulas de preescolar sean interdisciplinares y globalizadas tratando temas de interés para los estudiantes a los que van dirigidas. Existen prácticas documentadas en las que se acercan las matemáticas desde un contexto globalizado, trabajándose a partir de la psicomotricidad, la música, el arte o la literatura infantil. Un ejemplo de esto se muestra en Ruillier (2009) en el que el autor a través del cuento "Por cuatro esquinitas de nada" trabaja educación en valores a través de unos protagonistas que son figuras geométricas.

En este sentido los docentes de educación preescolar han de estar dispuestos y ser conscientes de que deberían ofrecer experiencias significativas y aprovechar todas aquellas oportunidades presentes durante el curso escolar, haciendo de ellas recursos educativos con los que *"descubrir las matemáticas que hay en la vida cotidiana para favorecer que los alumnos aprendan a verlas, a interpretarlas, a comprenderlas, para que progresivamente puedan desarrollarse mejor en su entorno inmediato"* (Alsina, 2012a, p.14).

Quizá, si pensamos en trabajar desde esta perspectiva recomendada por distintos autores, nos encontremos con más fluidez de ideas en temas como geometría o cálculo, pero hay actividades sencillas como las que menciona Reed (2008) sobre estadística que permiten trabajarla dentro de contextos de la vida real; hacer votaciones para la elección de un cuento, o averiguar qué sabor de helado gusta más a los niños de la clase. Con estas tareas no son necesarias únicamente habilidades relacionadas con estadística, sino que como indica Watson (2006), se requieren distintas competencias para un entendimiento adecuado de las gráficas, y éstas se desarrollan a partir de las distintas áreas de las matemáticas. Es decir, para una comprensión gráfica adecuada se precisa de conocimientos de cálculo, además de aquellos específicos en este ámbito.

No obstante, si es cierto, que *"existe todavía poca tradición de trabajar de forma sistemática el bloque de contenidos de estadística y probabilidad en Educación Infantil"*(Alsina, 2012b, p.5).

Autores como Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras (2011) muestran los gráficos estadísticos como objetos culturales cada vez más presentes en nuestra sociedad debido al gran desarrollo de las nuevas tecnologías y redes sociales, donde las personas nos encontramos gran cantidad de informaciones estadísticas representadas muchas de las veces a través de gráficos y tablas. En este sentido Watson (2006) pone de manifiesto la importancia de desarrollar una buena competencia gráfica por parte de los ciudadanos con el objetivo de que estos desarrollen buenos niveles de cultura estadística. En este sentido nosotros creemos que sería importante trabajar con gráficos estadísticos en las primeras edades de los niños.

Wu (2004) relaciona el buen desarrollo de la competencia gráfica en los ciudadanos con las siguientes cuatro habilidades: construcción de gráficos, lectura de gráficos, interpretación y evaluación de los mismos. En relación a estas actividades, creemos factible trabajar con los niños de preescolar las tres primeras y sobre todo la que pretendemos potenciar en este trabajo es la construcción gráfica.

Arteaga, Batanero, Contreras (2011) además relacionan el trabajo con gráficos con el desarrollo de otras competencias matemáticas relacionadas con el sentido numérico, queremos resaltar este aspecto ya que los aprendizajes en las primeras edades son interdisciplinares y globalizados y en particular al trabajar con gráficos con los niños podemos potenciar el concepto de número, el conteo, las operaciones aritméticas, sentido espacial, etc. Por tanto, nosotros con el presente trabajo, teniendo en cuenta las recomendaciones que hemos mostrados, pretendemos acercar la estadística de manera sencilla a las aulas de preescolar, a través de una serie de actividades relacionadas con un proyecto llamado ¿Qué fruta comemos?, con el que de manera globalizada, pretendemos trabajar con los niños temas relacionados con una alimentación saludable, así como la construcción e interpretación de tablas y gráficos estadísticos. A continuación, se describe el proyecto y sus distintas actividades.

Proyecto ¿Qué fruta comemos?

Hemos llamado a nuestro proyecto *"¿Qué fruta comemos?"* y se ha llevado a cabo en una escuela de preescolar en Granada (España) donde participaron 23 alumnos de 4 y 5 años. En dicho proyecto los niños tuvieron que construir gráficos de barras, durante tres días, en los que se mostraba la frecuencia asociada a cada una de las frutas (manzana, naranja, pera y plátano) que dichos niños elegían comer en su hora de recreo. Con esto se pretendía que los niños una vez construidas sus representaciones discutiesen y sacasen conclusiones sobre las frutas preferidas, las frutas que no gustaban tanto, etc.

Para la construcción de los gráficos y con el objetivo de llamar su atención, se elaboraron tres paneles grandes de 70 x 50 cm, uno para cada día, donde el eje de las X mostraba las distintas frutas que se ofrecían a los niños con fotos reales de ellas, a un tamaño de 8 x 8 cm. Además, se consta de 23 tarjetas para cada gráfico, con los nombres de los niños y un tamaño de 2,5 x 8 cm, para que las pongan encima de cada una de las barras correspondientes a la fruta que comieron en primer lugar. Tanto los paneles, como las fotos y tarjetas tienen incorporado un sistema para pegar (velcro).

El resultado del primer día se muestra en la figura 1. En dicha figura podemos observar que una de las categorías es la de "no fruta", este caso quisimos contemplarlo, ya que había niños que nunca comían fruta o casos como los cumpleaños, en los que la comida de media mañana es bizcocho y en caso de que algún niño quiera fruta también está disponible. Con esto pretendíamos trabajar conectores lógicos como la negación.

Figura 1. Gráfico de barras elaborado por los estudiantes el primer día que se elaboró el proyecto.

Por otro lado, contamos con una tabla de doble entrada (figura 2), en la cual tenemos los días de la semana en la fila superior y las distintas opciones en la primera columna por la izquierda. En ella los párvulos recogen los datos que han obtenido en las gráficas. Esto ha sido creado como complemento a las gráficas, pero no se tendrá en cuenta dentro de este trabajo, ya que nos centraremos en la interpretación de las gráficas y los datos resultantes, aún así, nos parece muy interesante resaltar que los niños hayan sido capaces de traducir la información disponible en cada uno de los gráficos y ponerla en forma de tabla de frecuencias.

Figura 2. Tabla de frecuencias elaborada por los estudiantes a partir de la figura 1.

El resultado final, de la elaboración de todo el proyecto, se muestra en las figuras 3 y 4, los tres gráficos de barras construidos por los niños, así como la tabla de frecuencias. El final del proyecto consistió en realizar una puesta en común y a través de preguntas guiadas por las maestras e investigadores, se realizó una interpretación de los gráficos y tabla para que los estudiantes sacasen sus propias conclusiones sobre las frutas preferidas o qué pasaba en los cumpleaños que casi nadie comía fruta (ya que esos días había bizcocho).

Figura 3. Foto de los tres gráficos realizados en el proyecto.

Figura 4. Foto de todo el material en el último día del proyecto.

Conclusiones

A partir de los datos que hemos obtenidos, en la puesta en práctica del proyecto, vemos que los alumnos que han participado en esta actividad no han tenido dificultad para la construcción, ni interpretación de las gráficas, al igual que ocurre en las propuestas comentadas sobre Reed (2008) y Alsina (2012b). Asimismo, puede observarse una ligera mejora en estos dos ámbitos, desde el primer día, al tercero, pudiendo ser resultado de la elaboración de este mismo proyecto durante varios días, permitiendo que progresivamente obtengan mayor nivel de comprensión. En futuros trabajos pretendemos realizar un análisis a posteriori del trabajo para analizar en detalle los puntos débiles y fuertes del mismo para poder continuar con nuestra investigación.

En cuanto al trabajo en su conjunto la puesta en práctica de este tipo de metodología en las aulas de preescolar tiene sus ventajas y también puntos débiles, los cuales han podido influir en los resultados. Una de las circunstancias positivas, es que este tipo de metodología y tareas son a las que están habituados los alumnos que han participado en este trabajo; ya que los niños realizan la comanda, y registran el tiempo meteorológico, entre otras actividades, pero siempre recogen y representan la información por diversos medios, ayudándoles a que estar más receptivos ante este tipo de propuestas. Sin embargo, hay otros aspectos que no lo han facilitado, entre las que se encuentra la dificultad extra que conlleva realizar este tipo de tareas por parte de los docentes, así como la formación de los mismos en temas de Estadística, lo cual ha podido ser un hándicap a la hora de realizar interpretaciones de los gráficos y obtener conclusiones.

En su conjunto nos ha parecido un trabajo muy interesante y que puede aportar ideas a profesores e investigadores que se interesen por el tema.

Agradecimiento: Proyecto EDU2013-41141-P (MEC) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Alsina, A. (2012a). Hacia un enfoque globalizado de la educación matemática en las primeras edades. Números: Revista de didáctica de las matemáticas, 80, 8-24.

Alsina, A. (2012b). La estadística y la probabilidad en educación infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. Didácticas específicas, 7, 4-22.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. Números, 76, 55-67. ISSN: 1887-1984

Arteaga, P., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2011). Gráficos estadísticos en la educación primaria y la formación de profesores. Indivisa. 12, 123-136. ISSN: 1579-3141

Corbalán, F. y Sanz, G. (2012). La estadística. UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 59, 5-8.

Edo, M. (2005). Educación matemática versus Instrucción matemática en Infantil.En A.P. Pequito y A. Pinheiro (Eds.), Proceeding of the First International Congress on Learning in Childhood Education (pp. 125-137). Porto: Gailivro.

Reed, M. (2008). Early Childhood Building Blocks: Children Using Data Using Data to Find Answers. REC: Resources for early childhood. Recuperable en: http://rec.ohiorc.org/orc_documents/orc/recv2/briefs/pdf/0013.pdf

Ridgway, J., Nicholson, J. yMcCusker, S. (2008). Mapping new statistical Literacies and Iliteracies.International Conference on Mathematics Education, Trabajopresentado en el 11th International Congress on Mathematics Education, Monterrey, Mexico.

Ruillier, J. (2009). Por cuatro esquinitas de nada. Barcelona: Juventud.

Watson, J. (2006). Statistical literacy at school: Growth and goals. (1ed.). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Wu, Y. (2004). Singapore secondary school students' understanding of statistical graphs.Trabajo presentado en el 10th Congress on Mathematics Education. Copenhagen.

Conocimientos para la enseñanza del número en educadoras de párvulos en formación docente inicial

Tatiana Goldrine Godoy, Raimundo Olfos Ayarza, Soledad Estrella Romero
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
tatiana.goldrine@ucv.cl
Educación Matemática en Preescolar

Resumen

La investigación en formación docente inicial ha evidenciado en los futuros profesores conocimientos insuficientes para la enseñanza. En este contexto, se investigó el efecto de un curso de didáctica de la matemática en el conocimiento de futuras educadoras de párvulos para la enseñanza del número. El curso se basó en un constructo sobre el conocimiento docente que incluye el conocimiento de la educadora sobre lógica, número, etapas del aprendizaje del niño y organización de la enseñanza. Se utilizaron metodologías que integran teoría-práctica en la formación inicial, como el análisis de videos, el estudio de caso y el estudio de clase. Se usó un enfoque mixto, un diseño cuasi experimental con un test de conocimientos antes y después del curso, mapas conceptuales y entrevistas; constatándose diferencias significativas a favor del curso. El estudio provee un marco conceptual y metodologías para la formación inicial docente de Educadoras de Párvulos en didáctica de la matemática.

Introducción

¿Qué tienen que saber los futuros profesores para enseñar? y ¿cómo transforman el conocimiento en prácticas de aula que beneficien el aprendizaje de los niños?, son preguntas que motivan la investigación desde hace años (Hammerness et al. 2005). Estudios con docentes chilenas de Educación Parvularia en servicio, han evidenciado un distanciamiento entre el lenguaje matemático informal y el lenguaje disciplinar, y predominio del conocimiento cotidiano por sobre el didáctico (Friz, Sanhueza y Samuel, 2008; Friz et al. 2009). En Chile, los resultados de la Prueba Inicia muestran que las estudiantes de las carreras de Educación Parvularia al egreso de la formación dominan alrededor de un 50% de los conocimientos estimados para la enseñanza.

La distinción entre el conocimiento del profesor para enseñar un dominio específico y el conocimiento de ese dominio llevó a Shulman (1987) a identificar tres componentes del conocimiento requerido para la enseñanza: conocimiento del contenido (CC), conocimiento pedagógico (CP) y conocimiento pedagógico del contenido (CPC). Desarrollos posteriores sobre el CC y CPC, aportan sustento teórico para conceptualizar el conocimiento de la educadora de párvulos para la enseñanza de la matemática.

En relación al conocimiento docente de educadora de párvulos para la enseñanza de la matemática, Lee (2010) investigó el CPC para la enseñanza de la matemática en docentes de Educación Infantil, encontrando que la noción de mayor preponderancia es el sentido del número, seguido de las nociones de patrones, seriación, formas, comparación y espacio. Platas (2008) midió el conocimiento docente sobre el desarrollo matemático de los niños, focalizando la indagación en el ámbito de números y operaciones por ser el más relevante en la educación matemática infantil. Al igual que Lee (op. cit.) encontró que las docentes con más años de experiencia, formación general y específica en desarrollo matemático infantil presentan mayor conocimiento para la enseñanza. De lo anterior se deriva que en la formación docente inicial es relevante que las futuras educadoras comprendan la matemática a enseñar y los procesos de construcción de conocimientos matemáticos en los niños, a fin de clarificar qué enseñar y cómo enseñar en este nivel educativo (McCray & Chen, 2012; McCray, 2008).

En base a los referentes anteriores, los autores del presente trabajo elaboraron un constructo sobre el conocimiento docente para la enseñanza del número compuesto por CC, CPC-Ens y CPC-CRAC (Goldrine et al. sometido). El CC abarca el conocimiento docente sobre los conceptos de lógica y número y las representaciones semióticas idóneas de tales nociones para su enseñanza en este nivel. El CPC contiene dos componentes, una acerca de la Enseñanza del número, CPC-Ens, que incluye el conocimiento docente sobre la secuencia de tareas matemáticas para la enseñanza de la lógica y del número, conocimiento del currículo oficial de este nivel educativo, conocimiento de materiales para la representación de nociones lógico matemáticas y creencias docentes sobre la enseñanza y el aprendizaje. La otra componente considera el Conocimiento docente sobre la Relación de los Alumnos con el Contenido, CPC-CRAC, que incluye el conocimiento docente sobre etapas en el aprendizaje de nociones de lógica y número, como por ejemplo, etapas de dominio de la serie oral, etapas en la simbolización de cantidades; además del conocimiento docente acerca de los errores frecuentes de los párvulos, por ejemplo, errores en el conteo.

Con respecto a metodologías innovadores en formación del profesorado, la literatura muestra la incorporación del análisis de videos, el estudio de clases y el estudio de casos como metodologías pertinentes para la formación del profesorado. El uso de estas metodologías en la formación docente favorece la reflexión sobre la práctica, propiciando que el futuro profesor transite desde un rol pasivo de alumno hacia un rol activo en su propia formación. La reflexión sobre la práctica favorece la articulación de los conocimientos con los saberes de la experiencia, la innovación pedagógica y la profesionalización docente.

Curso de didáctica de la matemática

Se diseñó un curso de didáctica de la matemática basado en el constructo conocimiento docente para la enseñanza del número y en las tres metodologías para la formación del profesorado expuestas anteriormente. El curso constó de 14 sesiones. Los contenidos abordaron el desarrollo del número en el niño, conceptos de didáctica de la matemática (como representaciones, análisis a priori, devolución, institucionalización y variables didácticas, entre otros) y enfoque de resolución de problemas. La metodología del curso incluyó el estudio de clases, estudio de casos, análisis de videos de futuras docentes con párvulos en aulas reales, clases expositivas por parte de la profesora del curso, actividades de aplicación y lecturas complementarias. En el curso, las estudiantes diseñaron una experiencia de enseñanza para el aprendizaje del número, que implementaron con un grupo de párvulos en un aula real y videograbaron para su posterior análisis.

A partir de lo expuesto, el objetivo de la investigación fue estudiar el efecto del curso de didáctica de la matemática en los conocimientos para la enseñanza del número, en educadoras de párvulos en formación inicial docente[7].

Método

Diseño

Se realizó una investigación con enfoque mixto y diseño cuasi-experimental con pre y pos test.

Participantes

La muestra no probabilística estuvo compuesta por una cohorte de 39 estudiantes, de tercer año de la carrera de Educación Parvularia de una universidad chilena, que participaron en el año 2011 en el curso de didáctica de la matemática.

Intervención

El curso de didáctica de la matemática se implementó durante el segundo semestre del año 2011 con 16 sesiones semanales de 90 minutos. Paralelo al curso, las estudiantes se encontraban cursando una asignatura de práctica intermedia en un nivel de Transición II en el que implementaron y video grabaron una actividad de enseñanza del número.

Instrumentos

i) Test de conocimiento para la enseñanza del número en estudiantes de Educación Parvularia. La fiabilidad del test es de 0,72, considerada aceptable (Nunally y Bernstein, 1995), con 0,61 para la componente CC, 0,50 para CPC-CRAC y 0,52 para CPC-Ens. El test fue validado en un estudio previo (Goldrine, Estrella, Olfos y Cáceres, 2014, en prensa).

ii) Mapas conceptuales. Se solicitó a las estudiantes elaborar un mapa conceptual sobre la enseñanza del número en Educación Parvularia, al inicio y al término del curso.

iii) Entrevista. Cada entrevista se inició observando el video de la experiencia de enseñanza-aprendizaje del número que la estudiante desarrolló con un grupo de párvulos.

Resultados

Los análisis descriptivos de los resultados del Test de conocimiento para la enseñanza del número, muestran diferencias a favor del postest en las tres componentes. En la Figura 1, las curvas de densidad de núcleo ilustran la distribución de la variabilidad y las diferencias entre puntuaciones para las componentes.

---

[7] La investigación es parte del Proyecto FONDECYT 1111009 "Taller de didáctica de la matemática: una actividad curricular innovadora para la formación de profesores básicos y educadoras de párvulos. Validación de constructos y herramientas para la formación inicial docente"

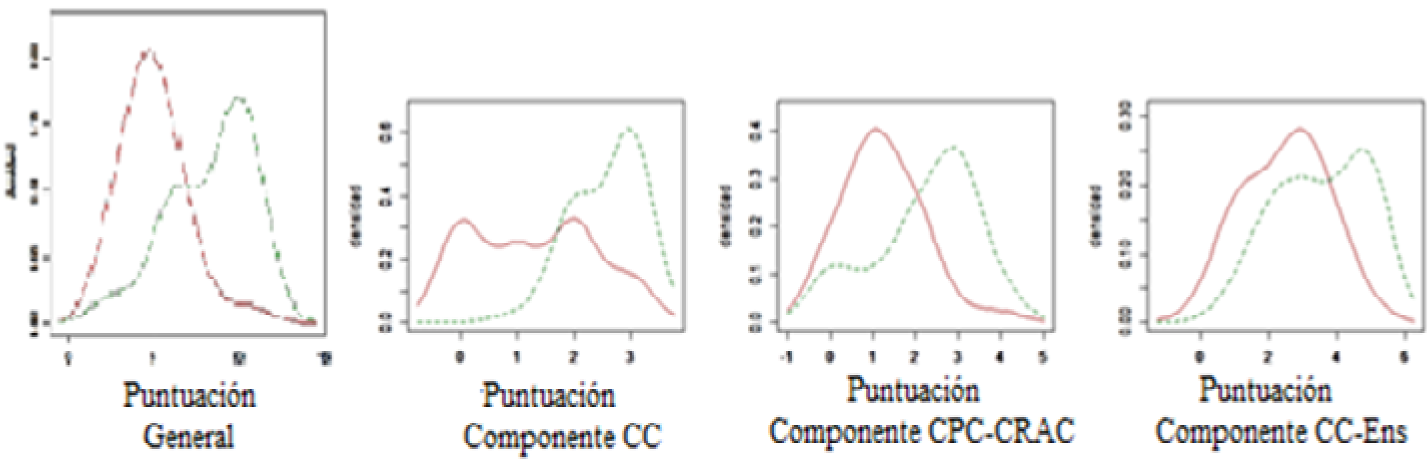


Figura 1. Resultados pre y post test por componente

El grafico 1 muestra que los puntajes de los mapas conceptuales tienden a ser más alto al término del curso.

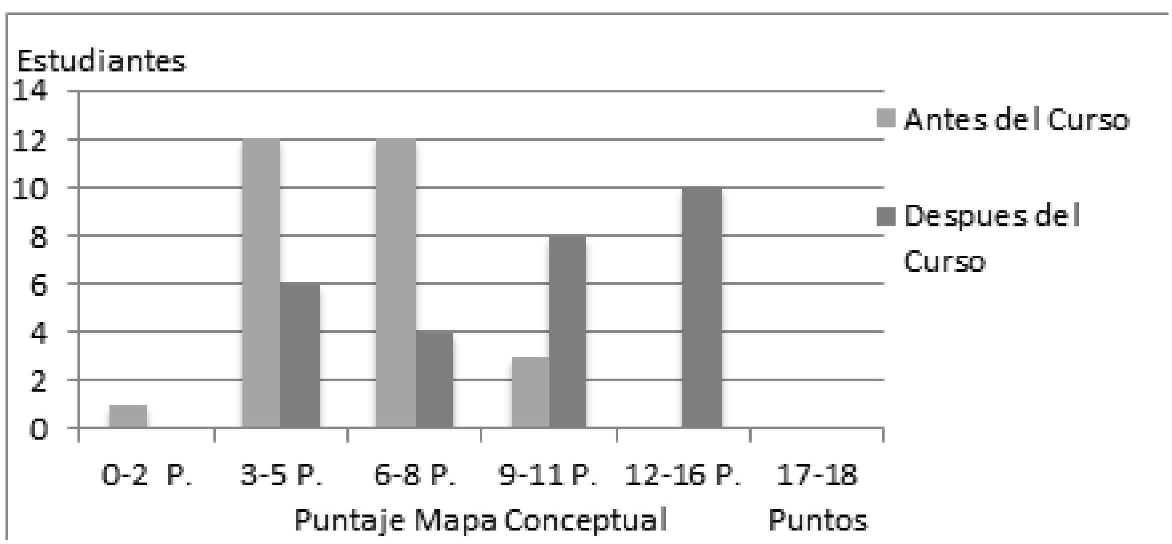


Grafico 1. Puntaje Mapa Conceptual antes y después del curso

En las entrevistas, las estudiantes utilizaron nociones matemáticas trabajadas en el curso como cardinalidad, ordinalidad, representación de cantidad, principios de conteo, serie numérica, operaciones matemáticas y resolución de problemas. Las estudiantes señalaron cambios en la enseñanza de la matemática atribuibles al curso. Comentan que antes realizaban actividades expositivas que cambiaron para ser más desafiantes (13 estudiantes). Consideran que el curso les dio herramientas para la implementación de planificaciones con un enfoque de resolución de problema (15), y para mejorar su mediación docente hacia una devolución que motiva al niño a buscar las estrategias y respuesta, evitando entregar a los niños las respuestas a la situación problema (6). Aprecian un aprendizaje personal llegando a sentirse más preparadas para enseñar matemáticas (6).

Discusión

Tanto los resultados del test (evidencia cuantitativa), como las entrevistas y los mapas conceptuales (evidencias cualitativas), muestran indicios de un posible efecto del curso en los conocimientos, creencias y prácticas de la enseñanza del número de las futuras educadoras.

Las pruebas estadísticas mostraron diferencias significativas a favor del curso. Las diferencias de los resultados del test al inicio y al término del curso, estarían arrojando evidencia de la pertinencia del constructo y de las metodologías utilizadas en el curso.

Las diferencias pre y postest revelarían que el curso tuvo mayor efecto en la componente CC, en comparación con las otras componentes. En la componente CC las estudiantes presentaron el más bajo puntaje al inicio del curso y obtuvieron el mayor avance. Estos resultados son provechosos en términos del conocimiento docente que las estudiantes lograron construir con el curso, ya que en opinión de algunos autores esta componente es base para el avance en las otras. Para Ma (1999) el docente requiere de un profundo conocimiento de la matemática a enseñar, este conocimiento es clave en la configuración de las otras componentes del conocimiento docente y estaría asociado a la efectividad de la enseñanza. Llevado al ámbito de la formación de educadoras de párvulos significa que las futuras docentes se verían favorecidas al desarrollar un conocimiento profundo de las nociones matemáticas que se abordan en el nivel de Educación Parvularia. En este sentido, el curso podría constituirse en un recurso curricular para la formación inicial docente.

Los resultados de los mapas también constituyen evidencia del efecto del curso, ya que los puntajes tendieron a ser más alto al término del curso, debido a que las maestras incluyeron términos referidos a nociones matemáticas y enseñanza del número que no estuvieron presentes en los mapas elaborados al inicio.

Los resultados del análisis de las entrevistas también aportarían evidencias en favor del curso. Las entrevistas al término del curso permiten identificar la presencia de las componentes del constructo conocimiento docente para la enseñanza del número.

Varias estudiantes en las entrevistas señalaron que las metodologías del curso favorecieron la vinculación de la teoría con la práctica en aula, y que el curso les brindó herramientas para implementar el enfoque de resolución de problemas y mejorar la mediación en la enseñanza de la matemática.

Conclusiones

La principal conclusión del estudio es de carácter inductiva: el nivel de éxito en el curso de didáctica de la matemática estaría asociado al nivel de conocimiento para la enseñanza del número alcanzado por las futuras educadoras de párvulo.

Los autores postulan que la efectividad del curso podría estar asociada a la relación dialéctica que se establece entre el constructo de conocimiento docente que fundamenta el curso y las tres metodologías de enseñanza que integran teoría y práctica. Estas metodologías, como se desprende de la literatura revisada, estarían promoviendo la reflexión docente y a través de ésta, la construcción de conocimiento docente en la futura educadora de párvulos.

Un aspecto relevante de la investigación es que dio indicios de la efectividad de un curso centrado en un constructo sobre el saber que requiere el futuro profesor para aprender a enseñar. Lee, 2010; McCray, 2008; McCray & Chen 2012). El curso integra el conocimiento del contenido a enseñar, CC, con el conocimiento de la enseñanza del contenido, CPC-Ens, y el conocimiento de la relación del alumno con el saber, CPC- CRAC. El curso logró operacionalizar la propuesta de Shulman (1987) y desarrollos teóricos posteriores en el contexto de la formación inicial de educadoras para la enseñanza del número.

A partir de lo anterior, se sugieren futuras investigaciones que relacionen conocimientos docentes, creencias y prácticas de enseñanza de la matemática, así como metodologías formativas innovadoras en la formación docente inicial.

Referencias

Friz, M., Sanhueza, S., y Sámuel, M. (2008). Conocimiento de las competencias profesionales implicadas en la enseñanza de las matemáticas en Educación Preescolar. Ponencia presentada en el Segundo Encuentro de Educación Inicial, Pontifica Universidad Católica de Chile, Santiago.

Friz, M., Sanhueza, S., Sánchez, A., Sámuel, M. y Carrera, C. (2009). Concepciones en la enseñanza de la Matemática en educación infantil. Perfiles Educativos, vol. 31, n. 125, 62-76. .

Hammerness K., Darling-Hammond L., Bransford J., Berliner D., Cochran- Smith M., Mc Donald M. & Ziechner (2005). How teachers learn and develop. En Hammerness, Darling-Hammond & Bransford J.(Ed). Preparing teachers for a changing world. San Francisco: Jossey-Bass

Lee, J. F. (2008). A Hong Kong case of lesson study - benefits and concerns. Teaching and Teacher Education, 24, n.5, 1115-1124.

Lee, J. (2010). Exploring kindergarten teachers' pedagogical content knowledge of mathematics. International Journal of Early Childhood, vol.42, n.1, 27-41.

Ma, L.(1999). Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States. Mahwah: Erlbaum.

McCray, J. (2008). Pedagogical Content Knowledge for Preschool Mathematics: Relationships to Teaching Practices and Child Outcomes. Tesis doctoral no publicada. Loyola University Chicago, Erikson Institute.

McCray, J. & Chen J. (2012) Pedagogical Content Knowledge for Preschool.Mathematics: Construct Validity of a New Teacher Interview. Journal of Research in Childhood Education, vol.26, 291–307.

Nunally, J. y Bernstein, I. (1995). Teoría psicométrica. México D. F.: McGraw-Hill

Platas (2008). Measuring Teachers' Knowledge of Early Mathematical Development and Their Beliefs about Mathematics Teaching and Learning in the Preschool Classroom. Tesis Doctoral no publicada. University of California, Berkeley.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard Educational Review, vol.57, n.1, 1–22.

Innovación curricular asignatura de desarrollo pensamiento lógico escuela de auditoria universidad de Valparaíso

Roberto Araya Luan, Víctor Vilches Contreras
Universidad de Valparaíso, Chile
Roberto.araya@uv.cl; Víctor.vilches@uv.cl
Educación superior

Resumen

La mayoría de los alumnos que ingresan a la Carrera de Auditoria de la Universidad de Valparaíso provienen de Colegios Técnicos (Mención Contabilidad), Colegios Municipalizados y Colegios Subvencionados de nivel socioeconómico medio-bajo , donde lamentablemente su aprendizaje matemático ha estado orientado a la reproducción de ciertas formulas y procedimientos que en nada contribuyen a un desarrollo de habilidades cognitivas y a un desarrollo de su pensamiento creativo; lo que es un obstáculo al enfrentarse a ciertas situaciones problemas que requieren de análisis y razonamiento deductivo. Esta problemática no solamente se presenta en las asignaturas de matemáticas sino también en asignatura como contabilidad y Administración.

La dirección de la Carrera de Auditoria consciente de esta problemática, ha tratado de buscar estrategias posibles para dar solución real y efectiva a dicha problemática, implementando a partir del año 2005, tutorías, ayudantías y programas especiales de nivelación, pese a todos los esfuerzos realizados, no ha sido posible disminuir la tasa de reprobación y de deserción en las asignaturas mencionadas. Los conocimientos insuficientes, "errores", no son superados por los alumnos lo que significa que son un obstáculo en la generación de nuevos aprendizajes y conducen irremediablemente al fracaso académico.

Alineándose con la innovación curricular propuesta por la Universidad de Valparaíso la dirección de la Carrera de Auditoria a partir del año 2012 ha reestructurado su malla curricular, dándole una orientación por competencias, lo que ha implicado reestructurar planes y programas de estudios. Dentro de este proceso de reestructuración se ha implementado la asignatura de Desarrollo del Pensamiento Lógico como única asignatura de matemáticas el primer semestre de la Carrera, cuyo objetivo es proporcionar a los alumnos que se inician en la Carrera de Auditoria un conjunto de conocimientos y experiencias que le permitan reestructurar cognoscitiva y conceptualmente su aprendizaje matemático previo, mediante la implementación de actividades y estrategias que favorezcan el razonamiento y el desarrollo de habilidades y destrezas para afrontar con éxito las asignaturas de matemáticas posteriores y en general su formación académica y su desenvolvimiento futuro, tanto en el mundo laboral como en su vida diaria

Introducción

Para nadie es novedad que la gran mayoría de los alumnos que ingresaron la Educación Superior (en particular a la Universidad de Valparaíso y específicamente a la Carrera de Auditoria Campus las Heras Valparaíso y Campus San Miguel Santiago), durante los últimos años, presentaban características similares a su grupo de pares de promociones anteriores, es decir, con serias deficiencias a nivel cognitivo, que en las asignaturas de Matemáticas iniciales se manifestaron en errores tanto conceptuales como operacionales, con conocimientos previos erróneos y peor aún internalizados como verdades absolutas. Pese a que un gran número de ellos asimila los nuevos contenidos en lo que se refiere a la parte procedimental, la falencia en la compresión y análisis de dichos contenidos u objetos matemáticos así como sus propiedades y aplicaciones queda de manifiesto al momento de enfrentarse a una cierta situación problema que requiera de un análisis, planteamiento, interpretación y comunicación de resultados; debido fundamentalmente a una serie de factores dentro de los cuales podemos destacar: carencia y concepciones erróneas de ciertos contenidos matemáticos elementales, falta de hábitos de estudios y la poca de *actitud hacia el aprendizaje continuo.*

La dirección de la Carrera de Auditoría consciente de esta problemática, ha tratado de buscar estrategias posibles para dar solución real y efectiva a dicha problemática, implementando a partir del año 2005 programas de nivelación, tutorías, ayudantías, etc., a la vez que se han reestructurado los contenidos en las asignaturas de Matemáticas I (privilegiando comprensión de ciertos contenidos por sobre la cantidad de ellos). Pese a todos los esfuerzos realizados, no ha sido posible disminuir la tasa de reprobación y de deserción en dichas asignaturas; los conocimientos insuficientes, "errores", no son superados por los alumnos lo que significa que son un obstáculo en la generación de nuevos aprendizajes y conducen irremediablemente al fracaso académico.

Si los errores son elementos usuales en nuestro camino hacia el conocimiento verdadero, hemos de concluir que en el proceso usual de construcción de los conocimientos matemáticos van a aparecer de forma sistemática errores y por tanto el proceso mencionado de construcción, deberá incluir su diagnóstico, detección, corrección y superación mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones". Rico, 1995

Alineándose con la innovación curricular propuesta por la Universidad de Valparaíso la dirección de la Carrera de Auditoria a partir del año 2012 ha reestructurado su malla curricular dándole una orientación por competencias, lo que ha implicado reestructurar planes y programas de estudios. Dentro de este proceso de reestructuración los profesores de las asignaturas de matemáticas propusieron a la Unidad de Gestión Pedagógica de la Carrera (encargada de tal reestructuración) implementar una asignatura (Desarrollo del pensamiento Lógico Matemático) en el primer semestre, cuyo objetivo sería proporcionar a los alumnos que se inician en la Carrera de Auditoria un conjunto de conocimientos y experiencias que le permitan reestructurar cognoscitiva y conceptualmente su aprendizaje matemático previo, mediante la implementación de actividades y estrategias que favorezcan el razonamiento y el desarrollo de habilidades y destrezas para afrontar con éxito las asignaturas de matemáticas posteriores y en general su formación académica y su desenvolvimiento, tanto en el mundo laboral como en su vida diaria.

Este proyecto de implementación de la asignatura citada, se enmarca dentro de la Teoría de las Situaciones Didácticas propuesta por Guy Brousseau como un modelo de los procesos de aprendizajes y de enseñanza. Teniendo como hipótesis que: las conceptualizaciones fundamentales para el aprendizaje son las que surgen de la acción al abordar situaciones problemas. De ahí que el objetivo general que se propuso fue la construcción de nuevas situaciones didácticas para el logro de los aprendizajes de ciertos contenidos matemáticos como Lógica y conjuntos, Relaciones y Funciones, Números Naturales y Relaciones en el Plano (que en alguna medida son conocimientos previos), dichas situaciones fueron enfocadas desde un paradigma constructivista que genera espacios para que los alumnos accionen, reflexionen, comuniquen, verifiquen y justifiquen sus estrategias de resolución, permitiendo generar instancias para aplicar diferentes formas de evaluaciones de las cuales ellos puedan ser partícipe. Dichas actividades permiten desarrollar en los alumnos diferentes competencias tales como: Comprensión de los conceptos matemáticos tratados, que permitan el logro de aptitudes de abstracción y de razonamiento deductivo; diseñar, desarrollar e implementar aplicaciones matemáticas en diversos contextos, manejar un lenguaje para representar ciertos modelos matemáticos fundamentales para simular sus comportamientos e interacciones, tomar decisiones y solucionar problemas. Lo anterior se pretende lograr mediante una metodología de estudio centrada en el alumno a través de lluvias de ideas, métodos exploratorios e institucionalización de los contenidos u objetos matemáticos, trabajo de investigación en terreno para revisar la forma en que estos contenidos son tratados en el mundo laboral relacionado con las ciencias económicas y administrativas; así como también incentivar el trabajo en equipo y finalmente fomentar en los estudiantes actitudes de aprecio, seguridad y confianza hacia el quehacer matemático.

El programa de la asignatura se ha dividido en tres unidades: cuyo objetivo general es "Aplicar estrategias para el análisis, interpretación y comunicación de resultados en la resolución de problemas relacionados con las ciencias Económicas y administrativas"

I Unidad: Algunas estrategias para el desarrollo del Pensamiento Matemático

II Unidad: Actividades que desarrollan el Pensamiento Matemático

III Unidad: Introducción a la Modelación

Metodología de enseñanza y Actividades a realizar por el estudiante para lograr el aprendizaje:

Trabajo en grupo en el desarrollo y análisis de situaciones problema que permitan desarrollar la aptitud lógica, espacial y numérica; elaboración, entrega y defensa de los resultados obtenidos.

Planificación de la Unidad

(EJEMPLO)

Interrogantes previas.

¿Qué quiero que los estudiantes aprendan en esta Actividad?; ¿Cómo van a aprender ese contenido los estudiantes y de qué forma se desarrollará la actividad?; ¿Para qué es necesario que aprendan este contenido?

Nombre de la actividad:............ Curso en que se aplica:......................... ....

Tema de la clase:..................... Etapa del curso en que se sitúa esta clase:............

Aspectos a observar y/o evaluar:

Del trabajo propiamente tal: comprensión e interpretación de la situación problema planteada, identificación de datos, variables y relaciones entre ellas, estrategia utilizada, análisis e interpretación y comunicación de resultados (uso de una rúbrica)

Del trabajo en equipo: actitud al trabajo en equipo (respeto, empatía, tolerancia etc.), participación y colaboración (uso de una lista de cotejos)

De la situación problema planteada: que aprendan a movilizarse en los diferentes cambios de registro.

De la evaluación: crear cultura de evaluación, lo que implica responsabilidad y autocrítica al momento de autoevaluarse y evaluar a sus compañeros

Secuencia Didáctica

Objetivo general:

Lograr que el alumno se pueda movilizar entre los diferentes cambios de registro (verbal, algebraico y gráfico) en la resolución e interpretación de una situación problema.

Instrucciones para desarrollar la actividad

Evaluación: Autoevaluación, Co-evaluación y Heteroevaluación (rúbricas y lista de cotejos)

Situación problema:

Don Arturo, propietario de una parcela en Panquehue (pueblo cercano a San Felipe) fue notificado por el MOP (Ministerio de Obras Públicas) que su parcela sería expropiada en 20 metros de frente, con el fin de ampliar la carretera Valparaíso - Cristo Redentor. Como indemnización se le darían 30 metros de ancho del terreno colindante al lado derecho de su parcela, el cual posee las mismas características del suyo en términos de explotación agrícola.

Si el ancho de la parcela de don Arturo mide 100 metros más que el largo ¿Cuáles deberían ser las dimensiones mínimas de su parcela para que Don Arturo acepte favorablemente la propuesta, sin tener que interponer un recurso de protección ante la Corte de Apelaciones?

Construya un esquema gráfico de la situación planteada

Plantee la inecuación que le permite resolver el problema

Resuelva la inecuación planteada en b)

Represente gráficamente las funciones cuadráticas asociadas a la inecuación, luego achure la región de aceptación y de rechazo de la propuesta

Analice e interprete los resultados obtenidos

Competencias a desarrollar:

Capacidad de comunicación oral y escrita; capacidad de abstracción, análisis y síntesis; capacidad de crítica y de autocrítica; capacidad para integrar equipos.

Subcompetencias a desarrollar: comprender e interpretar diversos registros de representación; aplicar estrategias para el análisis e interpretación en la resolución de problemas; capacidad para cambiar sus paradigmas respecto del trabajo intelectual, alejándose de lo reproductivo para centrarse en lo transferencial, crítico y creativo; actitud, empatía, tolerancia, respeto y responsabilidad para el trabajo grupal basado en aprendizajes colaborativos.

Rol y actividades del profesor:

Al inicio: motivador de la actividad a realizar.

Durante el proceso: guía del aprendizaje, moderador de la actividad.

Fase final: Moderador en la exposición de los diferentes grupos, Institucionalizador de los contenidos u objetos matemáticos involucrados en la actividad; evaluador del trabajo de loa alumnos.

Rol y actividades de los estudiantes:

Al inicio: Estar atento a las indicaciones del profesor, predisposición al trabajo en equipo.

Durante el proceso: participación activa en su grupo de trabajo, poner en juego actitudes valóricas, consensuar una estrategia adecuada que le permita abordar el problema planteado, ejecutar la estrategia seleccionada

Fase final: entrega de informe con los resultados obtenidos, análisis e interpretaciones de los mismos; exponer los resultados obtenidos, autoevaluarse, evaluar tanto a sus compañeros de grupo como a los demás grupos.

Reflexión Grupal

La modalidad de trabajo grupal o aprendizaje colaborativo es una instancia propicia para que el alumno trabaje en la construcción del conocimiento significativo, desarrolle sus habilidades y capacidades e incorpore a su proyecto de formación actitudes y valores; teniendo en cuenta que la apropiación colectiva de conocimientos favorece la adquisición individual. El tipo de actividad planteada permite un trabajo colaborativo donde el aprendizaje colectivo favorece el aprendizaje individual; además de permitir diferentes formas de evaluaciones.

Los resultados de la implementación de este curso han dado sus frutos, reduciendo en cifras importante el porcentaje de alumnos reprobados en las asignaturas de matemáticas I durante los dos últimos años en que se ha implementado: la tabla siguiente da cuenta de este hecho:

AÑO	2006	2007	2008	2009	2010	2012	2013
% Aprobados	26,7	35,4	50,6	58,3	59,8	65,4	73,3
% Reprobados	73,3	64,6	49,4	41,7	40,2	34,6	26,7

Pese a todas las limitaciones que esta propuesta didáctica pueda tener y que por cierto requiere ser mejorada semestre a semestre de acuerdo a las experiencias recogidas en su implementación, creemos que el esfuerzo desplegado para dejar en evidencia la problemática que envuelve el paso de la Educación Media a la Educación Superior- la ruptura didáctica planteada por la Universidad frente al nivel de Enseñanza Media- (reflejada en la Carrera de Auditoria de la UV y que es común a la mayoría de las Universidades del País), no ha sido en vano. Estamos consientes que la problemática no está resuelta, pero si hemos ido dando pasos importantes no solo al reconocer y asumir esta realidad, sino instar a poner todos los esfuerzos institucionales que sean necesarios para atacar el problema de raíz. No basta con la implementación de programas especiales de reforzamiento, de nivelación o propedéuticos, si éstos se desarrollan en un modelo tradicional de enseñanza.

Como planteamos al inicio de este trabajo, este da cuenta de la puesta en juego de una Secuencia de actividades, que difieren de lo tradicional, pata abordar ciertos conceptos matemáticos y darle un enfoque que va mucho más allá de su operatividad y de su manipulación algebraica. El uso del registro gráfico de forma más activa durante un proceso de enseñanza aprendizaje y específicamente las situaciones problemas contextualizadas que se proponen no es muy habitual en los estudiantes. Sin embargo, creemos que, si damos a los estudiantes la oportunidad de asociar el objeto matemático en estudio a un contexto grafico como el descrito las actividades incluidas en nuestra secuencia didáctica, éste puede enriquecer su concepto a través de la adquisición de sentido al desarrollo algebraico y significado del objeto matemático en estudio, al tener una visión alterna en otro contexto. "La distinción entre un objeto matemático y su representación es, pues, un punto estratégico para la comprensión de las matemáticas" (Duval R.: Registros De Representación Semiótica Y Función Cognitiva Del Pensamiento).

Es necesario también destacar el comportamiento y la actitud que han tenido los alumnos con los que hemos trabajado durante el transcurso de los dos semestre en que hemos implementado este programa, alumnos dispuesto a trabajar, participando activamente durante las realizaciones de las actividades propuestas, motivados (incluso de manera ansiosa e impulsiva) por la oportunidad de proponer estrategias de solución, de reflexionar, de debatir con sus compañeros sobre las posibles soluciones y más aún ser partícipe de su propia evaluación. Si bien sus producciones en el test de evaluación y en la primera secuencia didáctica fueron deficientes, estas fueron en alza en la medida que algunos conceptos y propiedades se fueron institucionalizando y erradicando ciertas concepciones previas erróneas.

De acuerdo con las experiencias recogidas durante estos semestres en que hemos implementados la asignatura descrita, estamos convencidos que actividades como las diseñadas (que por supuesto pueden ser mejoradas) indudablemente que son un aporte en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas al inicio de la Educación Superior, disminuyendo la gran brecha existente entre ambos niveles de Educación.

Referencias

George Polya; Como plantear y resolver problemas, Ed. Trillas.
Charles D Miller / Hugo Ibarra Mercado, Matemáticas: Razonamiento y aplicaciones; Pearson Educación 2006
Artigue et al. (1995) Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.
Brousseau, G. ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la
Didáctica de las Matemáticas? IREM, Université de Bordeaux, Francia.
Cordero, F.(2001) La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana
Del Rincón (1995) Técnicas de investigación en ciencias sociales, Madrid España.
Tesis de Magíster, R Araya, P Vázquez, C Mejias, PUCV, 2008.

Nivel de razonamiento y capacidades logradas por los estudiantes de primer año de enseñanza media en el aprendizaje de las isometrías

Autores: Cinthia Iglesias Mancini, Carlos Caamaño Espinoza
camilaiglesias13@gmail.com
Universidad Católica del Maule, Chile
Enseñanza Media, Razonamiento y Aprendizaje Matemático.

Resumen

Esta investigación determinó el Nivel de Razonamiento y las Capacidades logradas por estudiantes de Primer Año de Enseñanza Media, en el contexto del aprendizaje de la unidad Transformaciones Isométricas. Se consideró como objetivo general: Analizar el avance en los niveles de razonamiento geométrico y desarrollo de capacidades, que alcanzan los alumnos y alumnas de Primero Medio, de un Liceo Municipalizado de alta vulnerabilidad de la comuna de Talca, producto de la aplicación de una unidad de aprendizaje basada el modelo de los Van-Hiele.

El marco teórico en el que se basa esta investigación es en el Modelo de Razonamiento de los Van Hiele, quien propone una teoría de enseñanza y aprendizaje de la matemática, más específicamente de la geometría, secuenciando niveles de razonamiento por los que debe transitar el estudiante. Además, se sustenta en el sistema de evaluación de grados de adquisición de los distintos niveles de razonamiento propuestos por Adela Jaime (1993), clasificados en base a tipos de respuestas dadas por los estudiantes. El modelo de preparación de la Enseñanza se basó el Plan de Clases del Modelo Japonés (Isoda, Arcavi y Mena, 2007), además de la incorporación de un estudio Histórico Epistemológico de las Transformaciones Isométricas, como objeto matemático de estudio.

En relación a los métodos de investigación son de tipo cuali-cuantitativo de corte cuasi-experimental, ya que existió un grupo de control y un grupo experimental (anteriormente establecidos) en la cual se manipuló de manera intencionada una variable independiente (Unidad de Transformaciones Isométricas basada en los Niveles de Razonamiento de los Van Hiele, y el Plan de clases del Modelo Japonés), para ver cómo influye en una variable dependiente (Nivel de Razonamiento en que quedan los alumnos tras la implementación de la Unidad), de pre y post test.

En las estrategias de recopilación de la información, se utilizaron dos pruebas equivalentes, validadas por un comité de expertos a modo de pretexto (una para cada grupo), secuenciadas gradualmente de acuerdo a los niveles de razonamiento y dos pruebas de postest con las mismas características anteriormente mencionadas.

Los métodos de análisis utilizados inicialmente fue la validación de los instrumentos utilizados a

través del alfa de Cronbach, obteniéndose los siguientes valores en el grupo de control α = 0,959 (pretest) y α = 0,989 (postest); y α = 0,975 (pretest) y α = 0,975 (postest), en el grupo experimental.

Para analizar los logros y capacidades alcanzados por los alumnos, en cada ítem de los instrumentos, se elaboró una pauta de evaluación, en la cual fueron consideradas distintas categorías con sus respectivas subcategorías descritas en la definición de las variables de investigación. Con dichas pautas cada integrante del equipo de investigación realizó la revisión de los test, correcciones que posteriormente fueron validadas mediante la triangulación de ellas. La codificación utilizada fue:

1: No contesta (NC)

2: Contesta incorrectamente (CI)

3: Contesta parcialmente, se confunde en el proceso (CP)

4: Contesta correctamente, pero no finaliza el proceso (CNF) y

5: Contesta correctamente (CC).

Para analizar los Niveles de Razonamiento de los Van Hiele alcanzado por los alumnos, se utilizó el modelo planteado por Adela Jaime (1993), por lo que inicialmente se procedió a determinar el o los niveles a los que correspondía el respectivo ítem, para posteriormente determinar en nivel en que respondió cada alumno y, de acuerdo al tipo de respuesta, asignar el porcentaje del grado de adquisición de dicho nivel y la consolidación del mismo.

En relación con las variables de investigación, se consideró los logros y capacidades matemáticas desarrollados por los estudiantes. Para estudiar esta variable fue necesario realizar definiciones de las categorías con sus respectivas subcategorías. Se consideraron 3 categorías de análisis: Categoría 1: Aspectos Conceptuales. Donde se hace alusión a la explicitación y significado que los estudiantes dan a los conceptos y procesos matemáticos y el grado de relación que establecen entre los conceptos y el problema. Categoría 2: Aspectos Procedimentales y Categoría 3: Aspectos Comunicacionales. Clave en el trabajo de modelización, puesto que ayuda a comprender los temas enseñados y sus procesos de razonamiento.

De acuerdo al estudio, otra de las variables de investigación son los niveles de razonamiento en que responden los alumnos y los distintos tipos de respuesta que puedan dar (Adela Jaime, 1993).

Para el tratamiento de los datos se elaboraron dos pretest y dos postest (para el grupo de control y experimental, respectivamente), cada prueba con 7 ítems que fueron realizados de forma equivalente para efectos de comparación de resultados. Para el análisis de los logros y capacidades alcanzado por los alumnos, se evaluaron los 7 ítems y las categorías relacionadas con los aspectos conceptuales, aspectos procedimentales y los referentes a comunicación matemática, para ambas pruebas y ambos grupos.

Una vez triangulados los datos se ingresaron al SPSS para la realización de un tratamiento estadístico. A través de la utilización de este programa, se organizó la información en tablas de frecuencias relativas para cada problema tanto de la prueba inicial como de la prueba final, en relación a ambos grupos para realizar el análisis de la prueba t-student en cada uno de ellos. Se realizó la correspondencia entre cada problema y la categoría y subcategoría en la que cada uno se enmarcaba.

Para analizar los niveles de razonamiento de Van Hiele alcanzados por los alumnos, se asignó en cada una de las pruebas y por ítem, el nivel de Razonamiento empleado por el alumno para poder responderla, clasificando también su tipo de respuesta y, en base a dicha clasificación, se le estableció el porcentaje de adquisición del Nivel.

Una vez triangulados los datos se ingresaron al SPSS, para realizar un tratamiento estadístico:

- Con el objetivo de evaluar el grado de adquisición de los niveles de razonamiento en los estudiantes, se calculó la media aritmética de las ponderaciones asignadas a todos los ítems que pueden ser contestados en cada uno de los niveles, diferenciándolos por grupo y por prueba, con lo que se construyó tablas de frecuencias relativas porcentuales.

- Con el objetivo de evaluar la consolidación del Nivel de Razonamiento en base a los distintos tipos de respuesta en cada uno de los grupos, se construyó tablas de frecuencia relativas porcentuales, de acuerdo al Uso de Nivel de los Van Hiele.

- Para determinar el avance en cuanto a la Adquisición de los Niveles de Razonamiento en cada uno de los grupos se realizó la prueba T para muestras relacionadas, comparando su prueba inicial con su respectiva prueba final. No pudiéndose realizar la prueba T para muestras independientes con el objetivo de comparar los resultados obtenidos por ambos grupos, debido a que las muestras estudiadas no son homogéneas, siendo el mayor inconveniente la disparidad en su tamaño.

- Para determinar el Nivel de Razonamiento alcanzado por los estudiantes de ambos grupos, antes y después de la implementación de la Unidad "Transformaciones Isométricas", se calculó la media aritmética de los porcentajes de adquisición de cada uno de los niveles, en relación a cada uno de los alumnos, para posteriormente calcular una media aritmética general respecto a cada uno de los Niveles de Razonamiento.

La población objetivo de este estudio fueron los primeros medios de un liceo municipalizado de la comuna de Talca, de carácter científico humanista, que imparte clases desde primero básico hasta cuarto medio, con una matrícula efectiva que bordea los 335 alumnos (para el año 2008). Dentro de las principales características del establecimiento se pueden mencionar: Alto índice de vulnerabilidad, con un 79,3%; los alumnos provienen de diversos puntos de la ciudad, siendo la mayoría de ellos del sector oriente y rural de la comuna; con alto índice de deserción escolar con un 15% (el tercero más alto de e Talca). La muestra estuvo constituida por el primero "A", como grupo experimental y el primero "C", en calidad de grupo de control. Específicamente, para los fines de esta investigación, el curso 1° A, contaba con 25 alumnos, de los cuales, 19 alumnos rindieron el pre test y post test, mientras que el 1° C contaba con 11 alumnos, de los cuales sólo 7 de ellos rindieron el pre test y post test.

Para secuenciar la intervención con los estudiantes, se diseñó un Plan de Enseñanza de la Unidad, considerando el objetivo de la unidad, los puntos de vista del material didáctico, el comportamiento de los estudiantes, desde el punto de vista conceptual, procedimental y actitudinal, se consideró la asignación de tiempo, para la unidad y para cada tema, los objetivos de la clase, las directrices de la enseñanza. Posteriormente, se estableció un plan de evaluación, con sus respectivos criterios. Se asignó tiempos para cada contenido y la preparación de un plan para desarrollar el contenido de cada clase y la forma de evaluarlas.

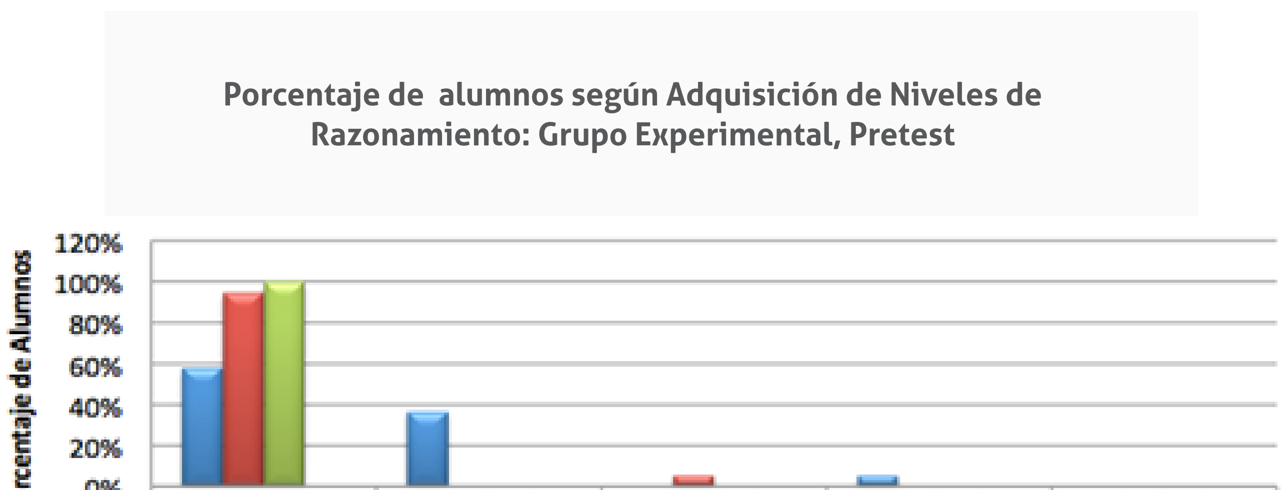
Finalmente, se elaboró una unidad didáctica basada en el Plan de Clase del Modelo Japonés y secuenciando las actividades en base a los Niveles de Razonamiento de Van Hiele.

Para analizar los resultados obtenidos tras la intervención, se ordenó en dos etapas: En la primera se presenta el análisis de los Niveles de Logro alcanzados por los estudiantes y en la segunda se presenta el Análisis de los Grados de Adquisición de los Niveles de Razonamiento de los Van Hiele.

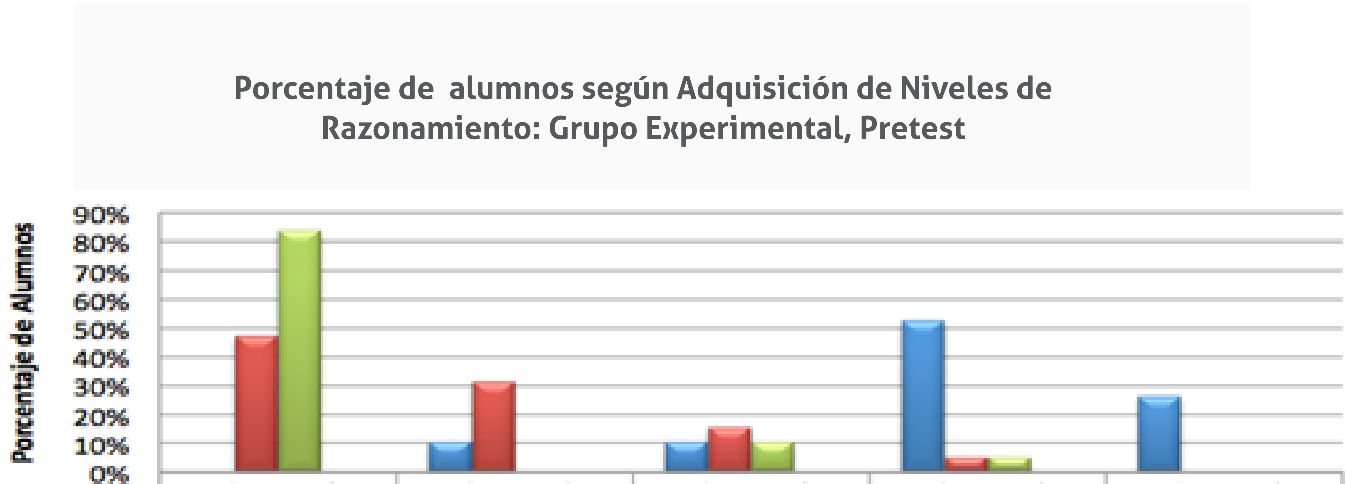
En la primera parte del análisis de los Niveles de Logro se presenta en relación a cada uno de los problemas presentes en la prueba, tanto como para pretest, postest grupo experimental y grupo de control, haciendo uso de las frecuencias relativas.

Para comparar los grupos, se realizó una prueba T en cuanto a la evaluación de logros y sus capacidades, diferenciando entre grupo de control y grupo experimental, en cada problema y por cada uno de sus indicadores.

Para realizar el análisis del Grado de Adquisición de los Niveles de Razonamiento de los Van Hiele se realizó un Análisis del tipo Descriptivo Interpretativo para ambos grupos, tanto en el pretest y Postest. Los resultados del grupo experimental fueron los siguientes:



	Adquisición Nula	Adquisición Baja	Adquisición Intermedia	Adquisición Alta	Adquisición Completa
Nivel 1	57,89%	36,84%	0%	5,26%	0%
Nivel 2	94,70%	0%	5,26%	0%	0%
Nivel 3	100%	0%	0%	0%	0%
Nivel 4	0%	0%	0%	0%	0%



	Adquisición Nula	Adquisición Baja	Adquisición Intermedia	Adquisición Alta	Adquisición Completa
Nivel 1	0%	10,52%	10,52%	52,63%	26,31%
Nivel 2	47,36%	31,57%	15,78%	5,26%	0%
Nivel 3	84,21%	0%	10,52%	5,26%	0%
Nivel 4	0%	0%	0%	0%	0%

Posteriormente se realizó un Análisis de resultados de acuerdo a prueba T, en cuanto a la Adquisición de los Niveles de Razonamiento.

A continuación, se realizó un Análisis descriptivo-interpretativo de la Consolidación del Nivel de Razonamiento de los Van Hiele mediante Tablas de Frecuencia para los Pre test en Relación al Grupo Experimental (GE) y al Grupo de Control (GC) y Tablas de Frecuencia para los Post test en Relación al Grupo Experimental (GE) y al Grupo de Control (GC)

Finalmente se realizó un Análisis de los Niveles de Razonamiento en promedio adquiridos en ambos grupos, en relación a las pruebas rendidas.

En general, se puede concluir que el progreso en cuanto al porcentaje de adquisición de los niveles de razonamiento, es notoriamente más alto en el grupo experimental que en el grupo de control, ya que en cada uno de los tres niveles de razonamiento evaluados se obtuvieron diferencias significativas, a diferencia del grupo de control, que en solo uno de los tres niveles evaluados se produjeron diferencias significativas.

Las conclusiones que se establecieron a partir de esta investigación, son principalmente que los datos entregados por las tablas de estadísticas de prueba t-student para ambos grupos, nos muestran que las diferencias significativas obtenidas por los alumnos del grupo de estudio, se puede rescatar que sólo el 12% de los criterios fueron avances no significativos, y que en un 6% no se produjo ningún tipo de avances, el resto fueron avances significativos y altamente significativos. Lo que se contrasta con los resultados obtenidos por los alumnos del grupo control, donde en el 48% de los criterios no se produjo avance significativo y en un 7% de los criterios no produjo ningún tipo avance.

Por lo anteriormente expuesto se puede concluir que la unidad diseñada para esta investigación, es altamente eficaz, ya que desarrolla en los alumnos un avance significativo en los Niveles de Logro alcanzado por ellos.

Tras la implementación de la Unidad Transformaciones Isométricas, y al realizar el contraste entre el pretest y el postest rendido respectivamente por cada uno de los grupos, se aprecia que el progreso obtenido en el grupo de control, en relación al grado de adquisición de los Niveles de Razonamiento, es significativo sólo en el Nivel 1 de Reconocimiento, no produciéndose avances significativos en los Niveles de Análisis y de Clasificación. En contraste con en el grupo experimental y en relación al mismo criterio, se produjo un avance altamente significativo tanto en el Nivel de Reconocimiento como en el de Análisis, mientras que, en el tercer Nivel de Clasificación se produjo un avance significativo.

Respecto a lo anteriormente expuesto, se puede concluir que, en el grupo experimental, se produjo un mayor avance en el Grado de Adquisición de los Niveles de Razonamiento, a diferencia del grupo de Control, en el que se no se produjo avances mayormente significativos.

En relación a la Consolidación de los Niveles de Razonamiento de los Van Hiele, en el grupo de control, se concluye que una vez implementada la Unidad "Transformaciones Isométricas" los estudiantes se encuentran en un Nivel medio de adquisición del Nivel 1 de Reconocimiento, pero aun así se encuentran comenzando la adquisición del Nivel 2, de Análisis. Análogamente, en el grupo experimental, se tiene que los alumnos están terminando la adquisición del Nivel 1 de Reconocimiento y comenzando la adquisición del Nivel 2 de Análisis.

Al contrastar los resultados expuestos anteriormente, se observa que tanto el grupo de control y el grupo experimental, lograron similares grados de Adquisición de los Niveles de Razonamiento de los Van Hiele. Sin embargo, si se comparan las diferencias en los grados de avance en la adquisición de dichos niveles, para cada uno de los grupos, se observa que fueron altamente significativas a favor del grupo Experimental, debido a que el grupo experimental presentaba inicialmente un Grado de Adquisición menor de los Niveles de Razonamiento en relación el grupo de control.

Por los análisis realizados en relación a los Niveles de Logro, Niveles de Razonamiento de los Van Hiele y Medición del Grado de Consolidación de estos mismos, se puede concluir que la implementación de la Unidad Didáctica en el Grupo Experimental es altamente eficaz, ya que en cada uno de los aspectos se obtuvieron diferencias significativas y altamente significativas, a diferencia de los resultados obtenidos en el grupo Experimental.

Referencias

Jaime, A. (1993): Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las Isometrías del Plano. La evaluación del Nivel de Razonamiento Tesis de Doctorado, Universidad de Valencia.

Huerta, P. (1999). Los Niveles de Van Hiele y la Taxonomía: Un análisis comparado, una integración necesaria. Universidad de Valencia.

Isoda, M., Arcavi, A., & Lorca, A. (2007). El estudio de

Clases Japonés en Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Thaqi, X. (2009). Aprender a Enseñar Transformaciones Geométricas en Primaria desde una Perspectiva Cultural. Tesis Doctoral, Universidad de Barcelona.

Godino, J., & Ruiz, F. (2002). Geometría y su Didáctica para Maestros. ReproDigital, Granada.

Habilidades matemáticas en profesores en formación: Una experiencia en el proyecto del fondo de fortalecimiento de habilidades matemáticas UMCE

Paulina Peña, Diego Escobar, Pedro Muñoz, Claudia Valenzuela, Leidy Bautista
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
paulina.pena@umce.cl; diego.escobar@umce.cl, academiapedro@gmail.com claudia_e_vg@yahoo.com; leidycbg@gmail.com
Media-Superior, Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática

Resumen

El presente trabajo constituye una experiencia en torno a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas desarrollada en el marco del Proyecto Fondo de Fortalecimiento UMC1299 de la UMCE. Se trata de la realización de talleres para mejorar las competencias relacionadas con el pensamiento matemático en estudiantes de primer año de las diferentes carreras de Pedagogía de esta Universidad. Este programa tuvo como propósito atender la diversidad de niveles en las competencias académicas de los estudiantes que ingresan a primer año, lo que se ha diagnosticado como un factor importante en la reprobación y deserción de estudiantes, así como en el atraso en los tiempos de titulación. Para esto, se propone abandonar el "enfoque basado en contenidos", para redirigirlo a un enfoque que busca que los y las estudiantes superen dificultades propias del aprendizaje de las matemáticas, adquiriendo seguridad y autonomía en el enfrentamiento de temas que involucran el razonamiento matemático, con el fin de que puedan hacer uso de éste en distintas situaciones de la vida cotidiana o profesional.

Introducción

Al revisar los actuales programas de estudio del sistema escolar, en particular los de matemática, se advierte que tiene una fuerte inspiración en los que los pedagogos y psicólogos del aprendizaje llaman *Procesos de Infusión curricular* los cuales hacen referencia a "el esfuerzo de un profesor, centro educativo o sistema escolar, por organizar la instrucción específica relacionada con el desarrollo profesional, como formando parte de un currículum de asignaturas ya existentes"(Rodríguez, 2002, p.113). Este enfoque ha tenido bastante eco en los programas de estudio diseñados en este último tiempo.

El método de infusión, para muchos especialistas, es descrito como "una forma de enseñanza de habilidades del pensamiento directa, explícita, interactiva y paralela al contenido del currículo", al cual, a partir de la revisión de nuestros programas de estudio, podemos además agregarle la incorporación de aspectos actitudinales, que en conjunto con las habilidades y conocimientos dan cuenta de lo que el Ministerio de Educación denomina una *formación integral*. Esta propuesta ofrece varias ventajas sobre aquellos métodos y programas de enseñanza que promueven la transferencia a través de los contenidos, esperando que sean éstos los que propicien los espacios y contextos a partir de los cuales los estudiantes desarrollen ciertas habilidades, las que deben ser transferidas, una vez asimiladas, a otras situaciones.

Sin embargo, este modelo sucumbe frente a su propio peso al tener que abordar en forma integral contenidos conceptuales, habilidades específicas y transversales; lo que se traduce en la práctica en que un porcentaje creciente de profesores, especialmente de matemáticas, desarrollen los programas de estudio con un *enfoque basado en los contenidos,* donde el docente se presenta a los estudiantes como dueño de un conocimiento poco alcanzable, con menor énfasis en el desarrollo de habilidades, limitando así la posibilidad de promover en los alumnos habilidades de regulación de su aprendizaje.

Resultado de lo anterior es la creencia de que la matemática es materia reservada para unos pocos, lo que desarrolla en muchos estudiantes una suerte de profecía autocumplida: soy malo para matemáticas y, como consecuencia, *me va mal en matemática*. Estudios internacionales como el realizado por la OCDE (2013) confirman esta percepción, la que puede afectar el futuro académico de nuestros estudiantes, quienes tendrán a su vez la responsabilidad de propiciar en sus futuros alumnos aprendizajes en distintas materias, sintiéndose menos capaces en ciertas áreas. Por lo tanto, se hace necesario brindar la oportunidad a estos estudiantes de reencantarse con aquello que por mucho tiempo les fue esquivo.

Fundamentación Teórica

La presenta propuesta se basa en un hecho vastamente estudiado por los psicólogos del aprendizaje y por pedagogos, entre los que destacan Feuerstein, Falik y Rand: el pensamiento se aprende en forma separada del contenido, lo que convierte a la cognición en un elemento que se puede separar y transferir a otras esferas de estudio y contenidos. En otras palabras, el enfoque que proponemos tiene su vertiente en lo se ha llamado "El Currículo Cognitivo", corriente que tiene sus fundamentos en las teorías de Feuerstein, específicamente en la de Experiencias de Aprendizaje Mediado (EAM), la que se pone en práctica a través del Programa de Enriquecimiento Instrumental (PEI).

Es claro, que en el contexto de tiempo, espacio y experiencia, no es posible aplicar en toda su extensión este programa, sin embargo, basado en sus principios y hallazgos, los talleres se programaron en base a una secuencia de sesiones, inspirados en el PEI para, en la medida de lo posible, crear instancias de aprendizaje que permitan establecer entre el o la docente, experiencias de aprendizaje mediado, es decir, que los docentes a cargo, ayudados por la disposición de los estudiantes, puedan establecer un vínculo que los transforme en mediadores, no en instructores que "pasan materia".

En atención a la mencionada profecía autocumplida, que alude a los procesos internos involucrados en el proceso metacognitivo, también consideramos como referente la taxonomía propuesta por Robert Marzano y John Kendall (2007). Como se observa en la figura 1, esta taxonomía agrega, a los niveles cognitivos propuestos por Bloom, los niveles internos **metacognitivos**. La planificación de cada sesión tuvo a la base el propósito de reconocer las funciones cognitivas puestas en juego en, lo que Feuerstein llama,

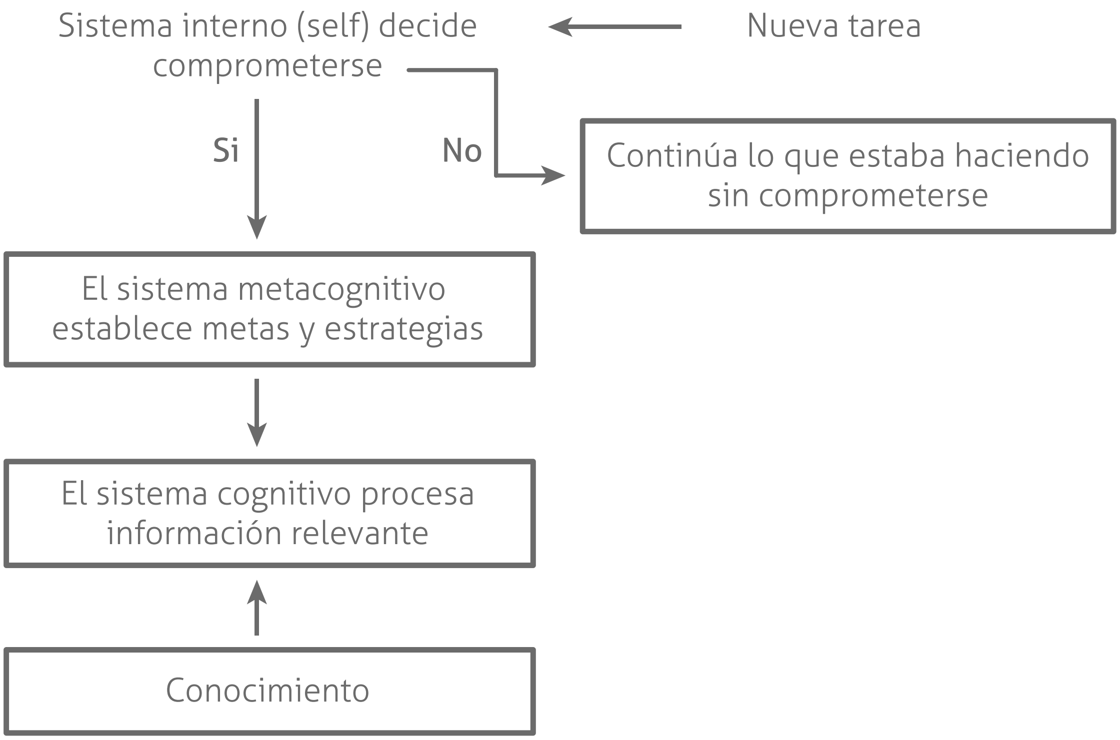


Figura 1. Modelo de conducta ante el aprendizaje (de Marzano y Kendall, 2007).

las Fases del Acto Mental. De esta forma se conforma una propuesta coherente en cuanto, una vez reconocidas las funciones cognitivas relevantes en todo tipo de razonamiento, y en particular, los que intervienen en matemática, se analizan las tres etapas del acto mental que están presentes siempre que el estudiante se enfrenta a una situación problemática: fase de entrada, de elaboración y de salida. Cada una de estas fases tiene propiedades que, en la medida que sea reconocida por el estudiante –de ahí la vertiente **metacognitiva** del proyecto– son atendidas de manera consciente y planificada, de forma tal que los aprendizajes adquiridos en una situación determinada, sean transferible a otras situaciones por novedosas que sean.

Hacia el diseño de la propuesta

Para implementar el programa de talleres, se aplicó una evaluación para diagnosticar las habilidades básicas de razonamiento matemático de todos los estudiantes que ingresaron a primer año a la universidad. Según los resultados obtenidos, se invitó a participar a los estudiantes que obtuvieron menor rendimiento, en talleres de 12 sesiones donde la mayor parte del trabajo se desarrollaba durante la sesión semanal de 1.30 hr.

Para el diseño de la propuesta se tuvo en cuenta que el objetivo primordial era desarrollar el pensamiento matemático los estudiantes de primer año de las carreras de Pedagogía de la universidad. Por lo tanto, su propósito no fue constituir un programa de reforzamiento de contenidos escolares, sino proponer reales desafíos para permitirles argumentar respuestas, escribir explicaciones y refutar o validar las respuestas de sus pares. Para ello nos apoyamos en la resolución de problemas que pusieran en juego diferentes distintos elementos dentro y fuera de la matemática, independientemente del contenido, solo se buscó que se abordaran distintas habilidades que consideramos preponderantes en la actividad matemática como lo son:

- Regularidades y patrones
- Formas y espacio
- Números y operaciones
- Tratamiento de la información
- Resolución de problema y
- Autorregulación del aprendizaje.

De cada una de estas habilidades se realizó una graduación por niveles de progreso, siendo el nivel 4 el grado avanzado y el nivel 1 el básico. Para ello realizamos un cuadro que permite observar el nivel de progresión y que al mismo tiempo permitió evaluar los resultados de los estudiantes que participaron del taller.

Desarrollo de los Talleres

Los talleres comenzaron consultando a los estudiantes su disposición hacia las matemáticas. La mayoría de los alumnos señaló no tener un buen rendimiento en esta materia y, si bien sentían que no eran buenos para ella, reconocían su importancia. En su experiencia escolar, percibían que los docentes seguían el ritmo de los alumnos que comprendían más rápido. Ocurría también que el profesor les ayudaba entregando parte de la respuesta; si bien esto permitía al estudiante "terminar" el ejercicio, se quedaba con la sensación de no haber sido él o ella quien logró resolverlo, profundizándose así el sentimiento de incompetencia, coincidiendo con lo que el Dr. Alberto Labarrere denomina "Ayuda prematura".

Respondiendo a lo observado en el diagnóstico, se trabajó en torno a dos ejes integrados: el metacognitivo y el emocional, para generar confianza en las propias capacidades en la resolución de problemas. Se puso énfasis en desarrollar la capacidad de tomar conciencia de los procesos mentales que se ponen en juego cuando resuelven un problema: se les enseñó diferentes estrategias de revisión de los pasos seguidos con el propósito de verificar si se había cometido un error de procedimiento. Asimismo, se les preparó para ser capaces de planificar estrategias para abordar un problema, evitar la impulsividad, las acciones mecánicas y, en el caso de los pasos rutinarios, se les hace ver que estos tienen una secuencia que les da sentido. En la revisión de estos procesos, se les invitaba a reflexionar sobre las estrategias docentes implementadas, para tomar consciencia de que la relación que desarrolle un niño o joven con las matemáticas –y de hecho, con cualquier disciplina - depende en gran medida de rol del docente.

Se trabajó en el reconocimiento de patrones y regularidades, primero en situaciones lúdicas, numéricas, geométricas o pictóricas, luego en situaciones formales como la relación entre el número de diagonales de un polígono y el número de lados, comprendiendo que lo importante era hallar el patrón y expresarlo algebraicamente y no, como pensaban muchos, tener que memorizar una fórmula compleja. En cada caso se les proporcionó el tiempo y la ayuda necesaria - en términos de mediación -logrando que fuesen los estudiantes quienes se atribuyeran el logro, recuperando confianza en sus capacidades.

RÚBRICAS DE EVALUACIÓN TALLER DE DESARROLLO DE HABILIDADES DE RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Nivel de logro	Regularidades y Patrones	Formas y Espacio	Números y Operaciones	Tratamiento de la Información	Resolución de Problemas	Auto regulación del aprendizaje
4	Infiere regularidades o patrones de un conjunto de elementos, expresados ya sea en forma numérica o pictórica (geométrica), y la expresa utilizando un lenguaje algebraico y, a partir de ésta, determina el valor de un elemento ubicado en una posición cualquiera.	Identifica formas bidimensionales y tridimensionales haciendo abstracción de propiedades, relaciones y representaciones de las mismas.	Desarrollan, sobre la base de la regla de un sistema de numeración dado, el algoritmo en que se basan las operaciones de División, multiplicación suma y resta.	Infiere y predicen nueva información a partir de la información representada en un gráfico de barras, de puntos o poligonal, pictograma o gráfico circular.	Resuelve problema planteados verbalmente, que involucran **dos Inferencias,** identificando los datos relevantes de los irrelevantes.	El estudiante es capaz de reconocer y aplicar, en forma deliberada, estrategias que permite abordar en forma eficiente, efectiva y con eficiencia cognitiva, diferentes tipos de problemas matemáticos.
3	Infiere regularidades o patrones de un conjunto de elementos, expresados ya sea en forma numérica o pictórica y, a partir de ésta determina el valor de un elemento ubicado en una posición cualquiera repitiendo la regularidad (no la expresa algebraicamente)	Identifica formas bidimensionales y tridimensionales y establece relaciones entre ellas a partir de sus propiedades.	Desarrollan, sobre la base de la regla de un sistema de numeración dado, el algoritmo en que se basan las operaciones de multiplicación, suma y resta.	Infiere y predicen nueva información a partir de la información representada en un gráfico de barras, de puntos o poligonal y pictograma.	Resuelve problema planteados verbalmente, que involucran **una inferencia** e identifican los datos relevantes de los irrelevantes.	El estudiante es capaz de reconocer y aplicar, en formas deliberada, estrategias que permite abordar con éxito diferentes problemas matemáticos.
	Infiere regularidades o patrones de un conjunto expresado sólo en forma numérica, pudiendo determinar por repetición de la regla un valor cualquiera de la serie.	Identifica formas bidimensionales y tridimensionales a través de sus propiedades geométricas.	Desarrollan, sobre la base de la regla de un sistema de numeración dado, el algoritmo en que se basan las operaciones de suma y resta.	Infiere y predicen nueva información a partir de la información representada en un gráfico de barras, de puntos o poligonal.	Resuelve problema planteados verbalmente, **que No involucran inferencias,** identificando los relevantes de los irrelevantes.	El estudiante es capaz de planificar un procedimiento para abordar un problema matemático basado en procedimientos aplicados en otras situaciones semejantes.

Nivel de logro	Regularidades y Patrones	Formas y Espacio	Números y Operaciones	Tratamiento de la Información	Resolución de Problemas	Auto regulación del aprendizaje
2	*Dado un conjunto de elementos seriados, **No** reconoce el patrón que la determina.	Reconoce formas bidimensionales y tridimensionales a través de su representación gráfica.	Desarrollan, sobre la base de la regla de un sistema de numeración dado, el algoritmo en que se basa suma.	Infiere y predicen nueva información a partir de la información representada en un gráfico de barras.	Resuelve problema planteados verbalmente, que involucran **dos Inferencias,** identificando los datos relevantes de los irrelevantes.	El estudiante es capaz de explicar los procedimientos y pasos seguidos en la resolución de un problema matemático.
1 ó 0*						

Algunas conclusiones

A modo de conclusión y, en virtud de las evaluaciones, tanto formativas, al término de cada taller, como las intermedias y finales, se pudo advertir que el grupo de estudiantes que tuvo una participación sistemática, en términos de asistencia y regularidad, logró mejorar sus capacidades de planificación, monitoreo y éxito en los desafíos propuestos. Junto con lo anterior, su autoimagen y percepción de sus capacidades, y su concepto de matemática como una disciplina dura y exclusiva para una elite de la población, también había cambiado significativamente, ya manejaban conceptos, estrategias, resolvían juegos y desafíos.

En forma coherente con los resultados de la evaluación final, se advirtió después de cada sesión (en el momento de cierre de la misma), que los estudiantes lograron, en su mayoría, desarrollar habilidades de regulación de su aprendizaje, lo que quedó en evidencia en la forma que resolvían problemas, buscando estrategias que se adecuaran a las situaciones presentadas, describiendo en forma clara, precisa y ordenada los pasos desarrollados.

Finalmente quedó la percepción de que la matemática no era lo complicada que los estudiantes pensaban, algunos manifestaron que era la primera vez que podían resolver un problema por sí solos. Planteaban que en la clase el profesor siempre va a la par de los que *saben* y ellos alumnos un tanto rezagados se limitaban a copiar la respuesta o en su defecto aprendérselas por si salía un problema parecido al de la clase (cuando no era aprenderse la fórmula).

Durante los talleres se hizo presente la importancia de tomar consciencia de que la relación que desarrolle un niño o joven con las matemáticas depende en gran medida de rol del docente, aspecto que se espera estos estudiantes tengan presente en cualquier sea la disciplina que les corresponda enseñar.

Referencias

Labarrere, A. (2012): La solución de problemas, eje del desarrollo del pensamiento y las Competencias de Pensamiento Científico de los estudiantes en matemática y ciencias experimentales. En: Las Competencias de Pensamiento Científico desde 'las voces' del aula (47-82). Santiago: Laboratorio GRE-

CIA, Facultad de Educación Pontificia Universidad Católica de Chile.

Feuerstein, R y Hoffman, M.B. (1990). Programa de enriquecimiento instrumental. Madrid: Bruño.

Monereo, Carles. Hacia un nuevo paradigma del aprendizaje estratégico: el papel de la mediación social, del self y de las emociones. Electronic Journal of Research in Educational Psychology [en linea] 2007, 5 (Diciembre-Sin mes): [Fecha de consulta: 11 de noviembre de 2014] Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=293121946003> ISSN

Muria, I. Díaz, M. (2003). La enseñanza de habilidades de pensamiento desde una perspectiva constructivista. Recuperado de: http://sisbib.unmsm.edu.pe/BibVirtualdata/publicaciones/umbral/v03_n04/a21.pdf

OECD (2013): Mathematics Self-beliefs and participation in Mathematics related activities. En: Ready to learn: Students' Engagement, drive and self-beliefs- Volume III.

Rodríguez, M. (2002). Hacia una nueva orientación universitaria. Ediciones Universidad de Barcelona. P. 113.

Descubriendo la razón con base en la actividad

Nicolás González, Jesús Ortega, Jorge Tapia y Leonora Díaz
Universidad de Valparaíso, Chile
nicolas.gonzalez@alumnos.uv.cl ; jorge.tapia@alumnos.uv.cl ; jesus.ortegauv@gmail.com; leonora.diaz@uv.cl
Enseñanza y aprendizaje de la matemática

Resumen

Se exploran el conocimiento y uso sobre la razón matemática de estudiantes por medio de un experimento llevado a cabo por una pareja de estudiantes de inicio del ciclo medio. Se analiza si mediante el proceso de mezclar agua con azúcar, saborean el dulzor de una muestra testigo y establecen la razón de cantidades de agua y azúcar que están en juego por medio de sus papilas gustativas y de la réplica de tres mezclas de las que conocen su razón de cantidades. Los estudiantes responden a la pregunta ¿Qué es para ti la razón? Y se les solicita un ejemplo de ella en la vida cotidiana. Se entrega un análisis pormenorizado de las respuestas dadas por las estudiantes individualmente y luego en conjunto. Llama la atención que, en pareja, no infieren de sus mezclas anteriores y levantan nuevas.

Palabras clave: razón, estudiantes, mezcla, dulzor.

Introducción

Se reporta un estudio sobre el uso de la razón matemática por estudiantes, que inicia consultando por lo que entienden de razón y si la utilizan en la práctica. Es frecuente encontrar que los estudiantes se topen con obstáculos para trabajar con fracciones, y que es un tema difícil de aprender (Pinilla, 2009). ¿Pero qué pasara con las razones? ¿Será un problema de comprensión (Escolano Vizcarra y Gairín Sallán, 2005) o de conceptos? (Kerslake, 1986; Bezuk y Bieck, 1993; Mack, 1993; Kieren, 1993).

Como mencionan Godino y Batanero (2010), es importante estudiar con más detalle el uso que se hace del término "razón", ya que no siempre es sinónimo de "fracción", lo cual puede acarrear dificultades de comprensión para los estudiantes. Hoffer (1988) también alude claramente a estas distinciones. La idea clave para Godino y Batanero (op. cit., 2010) es que las fracciones son "cualquier par ordenado de números enteros cuya segunda componente es distinta de cero"; mientras que una razón es "un par ordenado de cantidades de magnitudes". Cada una de esas cantidades viene expresada mediante un número real y una unidad de medida. El hecho de que en las razones se refieran a cantidades de magnitudes, medibles cada una con sus respectivas unidades, implica las siguientes diferencias con las fracciones (Tomado de Godino y Batanero, Pág. 420):

Las razones comparan entre sí objetos

> heterogéneos, o sea, objetos que se miden con unidades diferentes. Por ejemplo, 3 alfajores por 500 pesos. Las fracciones, por el contrario, se usan para comparar el mismo tipo de objetos como "dos de tres partes", lo que se indica con 2/3. Según esto la razón 3 alfajores/500 pesos, no es una fracción.

Algunas razones no se representan con la notación fraccional. Por ejemplo, 10 litros por metro cuadrado. En este caso no se necesita, ni se usa, la notación de fracción para informar de la relación entre dichas cantidades.

Las razones se pueden designar mediante símbolos distintos de las fracciones. La razón 4 a 7 se puede poner como 4:7, o $4 \rightarrow 7$.

En las razones, el segundo componente puede ser cero. En una bolsa de caramelos la razón de caramelos verdes a rojos puede ser 10:5, pero también se puede decir que puede ser 10:0, si es que todos son verdes (no se trata de hacer ninguna división por 0).

Las razones no son siempre números racionales. Por ejemplo, la razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro C/D es el número π, que sabemos no es racional, o la razón de la longitud de la diagonal de un cuadrado a la longitud de su lado ($\sqrt{2}$). Esta es una diferencia esencial entre "razón" y "fracción", ya que como vimos las fracciones son siempre interpretables como cociente de enteros.

Las operaciones con razones no se realizan, en general, de igual manera que las fracciones. Por ejemplo, 2 aciertos sobre 5 intentos (2:5), seguidos de 3 aciertos sobre 7 intentos (3:7) se combinan para producir 5 aciertos en un total de 12 intentos, o sea, con estas razones se puede definir una "suma" de razones del siguiente modo: 2:5 + 3:7 = 5:12. Evidentemente esta suma no es la misma que la suma de fracciones.

Observamos que la razón puede relacionar cantidades (números reales) de la misma especie (homogéneas). También puede comparar cantidades de distinta especie que pueden constituir a nuevas magnitudes tales como la densidad poblacional, rapidez, aceleración, entre otras.

Al decir de Heat (1956) el concepto de razón estaría descrito como una relación en la que se comparan dos cantidades para averiguar *qué múltiplo, parte o partes, es una cantidad de la otra.* Esto se logra dividiendo el antecedente por el consecuente, lo que Heat llama una medición. Para este autor, no es que se manejen aritméticamente las razones al igual que las fracciones, más bien es una especie de herencia por la relación de medición que se establece entre ambas. Ello sería clave para evitar las confusiones entre razones, divisiones y fracciones recurrentes en aulas de matemáticas. En opinión de Riera (2000) recurriendo a esta acepción de Heat no existiría alguna restricción para que el consecuente de una razón (a diferencia del denominador de una fracción o el divisor en una división) sea nulo. Añade el autor:

> El problema está en medir una razón de tal naturaleza, lo cual no es posible resolver con las operaciones de números reales. Pero, además de este contratiempo, todo el manejo de las razones puede hacerse a través de fracciones, lo que no se reduce a un tema de notación, puesto que la diferencia clave estará en la interpretación de los resultados y más aún en qué se compara. (op. cit., 2000, p.78).

Buscando estudios sobre la enseñanza y el aprendizaje de los números racionales, pudimos encontrar que las razones son tematizadas como uno de los significados (o constructos) posibles de las fracciones (Kieren, 1988). El interés se pone directamente en la fracción y no en lo que la precedió, es decir, las razones aún no expresadas con fracciones. Uno de los trabajos que abordan sobre la articulación de las razones con las fracciones es el de Rousseau (1981) sobre una génesis escolar de las fracciones, en el que las razones desempeñan un papel implícito como precursoras de las fracciones. Este papel se retoma y analiza explícitamente en diversas situaciones en el estudio de Block (2001, 2006c). En todos los casos, el interés de la noción de razón para el aprendizaje de las matemáticas parece ocurrir, sobre todo, antes de que ésta se exprese con una fracción o bien independientemente de la fracción (Rouche, 1992, Pág. 26).

Metodología

Se estudió el conocimiento y uso de la razón por estudiantes de primer año de enseñanza media de un liceo politécnico.

Para la recolección de datos se utilizó una hoja con dos reactivos de desarrollo, a saber, *¿Qué es la razón? y Dé un ejemplo de su uso.* Para el experimento se dispuso una tabla para anotar, entre uno y tres intentos, las cantidades de agua y azúcar, en cucharadas, de cada mezcla.

Se entregó una hoja-cuestionario para trabajo individual y otra para trabajo grupal.

Se esperaba que los estudiantes, ayudándose del análisis de las producciones individuales, plantearan una razón para la mezcla testigo.

Pregunta de investigación

¿Se logró un mayor acercamiento al dulzor de la muestra testigo al trabajar en conjunto y usando la razón matemática?

Desarrollo de la investigación

Para este experimento se consultó en un colegio técnico profesional por estudiantes que pudieran colaborar. Se presentó la actividad a la jefatura técnico-pedagógica, la que nos derivara con el profesor de educación física, quien permitió que dos estudiantes que en ese momento no estaban participando de las actividades deportivas realizaran nuestra actividad. Se les entregó una hoja en la que se les preguntaba *¿Qué es para ti "razón"?* Una de las estudiantes responde *"es la forma de pensar de una persona"* y otra responde *"es saber que hacer o decir"* las cuales suscriben alguna de las acepciones de razón según la RAE y no refieren a la acepción de razón matemática. Aquí se aprecia la invisibilidad de la razón matemática entre las estudiantes.

Cabe señalar que, a pesar de la importancia concedida a las RPP (Razones, proporciones y proporcionalidad) en los currículos, autores como Vergnaud (1988, 1994), Post y Behr (1988), Adjiage y Pluvinage (2007), Martin et al. (2008), García y Serrano (1999) informan que los estudiantes no alcanzan niveles apropiados de aprendizaje en estas temáticas durante su ciclo escolar.

Enseguida se entregó a las estudiantes un vaso con una "mezcla testigo" de diez cucharadas grandes de agua tamaño "sopera" y tres cucharadas pequeñas (las usadas para el té) con azúcar, luego se les pasó dos vasos (una para cada una), dos cucharas (una pequeña y una grande) y una cantidad considerable de azúcar y agua. Se les explicó la actividad, que probaran la mezcla dada y que con los materiales entregados realizaran una mezcla con el mismo dulzor. Cabe destacar que el ambiente físico no era el mejor, puesto que, al estar en el horario de clases de educación física, la actividad se realizó al aire libre, con jóvenes haciendo deporte y con un gran bullicio, el cual perturbaba la concentración de las estudiantes experimentando. Otros de los factores perturbadores fue el viento, que las estudiantes trabajaran de pie y la disposición de estas al momento de empezar la actividad.

Al probar la muestra testigo, la estudiante 1 se decide por echarle ocho cucharadas de agua y tres de azúcar y de inmediato se da cuenta que la mezcla no es la misma, que era más desabrida. La otra estudiante (estudiante 2) se decide por iniciar con cinco cucharadas de agua y tres de azúcar. Como su compañera, se da cuenta que esta mezcla no presenta el mismo dulzor de la muestra testigo.

En su segundo intento, la estudiante 1 sigue con las ocho cucharadas de agua y como la mezcla anterior la encontró más desabrida, esta vez se decide por echarle una cucharada más de azúcar, llegando a la razón 8 es a 4, a su juicio corresponde a la muestra testigo, así que decide no hacer un tercer intento. La estudiante también decide seguir con sus cinco cucharadas de agua (en un nuevo vaso), pero como había encontrado su mezcla anterior más dulce, decide restar una cucharada de azúcar, es decir, su mezcla estuvo compuesta por cinco cucharadas de agua y dos de azúcar, llegando a su razón final de 5 es a 2, según ella, esta es la razón de la muestra testigo por lo que decide no hacer un tercer intento. Cabe destacar, es que en la hoja donde las estudiantes tenían que ir completando los datos de sus intentos no habían instrucción, solo las preguntas y sus respectivos cuadrados para que fueran respondidas y más abajo otro cuadro donde ellas tenían que ingresar los valores de las cucharadas que utilizaban en cada intento, y es por ello que la estudiante 1 no sabía si en su segundo intento tenía que colocar 8 es a 4 (ya que mantuvo las mismas cucharadas de agua y aumento en una las de azúcar) o tenía que colocar 8 es a 1 (debido a que aumento en una cucharada la cantidad de azúcar)

Finalmente realizaron la actividad de modo grupal, para que ambas puedan solucionar problemas y dificultades que se presenten, para el primer intento decidieron partir con una mezcla de siete cucharadas de agua y cuatro de azúcar (7 es a 4), por lo que comparando con la primera muestra, se dieron cuenta que esta no era la mezcla deseada ya que era más desabrida según ellas. Para su segundo intento, decidieron agregar más azúcar y mantener la proporción de agua, llegando a la razón 7 es a 6, uno de los comentarios que hizo una chica fue *"esta no es la mezcla, me sabe más a azúcar"*, la otra chica prueba la mezcla y reacciona diciendo *"no, esta mezcla sabe igual"*. Según Lafser (1944) el trabajo grupal tiene una meta en común, para este segundo intento, las alumnas deben de llegar a un consenso entre ellas para poder avanzar.

Luego las estudiantes prueban otra vez la muestra dada y conciben en que estaba más dulce, por lo que deciden que su tercer intento seria con más agua. Deciden echarle una cucharada más de agua y mantener la proporción de azúcar, llegando a la razón 8 es a 6, ambas prueban la mezcla y dicen *"¡esta igual!...esta igual, ¿no?", esta es la definitiva"* llegando así a su mezcla final. Nosotros le decimos que, si querían cambiar su respuesta final echándole más agua o más azúcar y cambiar su respuesta final, a lo que ellas responden "no, estas son iguales" (refiriéndose a las mezclas).

Al tratar una razón como una fracción para trabajarla matemáticamente se usa solo el aspecto cuantitativo dejando de lado lo cualitativo de la razón. Para entender mejor lo anterior, podemos ver en nuestro experimento, que al combinar agua y azúcar en cierta relación obtenemos una cualidad o atributo que describe esa mezcla, es decir, un dulzor, asociado a la razón que expresa la relación de cantidades de magnitudes, cualidad que queda ausente en el trabajo aritmético de las fracciones.

Análisis de resultados

La inquietud que motivó esta actividad es que la razón matemática nos es clara en el aula de matemáticas: ni para sus estudiantes ni para los demás agentes involucrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Al revisar las hojas de resultados, vemos que la estudiante 1 registró en su primer intento una razón de 8 es a 3, la cual arroja una mezcla más dulce que la razón de muestra que es de 10 es a 3, aun así, en su segundo y final intento agrega una cucharada más de azúcar, al contrario de lo que se esperaría que contestara guiándose por el gusto.

Su compañera (estudiante 2) realiza una mezcla de 5 es a 3, extremadamente dulce, aun así, en su segundo intento y tras realizar una nueva mezcla (botando la primera), decide solo restar una cucharada de azúcar, yendo en la dirección adecuada a diferencia de su compañera y acercándose más al dulzor que arroja la razón de la muestra testigo.

Al realizar el experimento como grupo, comienzan por una mezcla que no parece ser propia de los registros individuales del primer intento, más aún, el rumbo que toman los siguientes resultados llevan a una razón más dulce que todas las anteriores. Establecen una razón distinta de cantidades de agua y de azúcar.

Cabe observar que la actividad hubiese sido mejor si se hubiera ocupado goteros para medir agua o endulzante en la elaboración de las mezclas. Ello, pues con cuchara podría variar la cantidad de azúcar que le eche cada uno. También la sacarina es más soluble en agua que el azúcar ya que con agua se necesitaría una cierta temperatura para disolver el azúcar por completo.

Conclusiones

Las producciones estudiantiles individuales no fueron consideradas para realizar un trabajo en conjunto, puesto que al realizar un trabajo en conjunto comienzan a relacionar cantidades distintas. El trabajo conjunto las lleva a distanciarse de la razón de muestra. Pudiera deberse a una pérdida de sensibilidad en las papilas gustativas producto de un exceso de ingesta de azúcar, produciendo una pérdida en la capacidad de medir.

Se registra una razón más lejana de la propuesta. Se sustentaron en todo momento en sus papilas gustativas y no se apoyaron en los datos matemáticos que tenían escritos, es decir, no recurrieron a la razón matemática como una herramienta eficaz para establecer las cantidades de azúcar y agua en juego en la muestra testigo.

Podemos ver que utilizaron la comparación entre las muestras, pero no hubo un análisis de los datos registrados en cada intento ni síntesis en la respuesta conjunta, pasando desapercibida la razón matemática. Si bien, el solo hecho de expresar numéricamente este experimento del dulzor en una hoja, exhibe indicios que pueden ser precursores para una construcción con significado por los estudiantes de la razón matemática.

Referencias

Ramírez, M. y Block, D. (2009) "La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares". En: Educación Matemática. Vol 21 (1). México, D.F.: Santillana, pp. 63-90.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1975) "La psicología del niño". Madrid: Morata.

Flores, R. (2010) "Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria". Madrid: Morata. Instituto Politécnico Nacional. México, D.F.

Quispe, W. (2011) "La Comprensión de los Significados del Número Racional Positivo y su Relación con sus Operaciones Básicas y Propiedades Elementales". Universidad nacional de educación. Lima: Perú.

Hoffer, A. R. (1988). "Ratios and proportional thiking". En Th. R. Post (Ed.), Teaching mathematics in grades K-8. Boston: Allyn and Bacon.

Rouche, N. (1992) acerca del sentido de la medida.

Hall, H.S. (1958) – Knight, S.R. Algebra Superior, Editorial "UTEHA"

Lafser, W. (1944) "Personality and behavior disorders". N.Y. Ronald press.

Riera, G. (2000) Proyecto MECE, Matemática 1° Medio (Texto estudiantil), Editorial Zig-Zag.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2010) "Proporcionalidad, Matemáticas y su Didáctica para maestros". Universidad de Granada, España.

Pinilla, F. (2009) "Fracciones aspectos conceptuales y didácticos".

Freudenthal, H. (1983) "Didactical phenomenology of mathematical structures". Mathematics Education Library. Boston, Reidel.

La noción de fracción en su faceta de medida

Margarita Cortés T.; Enio Rivas M., Guisell Sepúlveda G., Leonora Díaz M.
Universidad Central, Chile
m.cortes.toledo@gmail.com;eniorivas.m@gmail.com;guisell.s.g@gmail.com,leonoradm@yahoo.es
Educación Superior. Enseñanza y aprendizaje de la matemática

Resumen

Esta ponencia reporta dificultades en el aprendizaje de los estudiantes con respecto a las facetas de fracciones. Varios autores las tipifican, asociando a la fracción las facetas de parte-todo, cociente, razón, operador y medida. El estudio que se reporta se enfoca en la faceta de medida. Con base en la aplicación de preguntas a estudiantes de 7° y 8° básicos escogidos aleatoriamente, se evidenció dificultades en la faceta de fracción, siendo las de parte-todo y operador las facetas más vistas en las aulas, mientras que, la faceta de medida suele ser marginada en el proceso de enseñanza. La problemática se aborda desde una pregunta orientadora ¿Cómo ayuda a los estudiantes a configurar la noción de fracción cuando trabajan midiendo? Las respuestas de los estudiantes a las preguntas con respecto a la faceta de medida fueron disímiles. Tras los resultados obtenidos por medio de reactivos planteados se logró evidenciar el escaso conocimiento de ésta faceta, sin embargo, los registros de los estudiantes logran representar el concepto básico de la fracción a partir de la medida de un objeto. Esta investigación invita a plantear preguntas que aborden más a indagaciones profundas, relacionadas con la faceta medida aportando alternativas para su enseñanza. Este estudio se propone abordar más adelante la respuesta a la pregunta ¿Cómo los estudiantes se enfrentan a la valoración de magnitudes como la velocidad, tiempo y temperatura, tras trabajar con la faceta de medida?

Palabras claves: fracciones, faceta de medida

Introducción

La problemática de los aprendizajes de fracciones en sus diversas facetas es apreciada por diversos autores. A pesar de ello resta tratarla a fondo en el aula de matemáticas. Una de sus aristas son las dificultades con respecto a la operatoria de fracciones en el segundo ciclo de básica. Un ejemplo de ello es lo señalado por el estudio INCE (2002), referido en el texto de Escolano y Gairín (2005):

La instrucción sobre los números racionales positivos ocupa una parte muy destacada de la Aritmética que figura en los currícula oficiales de la Enseñanza Primaria de España. Sin embargo, un estudio del INCE con alumnos españoles de sexto curso de Educación Primaria (12 años) concluye que son casi tres de cada cuatro los que tienen dificultad para comprender el concepto de fracción y operar con fracción (INCE, 2002, pág. 2, Escolano y Gairín, 2005, pág. 1).

Por su parte Rebeca Flores (2009) señala que: "Así mismo se reconoce la necesidad de conceptualizar a la fracción a través de todos sus significados, puesto que una opción de enseñanza con solamente una o más de ellos resulta ser inadecuada" (Flores, 2011, pág. 5).

Se reporta un estudio de caso con tres estudiantes de fines del ciclo básico de un colegio municipal de la comuna de Puente Alto. Inicia planteándose preguntas orientadoras con el fin de recoger evidencias acerca de los entendimientos estudiantiles acerca de las facetas de las fracciones, a saber, ¿Qué problema presentan los estudiantes al trabajar con fracciones? y ¿Qué problema presentan los desarrollos del estudiante de fines del ciclo básico al trabajar con fracciones? Entre las facetas de parte-todo, operador y medida las evidencias muestran que la faceta que presenta mayor dificultad es la de medida. Prosigue entonces el estudio con una tercera pregunta orientadora ¿Cómo ayuda a configurar la noción de fracción en los estudiantes de fines del ciclo básico cuando trabajan "midiendo"? de cuya respuesta se ocupa esta ponencia.

Marco Teórico

Existen diversos autores que interpretan a la fracción desde la faceta de medida. Por ejemplo, Escolano y Gairín (2005) definen esta faceta de la siguiente forma:

Consiste en fraccionar la unidad de medida con la finalidad de crear una subunidad que esté contenida un número entero de veces en la cantidad a medir. La elección de esta subunidad se logra mediante un proceso de ensayo y error y existen múltiples subunidades para medir una misma cantidad. El resultado de la medida se expresa mediante una fracción. (Escolano y Gairín, 2005, p. 12)

Otro autor que resalta la importancia de esta faceta es Rouche (2006, citado en Díaz y Castro, 2011). Asimismo, se cuenta con varios reportes de experiencias de diseño y experimentaciones realizadas en Chile que develan entendimientos de las fracciones en sus facetas de parte todo, medida y razón (Andrade, Díaz y Cabañas, 2012; Acevedo, 2010; Moya, Palma, Rojas, Ulloa y Díaz, 2006; Díaz, 2009; Díaz y Castro, 2009).

Díaz y Castro (op. cit., 2011) se preguntan ¿De dónde parten las fracciones? Para afirmar enseguida que éstas surgen por motivos prácticos, que no emergen como una necesidad del desarrollo histórico de la matemática. Añaden:

Al parecer, la división inexacta da lugar a la fracción, con base en la actividad de medir. Los requerimientos de exactitud en la medida llevan a los fraccionamientos de patrones y de unidades de medida. Es un todo que no resulta partido en enteros iguales. Para su enseñanza y en el marco de la matemática de la variación, nos parece relevante incentivar unos significados fluidos, dinámicos y versátiles de las fracciones con base en sus facetas... No dejar asociada a una sola situación la actividad escolar con las fracciones. Articular con solución de continuidad la actividad humana con las fracciones, identificando una familia de actividades que les son características... (Díaz y Castro, 2009, p. 5).

Estos autores distinguen a las facetas de (a) Medida para los egipcios; (b) Medida y razón en Euclides; (c) Razón en probabilidades; (d) Medidas expresadas en tasas, índices, factores unitarios; y, (e) Medida y Operador. Se suscribe en este estudio la preocupación de los autores mencionados por ampliar las situaciones a las que se recurre en la actividad escolar con las fracciones.

Metodología

Se desarrollan las etapas del estudio guidas por una pregunta orientadora según una espiral recursiva, metodología que se inscribe en el marco mayor de la investigación-acción. Se inicia con la pregunta orientadora ¿Qué problema presentan los estudiantes al trabajar con fracciones? para seguir con la pregunta orientadora ¿Qué problema presentan los desarrollos del estudiante de fines del ciclo básico al trabajar con fracciones? Los desempeños estudiantiles en sus respuestas a los reactivos que operacionalizan estas preguntas evidenciaron que no es habitual el uso de la faceta "fracción como medida". Entonces la tercera pregunta orientadora se centró en dicha faceta: ¿Cómo ayuda a configurar la noción de fracción en su faceta de medida en los estudiantes de fines del ciclo básico, cuando trabajan "midiendo"? Para abordarla se consideran las magnitudes de longitud, superficie y volumen. Se miden longitudes a partir de la acción de superponer sin traslapar un patrón de medida. A partir de un cierto número de superposiciones se requeriría fraccionar el patrón. De modo análogo ocurre para el caso de la superficie. En el caso del volumen de un cuerpo, se cuantifica el espacio ocupado por el cuerpo considerando una unidad de medida. El reactivo correspondiente evidencia una técnica para medir el volumen mediante la exhaución de un líquido. Es recomendable en los tres casos comparar distintas unidades de medidas con el fin de valorar el mismo objeto.

En este tercer cuestionamiento de investigación se operacionalizó la pregunta orientadora en reactivos que se aplicaron a tres estudiantes que cursan 7° y 8° grado de enseñanza básica de distintos colegios de la comuna de Puente Alto. Los reactivos fueron entregados con un formato de guía donde se especifican las instrucciones y se indica el uso de lápiz grafito y goma. Los reactivos ofrecieron espacio para que los estudiantes trabajaran midiendo y se familiarizarán de este modo con la faceta de medida de la fracción.

A continuación, se presentan los reactivos:

1. Juan vive en Santiago de Chile y viaja en avión hasta Madrid de España, luego de una semana viaja nuevamente en avión a Sídney de Australia y luego de una semana vuelve a su hogar en avión. Mide la trayectoria en el mapa que recorrió Juanito en avión, usando como unidad de medida un palito de fósforo.
2. Busca un instrumento que se encuentre en tu casa (escoba, lápiz, cuaderno, etc.), y con éste mide las dimensiones de la habitación en que te encuentras (largo, ancho y alto) y encuentra el volumen de dicha habitación.
3. Se entregará un jarro con agua y 3 vasos de distintos tamaños. En grupo, midan la misma cantidad de agua solo con: Vaso grande; Vaso mediano; Vaso chico. (Da tus respuestas en fracción).

Preguntas y Conjeturas

Pregunta 1: Mediante este reactivo, se intenta hacer que el estudiante se familiarice con la faceta de medida de la fracción. Este reactivo busca que mida la distancia de un punto a otro, en un plano conocido.

<u>*Conjetura:*</u> Se espera que el estudiante mida las distancias pedidas y vincule la medida que obtiene con una fracción.

Pregunta 2: Mediante este reactivo, se intenta que el estudiante mida un espacio con dimensiones reales y repare que al medir obtiene valores de medidas que expresan cantidades fraccionarias.

<u>*Conjetura:*</u> Se espera que el estudiante mida con un objeto (patrón no estándar) que él decida, y pueda obtener valores fraccionarios relacionando estos resultados con la faceta de medida de la fracción.

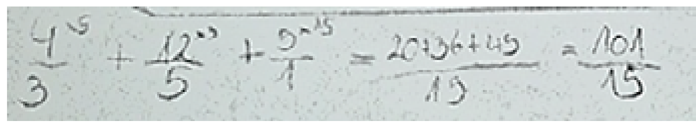
Pregunta 3: Mediante este reactivo, el estudiante se podrá dar cuenta que en su entorno se presentan las fracciones en su faceta de medida de una manera común, y lo evidencia no sólo midiendo distancia, sino que también el volumen del agua.

<u>*Conjetura:*</u> Se espera que el estudiante mida el volumen de una determinada cantidad de agua con distintos tamaños de vasos. Además de expresar su resultado en valores fraccionarios de sus patrones arbitrarios de medida.

Discusión de resultados

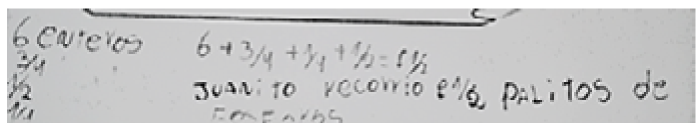
Entre los resultados obtenidos durante la realización de las actividades presentadas, se evidencia que los educandos enfrentan las preguntas considerándolas como poco representativas para un problema de fracción, argumentando que no se aplicaba dicho concepto, sin embargo, al leer detenidamente y al expresar los resultados obtenidos, notan la presencia de fracciones. La faceta de parte-todo en el aula de matemáticas deja una exigua participación a la faceta de medida para los procesos de enseñanza y aprendizaje. En el reactivo uno es posible observar que efectivamente midieron en los tres casos con los palitos de fósforos toda la trayectoria del avión, en dos casos se dio el resultado de la trayectoria total de avión en valores numéricos, y en el tercer caso se describió cada cantidad participe, sin llegar a la trayectoria total. Uno de los desarrollos registró además el patrón de medida de la magnitud de longitud "palo de fósforo" utilizado como corresponde a un proceso de medida y su comunicación.

Estudiante 1:



$$\frac{4^{\times5}}{3}+\frac{12^{\times3}}{3}+\frac{5^{\times15}}{3}=\frac{20+36+45}{10}=\frac{101}{15}$$

Estudiante 2:

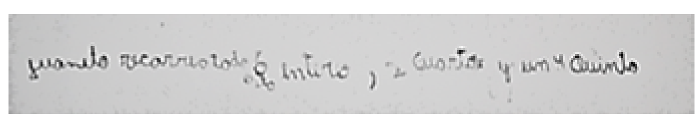


6 enteros

$$\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{1} \quad 6+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$$

Juanito recorrió $7\frac{1}{2}$ *palitos de fósforos*

Estudiante 3:

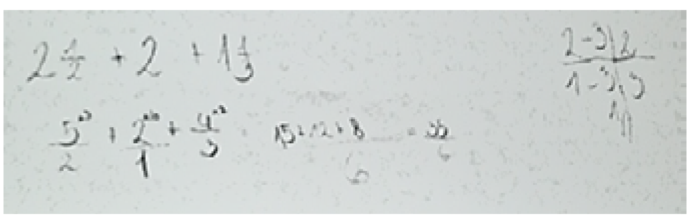


Juanito recorrió todo 6 entero, 2 cuartos y un 4 quinto

Posteriormente, en el reactivo dos fue posible observar cómo los estudiantes participaban activamente en la medición de su entorno, aplicando las fracciones en su faceta de medida con mayor facilidad. Escolano y Gairín (2005, pág.3) consideran que "buena parte del conocimiento se adquiere de forma visual", sin duda este es uno de esos casos, a pesar de que la faceta de parte-todo toma las gráficas como parte esencial del entendimiento de ella, la faceta de medida no solo se puede ver, sino que también tocar y hacer partícipe del conocimiento al medio en que vivimos.

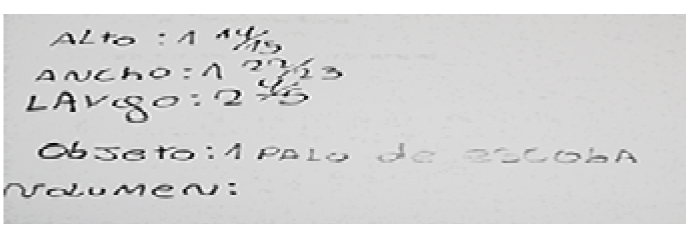
La dificultad observada se tiene principalmente con la magnitud de volumen, donde dos casos no contestaron, y uno aplicó una operación distinta (esto es, explicar aquí esa operación) de la que se requería. Pero esto, tiene más relación con la operación, que con la faceta de medida.

Estudiante 1:



$$2\frac{1}{2} + 2 + 1\frac{1}{3} = \frac{5}{2} + \frac{2}{1} + \frac{4}{3} = \frac{15+12+8}{6} = \frac{35}{6}$$

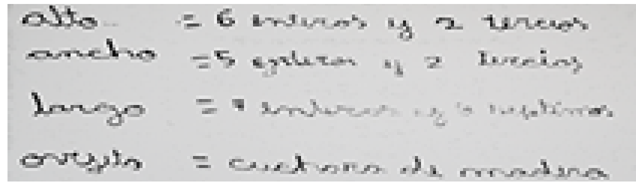
Estudiante 2:



Alto: $1\frac{14}{13}$; *Ancho:* $1\frac{22}{23}$; *Largo:* $2\frac{4}{5}$

Objeto: 1 palo de escoba ; Volumen

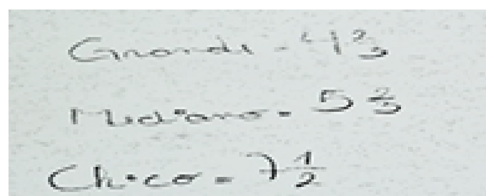
Estudiante 3:



Alto = 6 enteros y 2 tercios
Ancho = 5 enteros y 2 tercios
"Ovjeto"= cuchara de madera

Luego en el reactivo 3, los estudiantes entendieron que al igual que en los casos anteriores se podía medir, sin embargo, en este caso era el volumen de agua. Es importante que los estudiantes vivencien este tipo de actividades, como lo menciona Escolano y Gairín, "Se ignora la medida de magnitudes. Al escolar se le oculta la existencia de un proceso de medida". (Gairín, 2005, pág. 3)

Estudiante 1:

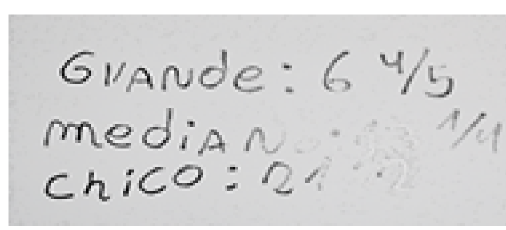


Grande = $4\frac{2}{3}$

Mediano = $5\frac{2}{5}$

Chico = $7\frac{1}{2}$

Estudiante 2:

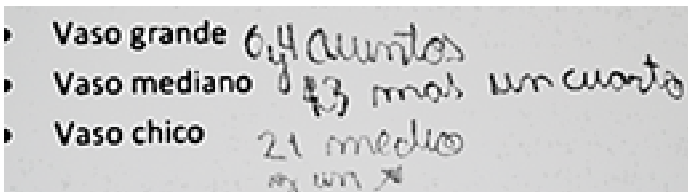


$$Grande = 6\frac{4}{5}$$

$$Mediano = 13\frac{1}{4}$$

$$Chico = 21\frac{1}{2}$$

Estudiante 3:



Vaso grande 6 y 4 quintos
Vaso mediano 4 3 mas un cuarto
Vaso chico 21 y un medio

Reflexiones Finales

En el transcurso de las actividades, fue posible constatar que la faceta medida de las fracciones fue utilizada por los estudiantes, toda vez que ellos utilizaron objetos como unidades de medidas para valorar las magnitudes anteriormente mencionadas.

Los tres alumnos encuestados, toman como un desafío a las fracciones en su faceta de medida. Recurren a patrones de medida cotidianos como palitos de fósforos o una escoba. Se constata que en las aulas de matemáticas no se realiza un mayor énfasis en la faceta de medida de las fracciones. El hecho de utilizar herramientas de la vida cotidiana, les hizo pensar otra faceta de fracciones y de manera tangible, midiendo.

Se estima necesario incorporar en la actividad con fracciones, la actividad de medir, así como cubrir una mayor cantidad de magnitudes para dotar de sentido entre los estudiantes a las fracciones en su faceta de medida.

Esta investigación invita a plantear futuras preguntas que den inicio a indagaciones más profundas, relacionadas a la escasa presencia la faceta medida en las aulas de matemáticas.

Parte de las limitaciones presentes es que esta investigación se basa en tres casos, y se podría acercar a casos con características afines o similares, por lo que no es generalizable.

Referencias

Acevedo, V. y Díaz, L. (2010). Validación a nivel piloto de un sistema evaluativo de competencias de pensamiento variacional en la unidad de fracciones en quinto año básico. Tesis der Magíster en Educación. UMCE. Santiago, Chile.

Andrade, T., Díaz, L., Cabañas, G. (2012) Estudiando significados asociados al concepto de fracción. Ponencia en Actas XVI Jornadas Nacionales de Educación Matemática. Santiago, Chile.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. y Silver, E. (1983). Conceptos numéricos racionales (Cap. IV). En R. Lesh y M. Landau (Eds.), Adquisición de conceptos y procesos matemáticos. NY.

Diaz, L., Castro, I. (2011) Articulando prácticas para las fracciones con redes conceptuales. XIII Conferencia interamericana de educación matemática, Brasil.

Díaz, L. (2009) Representaciones docentes de la matemática del cambio. XX Encuentro Nacional de Investigadores en Educación y VI Internacional de Investigadores en Educación CPEIP. Lo Barnechea, Chile.

Escolano, R., Gairín J. (2005) Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. Revista Iberoamericana de educación matemática. España.

Flores R. (2010) Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria. Tesis de Maestría en Matemática. México.

Gallardo, J., González, J., Quispe, W. (2008) Articulo: Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. Revista Latinoamericana de Investigación en matemática educativa. México.

Moya, Palma, Rojas, Ulloa y Días (2006) Razonaron y fraccionaron para construir la bandera. Acta Electrónica XIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática. Chile.

Una propuesta didáctica para la comprensión de la función derivada en secundaria desde la TAD

Daniela Bonilla Barraza. Jocelyn Díaz Pallauta
Colegio Tamelcura, Católico Atacama, Chile
danielabonillab@gmail.com, jocelyndiazpallauta16@gmail.com
Media, Enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.

Resumen

La propuesta consiste en el diseño de una secuencia didáctica, donde se aproxima a los estudiantes de último año de Enseñanza Media al concepto de derivada, por medio del estudio de la función derivada de una función polinómica.

En el diseño se utiliza como marco teórico, elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, Y), y como referente metodológico, estudio de casos (Arnal, J., del Rincón, D., y La Torre, A).

Para alcanzar los propósitos de investigación, se propone construir una organización matemática, que consiste en determinar la función derivada f de una función polinomial g, a través del tránsito de la gráfica de las rectas tangentes a la curva de la función g hacia la caracterización y gráfica de la función derivada asociada f, para su puesta en práctica se utiliza el software de geometría dinámica, geogebra.

Antecedentes

A nivel universitario, el concepto de derivada representa dificultad en su comprensión en los cursos de cálculo, por diferentes factores, entre ellos: la simbología, las representaciones, los contextos de aplicación, las interpretaciones. Esto se manifiesta en los artículos de Dolores (2000), Artigue (1995), entre otros. Los estudiantes que se enfrentan por primera vez al estudio de la función derivada desde la perspectiva de Cauchy, en la que el límite como objeto matemático es el que permite estudiar a la función, muestran grandes complicaciones (Ramírez, 2009).

Por los motivos anteriormente expuestos, el presente diseño tiene como objetivo principal proponer una secuencia didáctica para aproximar a los estudiantes de enseñanza media al concepto de función derivada. Esta secuencia, incorpora a la función derivada como una profundización en el estudio de las funciones polinómicas, pertenecientes al programa de estudio de matemática "funciones y procesos infinitos", inserto en la formación científica, donde se espera que "los alumnos(as) sean capaces de distinguir que funciones son polinomiales de aquellas que no son, y puedan reconocer sus características principales. El uso de la tecnología para graficar diversas funciones polinomiales facilita la visualización..." (Ministerio de educación, 2001, p.36), para abordar este último propósito se incorpora el uso de geometría dinámica, a través del software geogebra, el cual es una herramienta que permite al educando visualizar el tránsito de una función polinómica hacía la gráfica de su función derivada, facilitando así su comprensión.

Marco teórico

La Teoría antropológica de lo didáctico (TAD)

En la presente investigación, se utiliza elementos de TAD para el diseño, aplicación de la secuencia didáctica y para el análisis de los resultados de investigación.

A continuación, se describen los principales aspectos de la teoría, La TAD admite que toda actividad humana puede describirse con un modelo único, que se resume con la palabra de praxeología, unión de los términos griegos logos y praxis –donde toda práctica o "saber hacer" está siempre acompañada de un discurso o "saber", es decir una descripción, explicación o racionalidad mínima sobre lo que se hace, el cómo se hace y el porqué de lo que se hace.

Una praxeología u organización matemática, está constituida por un bloque práctico técnico, [T/ô], y por un bloque tecnológico-teórico, [θ/ Θ].

Cada tipo de tarea (T) tiene asociada una "manera de hacer", es decir, una técnica (ô), cada técnica, necesita de una justificación matemática, la cual se entiende por tecnología (θ), esta indica, generalmente, un discurso racional cuyo primer objetivo es justificar "racionalmente" la técnica que permite realizar un tipo de tareas.

A su vez, el discurso tecnológico contiene afirmaciones, más o menos explícitas, de las que se puede pedir razón. Se pasa entonces a un nivel superior de justificación, el de la teoría (Θ).

La TAD no solo se encarga de estudiar la construcción de un objeto matemático, sino también entrega herramientas para la puesta a prueba de la secuencia, para ello, cuenta con una organización didáctica, entendida como "El conjunto de los tipos de tareas, de técnicas, de tecnologías, etc., movilizadas para el estudio concreto en una institución concreta" (Chevallard, 1999, p.242).

Descripción de la propuesta didáctica

La propuesta se constituye en torno a una organización matemática local (OML) que consiste en determinar la función derivada de una función polinomial, en ella se distingue tipos de tareas como: determinar el valor de la pendiente de la recta tangente a una curva conociendo su grafica(t_1), caracterizar pares ordenados (t_2), y establecer la función asociada conociendo pares ordenados de ella (t_3).

La secuencia contribuye a la comprensión del concepto de función derivada, a través del tránsito de la gráfica de las rectas tangentes de una función polinómica hacia la caracterización y gráfica de la función derivada asociada (ver figura1), con las herramientas matemáticas que los estudiantes poseen en su nivel de estudio, dentro de las cuales, destacan los conceptos de: función polinómica, pendiente de una recta, graficas de funciones.

Figura 1 : la función $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ *, y su función derivada* $g(x) = 2x$

Metodología y Resultados

En la búsqueda de evidencias empíricas que permita mejorar y validar la secuencia didáctica presentada, se realiza un estudio de caso, puesto que son particularmente apropiados para estudiar una situación en intensidad en un período de tiempo, identificando los distintos procesos interactivos que conforman la realidad del caso (Arnal, Del Rincón y Latorre, 1992), "permitiendo una aproximación conceptual apropiada para examinar las particularidades al interior de un contexto global de suyo múltiple y complejo" (Goetz y Le Compte, 1988, p.69).

La unidad de análisis la conforma un grupo de 28 estudiantes de un establecimiento educacional chileno de dependencia compartida (particular subvencionado). Estos estudiantes son de cuarto año de enseñanza media (17 – 18 años) que conocen los conceptos de función polinomial y pendiente de una recta.

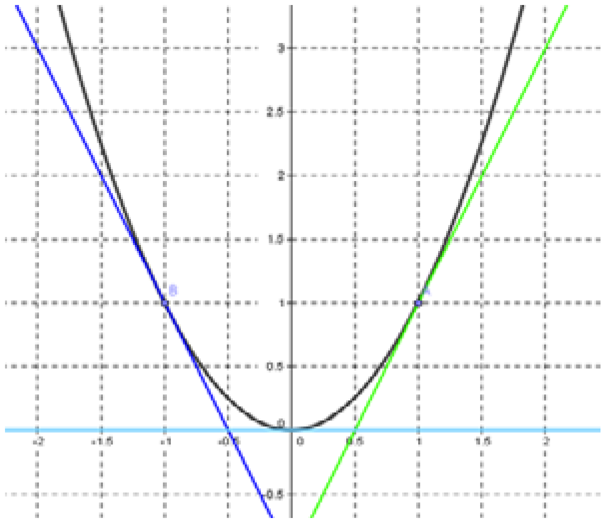
Actividades y análisis de respuestas

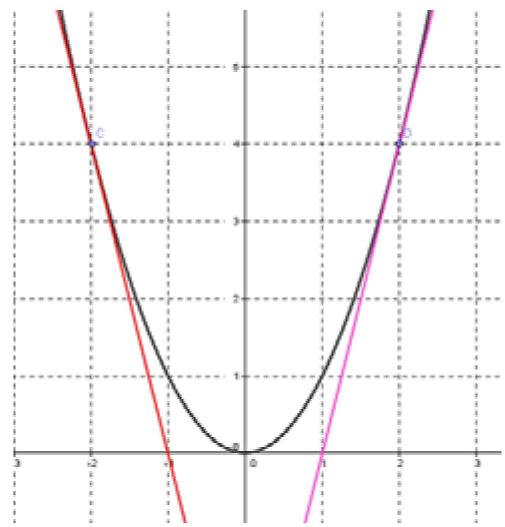
Los estudiantes en parejas trabajaron en la OML, en dos sesiones de 90 minutos. Se enfrentaron a distintos tipos de tareas (t_1, t_2 y t_3), elaborando técnicas para dar respuestas a ellas. Una vez desarrolladas las actividades comparten sus estrategias con el grupo curso, finalmente, el docente realiza la institucionalización del objeto función derivada de una función polinomial.

Actividad 1 : *Considere la funcion* $f(x) = x^2$, *En la gráfica de la función (ver imágenes adjuntas) , se han trazado rectas tangentes en los puntos de abscisas -2, -1,0,1,2 .*

a) Encuentre la pendiente de cada una de las rectas tangentes graficadas en las figuras anteriores.
b) Ordene los datos en la siguiente tabla:

Abscisa	Valor de la pendiente
-2	
-1	
0	
1	
2	





c) Determine qué características tienen los puntos anteriores.
d) Encuentre una función para los valores de la tabla. ¿que representa la función encontrada, en relación a la función $f(x)=x^2$*?*

Resultados

La mayoría de los estudiantes (26) resuelve con éxito las tareas presentadas en la actividad 1, ellos utilizan en gran medida técnicas analíticas para responder a los tipos de tarea t_1 y t_3 es decir, usan la fórmula de la pendiente $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ para establecer sus valores (ver figuras 2) y la ecuación $y-y_1=m(x-x_1)$ para encontrar la función (ver figura 3). Otra de las técnicas que priorizan los estudiantes para t_3, es establecer la relación entre los puntos obtenidos en la tabla y la función lineal asociada. (Ver figura 4).

En general, se destaca entre los elementos tecnológicos el concepto de pendiente de una recta, fórmula para calcular la pendiente conociendo dos puntos de la recta, ecuación de la recta y función lineal. Se enfatiza, que estos son los elementos matemáticos que sustentan las distintas técnicas utilizadas.

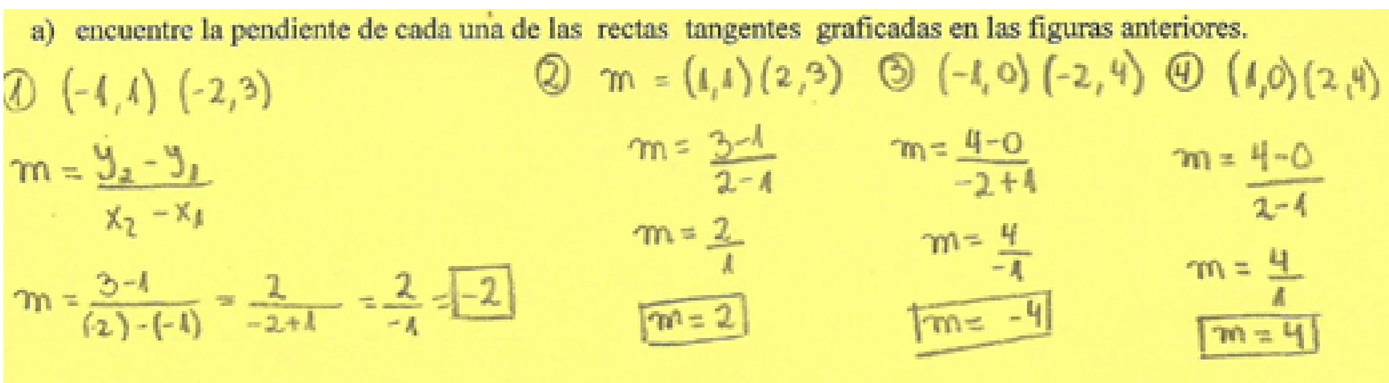


Figura 2: respuesta del grupo 3 a t_1

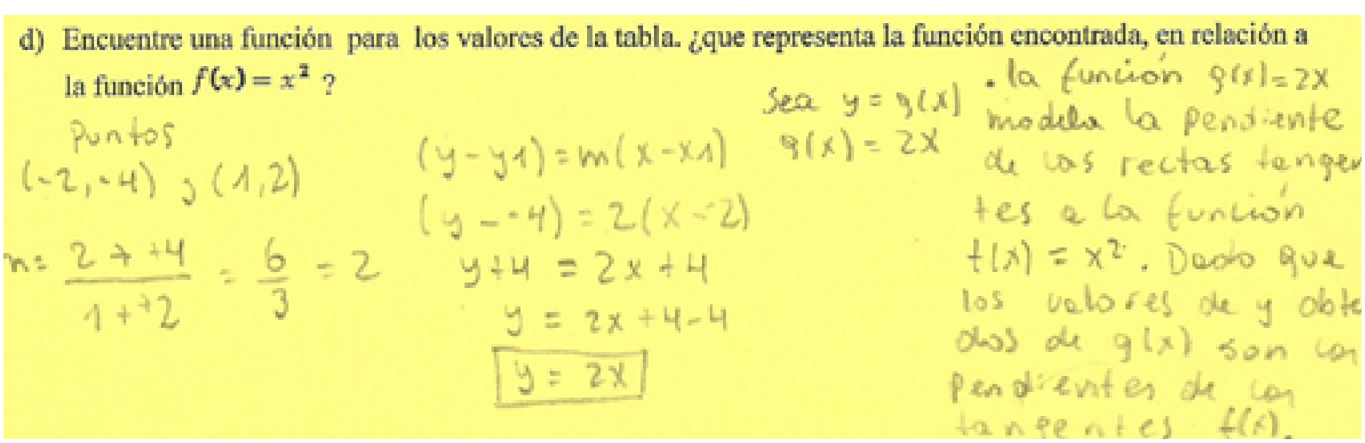
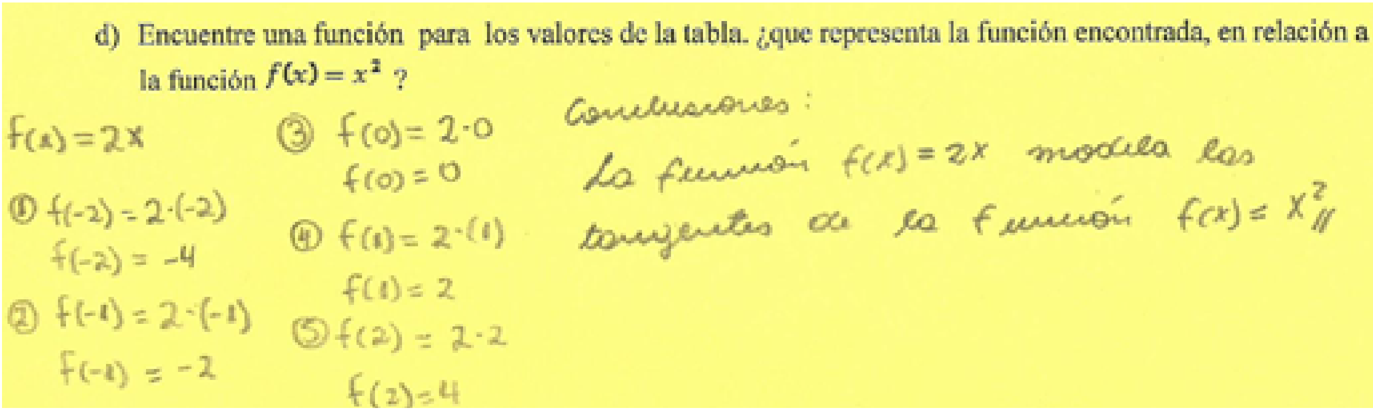


Figura 3: respuesta del grupo 2 a t_3


d) Encuentre una función para los valores de la tabla. ¿que representa la función encontrada, en relación a la función $f(x) = x^2$?

$f(x) = 2x$

① $f(-2) = 2\cdot(-2)$
$f(-2) = -4$

② $f(-1) = 2\cdot(-1)$
$f(-1) = -2$

③ $f(0) = 2\cdot 0$
$f(0) = 0$

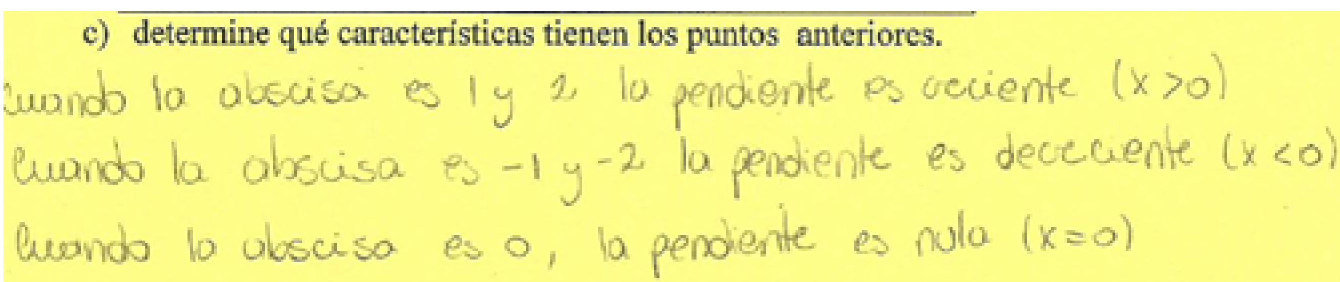
④ $f(1) = 2\cdot(1)$
$f(1) = 2$

⑤ $f(2) = 2\cdot 2$
$f(2) = 4$

Conclusiones:
La función $f(x) = 2x$ modela las tangentes de la función $f(x) = x^2$//

Figura 4: respuesta del grupo 5 a t_3

Se destaca que 6 grupos de estudiantes muestran en sus respuestas, información sobre el comportamiento de la función Se destaca que 6 grupos de estudiantes muestran en sus respuestas, información sobre el comportamiento de la función $f(x) = x^2$ (ver figura 5), a partir de los datos obtenidos en la tabla. Si bien no utilizan un lenguaje adecuado, observan que a medida que varían los valores de la abscisa, las pendientes toman valores positivos, negativos o cero. Se considera que estos argumentos se deben potenciar, para posteriormente trabajar en los puntos de inflexión (máximos o mínimos).


c) determine qué características tienen los puntos anteriores.

Cuando la abscisa es 1 y 2 la pendiente es creciente $(x>0)$
Cuando la abscisa es -1 y -2 la pendiente es decreciente $(x<0)$
Cuando la obsciso es 0, la pendiente es nula $(x=0)$

Figura 5: respuesta del grupo 7 a t_3

A continuación, se muestra las inquietudes presentadas por los estudiantes una vez realizada la actividad 1. En respuesta a la siguiente pregunta.

¿La función encontrada $f(x) = x^2$ contiene ***a todas las pendientes de la recta tangente*** a la curva de $f(x) = x^2$?

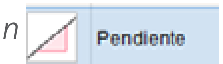
Estudiante 3 dice: *"solo los valores la tabla"*
Estudiante 7 dice: *"a todas porque es una recta y hay muchos valores para y (pendiente)"*
Estudiante 15 dice: *"No puedo graficar exactamente la recta tangente, pero parece que se aproxima"*
Estudiante 21: *"cuando son positivas las x, las y también son positivas y cuando son negativas las x, y también es negativo … y es la pendiente", yo creo que sí.*

En una segunda instancia (ver actividad 2), se promueve el uso de geogebra respecto a los mismos tipos de tareas anteriores. Se pretende que el estudiante con las herramientas que provee el software, construya geométricamente la función derivada, por medio del rastro de las pendientes de las rectas tangentes a la curva, a medida que un punto recorre la función (ver figura 6).

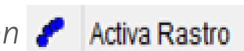
Actividad 2: *En el software **geogebra***

Grafique la función $f(x) = x^2$ *Defina un punto* (E) *en la curva de* $f(x)$*.*
En ese punto E *trace la tangente a la curva.*
(opción 

)

Encuentre la pendiente (m) de la recta tangente a la curva. (opción 

)

Defina un nuevo punto D *de coordenadas* $D: (x(E), m)$*.*
Active rastro en D*. (opción* 

)

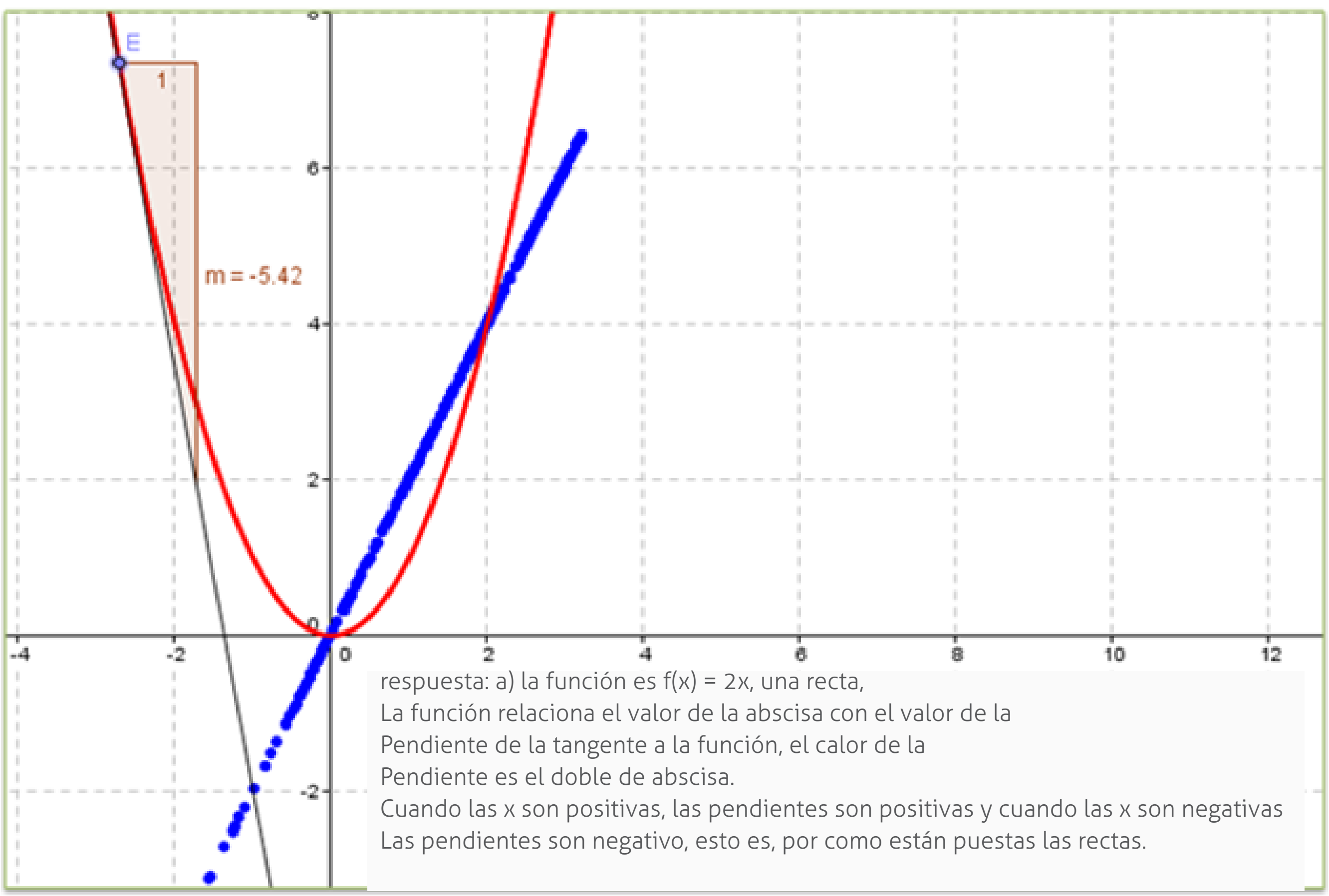
Luego de realizar la construcción.

1.- Responda las siguientes preguntas

a) ¿Cuál es la función que se forma con el rastro del punto D*? ¿Qué representa la función encontrada, en relación a la función* $f(x) = x^2$ *?*

b) Escriba características de la función encontrada, ¿Qué información entrega sobre la función $f(x) = x^2$*?*

Ejemplo de respuesta



En esta fase la mayoría (24) de los estudiantes realiza las actividades, cabe destacar que ellos tienen manejo del software, por lo tanto, no presentaron problemas en su uso.

Una vez concluida la actividad, surge nuevamente la reflexión final de la sesión anterior, en esta oportunidad los estudiantes manifiestan que *"la función $f(x)=x^2$ relaciona el valor de las abscisas con el valor de la pendiente de las rectas tangente a la función*

En ese momento el docente institucionaliza, concluyendo que la función encontrada se conoce como función derivada de la función $f(x)=x^2$.

Reflexiones finales

La aplicación de la propuesta didáctica para la comprensión de la función derivada, está dirigida a estudiantes de 17 - 18 años, como una profundización en el estudio de las funciones polinomiales, dado que este concepto no se encuentra presente en los programas de matemática de enseñanza secundaria en Chile.

Posterior a la aplicación de la secuencia didáctica, se sugiere proponer a los estudiantes las mismas actividades de la función $f(x)=x^2$para la función $g(x)=3x$, es evidente, que si bien el tipo de tarea se mantiene, las técnicas utilizadas pierden su alcance y tiene que elaborar nuevas técnicas, puesto que la función derivada en este caso, corresponde a una función cuadrática.

Se destaca como elemento esencial en el surgimiento de la organización matemática la caracterización de la función asociada a las coordenadas de las rectas tangentes a una curva.

El uso de software Geogebra constituye para el estudiante un facilitador en la comprensión y estudio de la función derivada, dado que con las herramientas que provee el software, puede construir gráficamente la función derivada, por medio de las rectas tangentes a la curva. Además, permite analizar los valores obtenidos en la pendiente para cualquier punto perteneciente a la curva, estableciendo algebraicamente de esta forma la función derivada asociada.

Referencias

Arnal, J., del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). Investigación educativa: fundamentos y metodología. Barcelona: Labor.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Ed). (1995). Ingeniería didáctica en

Educación Matemática, pp 97-140. "Una Empresa Docente" & Grupo Editorial

Iberoamérica. Impreso en México.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje, Barcelona, Spain: ICE/Horsori.

Chevallard, Y. (1985, 1991): La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné, La Pensée Sauvage : Grenoble. Traducción en español de Claudia Gilman : La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado, Aique : Buenos Aires (1997)

Dolores C. (2000). "El futuro del cálculo infinitesimal". Capítulo V: ICME-8 Sevilla, España. Cantoral R. Grupo Editorial Iberoamérica. México D. F

Goetz, J.P. Lecompte M.D. (1988). Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. España: Morata.

Programa de Estudio Matemática formación diferenciada , 4º medio (2001) Ministerio de Educación. Chile.

Ramirez Rincón, E. (2009). Historia y epistemología de la función derivada. (págs.

157-162). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Aproximación intuitiva a la aleatoriedad. El caso de alumnos de 12 a 14 años.

Teresita Méndez Olave, Ismenia Guzmán Retamal
Universidad de Católica del Maule, Universidad de Los Lagos, Chile
tmendez@ucm.cl; Ismenia.guzman@ulagos.cl
Básica, Enseñanza y el aprendizaje de la Probabilidad

Resumen

Investigamos sobre el pensamiento probabilístico en educación primaria buscando identificar situaciones aleatorias que permiten aprovechar el potencial de las intuiciones de niños de 12 a 14 años para aportar a los enfoques curriculares actuales. Nuestros referentes teóricos consideran el juego como elemento dinamizador, para poner en funcionamiento creencias e intuiciones estudiantiles al describir elementos de aleatoriedad.

En nuestro estudio hemos diseñado una secuencia didáctica de 6 situaciones apoyadas en formato visual, que nos han permitido capturar, en las expresiones estudiantiles, la influencia de la certeza o incertidumbre.

En el curso de esta investigación hemos aplicado cuatro de las situaciones diseñadas. Las primeras observaciones muestran un alto porcentaje de estudiantes que asignan significados desde suposiciones subjetivas. Un porcentaje menor otorga significados de aleatoriedad que les han permitido reconocer la incertidumbre en esas situaciones.

Palabras clave: Aleatoriedad, equiprobabilidad, suposiciones subjetivas, reconocimiento de la incertidumbre.

Introducción

En el 2013 realizamos una primera exploración sobre el pensamiento aleatorio con 4 niños de 10 a 12 años utilizando imágenes fotográficas como recurso epistémico y una situación creada artificialmente que involucraba la participación del niño en el desarrollo de un juego. El producto de ese estudio fue "Acercamientos a la impredecibilidad en la enseñanza obligatoria", Méndez T. y Díaz L (2013).

El estudio consistió en analizar las respuestas de los niños frente a situaciones presentadas en imágenes fotográficas a partir de las que escribían historias de futuro, indicaban cuan posible la consideraban, utilizando una escala de 1 a 9 en que 1 significaba imposible y 9 absolutamente posible. En el caso del juego, involucrarse en él, respondiendo preguntas sobre su desarrollo aleatorio.

En el presente artículo damos profundidad a diferentes aspectos que en ese momento no vislumbramos, precisando el marco teórico, la metodología y otros elementos importantes. Además, enriquecimos las situaciones y las implementamos en un curso de la educación obligatoria con jóvenes de 12 a 14 años, lo que nos dio luces para realizar ajustes al análisis a priori e identificar categorías de análisis.

Los resultados obtenidos nos permiten formularnos una nueva pregunta para avanzar y reorientar nuestro estudio.

Antecedentes y Problemática:

Actualmente los sus currículos escolares de matemática se organizan por áreas de conocimiento, una de ellas relacionada al estudio de nociones de probabilidad y estadística, como uno de los tipos de pensamiento matemático a desarrollar en todos los ciudadanos, a través de la educación obligatoria.

En el ciclo de primaria en Chile, Colombia y Uruguay las orientaciones didácticas, proponen desarrollar una aproximación intuitiva de la probabilidad que comienza entre los 9 y 11 años, pretendiendo relacionar la certeza e incertidumbre de una situación a las expresiones: seguro, posible e imposible, del lenguaje natural. Esto se concreta proponiendo enunciados al alumno con el objeto de que este decida que palabra asocia al enunciado.

Desde el análisis didáctico (Brousseau 1998 p 52) se percibe una respuesta sugerida disimuladamente, dejando en evidencia un efecto Topaze de las decisiones curriculares, en consecuencia, para el alumno es cada vez más transparente y fácil responder lo esperado desvirtuando el problema inicial con lo que desaparecer totalmente el conocimiento previsto.

En otro nivel de enseñanza, 10 a 11 años, el currículo sugiere la experimentación de sucesos aleatorios como lanzamiento de monedas, dados y otros artefactos convencionales. Mediante estas experiencias se pone en evidencia la influencia del azar, en fenómenos aleatorios y se aborda el enfoque frecuencial cuyo propósito es asociar la tendencia de la estabilización de la frecuencia relativa a la probabilidad (teórica) del suceso.

Alrededor de los 12 a 13 años, el currículo desarrolla el enfoque clásico o a priori, caracterizado por el análisis que se realiza de las situaciones de incertidumbre, para determinar los sucesos favorables y posibles. La probabilidad de un suceso particular se calcula a través de la regla de Laplace (Meyer (1992) p. 29), la que relaciona los casos favorables al suceso y los casos posibles.

Estas orientaciones curriculares, en general, sugieren problemas convencionales, por ejemplo, juegos de cartas, dados, monedas. Desde nuestra postura interpretamos es visión reducida, puesto que encasilla el azar y la probabilidad al ámbito de los sucesos equiprobables y espacio muestral finito y discreto.

Estas perspectivas de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad han despertado también otros cuestionamientos. Ya que algunos investigadores en educación matemática, sostienen que sólo la recolección y organización de datos obtenidos en juegos de azar, no permiten caracterizar la naturaleza aleatoria de la situación ni tampoco reconocer otras dimensiones de ella, ya que no solo se reduce a los juegos de azar.

Pensamos además que la clasificación de

enunciados sobre incertidumbre en seguro, posible e imposible, que no ha sido manipulado a través de la acción no es suficiente para reconocer su naturaleza aleatoria.

Otras evidencias muestran lo transparente con que diferentes currículos abordan la noción de aleatoriedad, que siendo el nicho privilegiado para el estudio de los fenómenos de la incertidumbre no es considerada un objeto de enseñanza, Batanero (2013).

Azcárate y otros (1998) la conciben como una noción ambigua, compleja y que habitualmente es considerada como un concepto obvio sin que su significado sea analizado con profundidad. Ellos sostienen que es el núcleo central en la construcción de pensamiento probabilístico y que determinados tipos de concepciones pueden ser un claro obstáculo para la comprensión de la naturaleza probabilística de ciertos aspectos de la realidad. La capacidad de reconocimiento y tratamiento de los sucesos aleatorios depende del nivel de reconocimiento de la incertidumbre y la complejidad presentes en estos fenómenos; es decir, de la comprensión de la noción de azar.

Eicher y Vogel (2012), Pratt (2011) han realizado a los actuales currículos de enseñanza de la probabilidad han puesto de manifiesto las debilidades de las actividades propuestas por los currículos de la matemática escolar para abordar el aprendizaje de la probabilidad. Ellos sostienen que el enfoque basado en la utilización de artefactos como dados, monedas y ruletas junto a la simplicidad de las tareas requeridas en los programas de estudio, no permite a los estudiantes alcanzar niveles importantes de cognición, lo que influye de manera importante en la comprensión de los fenómenos aleatorios y en el desarrollo del pensamiento probabilístico, Nuestro estudio pone en evidencia las limitaciones de las decisiones curriculares, la reducción de los contextos en que se presenta esta importante noción para la comprensión de la realidad.

Formulamos nuestra problemática planteándonos las siguientes interrogantes: ¿qué actividades rompen el esquema tradicional de enseñanza de la probabilidad, en la educación primaria, permitiendo una aproximación intuitiva a la comprensión de la incertidumbre?

¿Cuáles actividades están en la zona de desarrollo real de los estudiantes de 12 a 14 años, para una comprensión de los fenómenos aleatorios?

Consideramos la comprensión de los fenómenos aleatorios en el sentido de la toma de conciencia de las características impredecibles y las múltiples circunstancias que pueden afectar un resultado esperado. Al mismo tiempo la zona de desarrollo real queda determinada por la habilidad del estudiante de resolver independientemente un problema.

En esta comunicación reportamos los resultados de las producciones de 31 estudiantes a una de las situaciones de aproximación a la noción de aleatoriedad, ya diseñadas.

En esta situación por una parte se deja en evidencia el potencial de las intuiciones estudiantiles y por otra se proponen categorías para analizar las concepciones de los niños que permiten clasificar su pensamiento aleatorio.

Para esta comunicación presentamos la primera situación de la secuencia relativa un juego estudiantil que deben imaginar y responder a preguntas que orientan a percibir la aleatoriedad.

Marco teórico

Nos apoyamos en el modelo teórico de las situaciones didácticas concebido por Brousseau (1998) sobre especialmente situaciones adidácticas en que los estudiantes realizan una actividad matemática en forma autonoma y controlando sus resultados.

En vista de nuestro objetivo, concebimos una situación basada en un juego infantil que los niños practican habitualmante desde pequeños. La situación tiene sentido para el estudiante en tanto lo involucra en su desarrollo, a partir de 3 preguntas sobre la incertidumbre del mismo. El contrato didactico, global de la clase, esta implicito en la consigna pero además en la gestión de la clase se considera el trabajo individual, luego entre pares y finalmente una puesta en común animada por el profesor.

El medio didactico es una situación de juego imaginario en la que involucramos la participación del estudiante como recurso epistémico dinamizador del aprendizaje que puede facilitar el descubrimiento de noción la noción de incertidumbre. En nuestro estudio en particular es un medio para poner en funcionamiento las creencias e intuiciones de los estudiantes al describir elementos de aleatoriedad en el desarrollo del juego. Pensamos que a través de esta situación podríamos desarrollar en los estudiantes estrategias que les permitan activar sus propios mecanismos de comprensión e interpretación de la incertidumbre.

Metodología de investigación

La metodología es cualitativa ya que interesa determinar concepciones intuitivas de la aleatoriedad y los significados atribuidos a la incertidumbre. Los participantes son 31 estudiantes de 8° básico, de edades comprendidas entre 12 y 14 años de un colegio municipal de la ciudad de Molina Chile.

Para la investigación hemos diseñado 6 situaciones en formato visual y una situación de juego, presentada en enunciado escrito que involucra la participación imaginaria del estudiante.

Nos proponemos identificar concepciones sobre aleatoriedad, el lenguaje que utilizan, el reconocimiento de la incertidumbre y pesquisar, si existen, contradicciones en sus razonamientos.

Analizamos las producciones de los niños a través de categorías identificadas en el análisis a priori. En este reporte presentamos la situación del juego imaginario, que describimos a continuación.

Tú y cinco amigos juegan a lanzarse la pelota con la mano, ubicados como en el esquema. El juego consiste en mantener la pelota en movimiento, lanzándola de un jugador a otro.

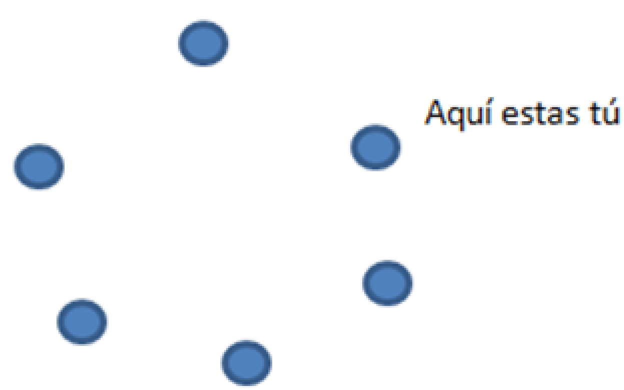


Figura 1

Si la pelota está en juego:

1. ¿Qué posibilidad hay de que el que tiene la pelota te la lance a ti? Explica por qué.

2. ¿Sabrías tú si el que tiene la pelota te la va a lanzar a ti? ¿Explica por qué?

3. Si la pelota estuviera en juego 13 veces sin caer, ¿cuántas veces crees tú que te van la lanzarían a ti? Explica.

Análisis a Priori

El análisis a priori da cuenta de distintos niveles de compresión de la aleatoriedad que pudieran emerger en las producciones estudiantiles.

Se espera que las respuestas provengan de la experiencia, de los estudiantes en situaciones similares y se encasillen en categorías de reconocimiento de cierto grado de incertidumbre.

Por ejemplo, para ¿Qué posibilidad hay de que el que tiene la pelota te la lance a ti? Explica por qué. Se espera que responda: Hay una posibilidad de cinco de recibirla o, expresada en porcentaje, un 20% o 17% aproximadamente, es decir que cuantifiquen la posibilidad de recibirla.

En: ¿Sabrías tú si el que tiene la pelota te la va a lanzar a ti? ¿Explica por qué? No es seguro porque el juego es libre, no tiene reglas de lanzamiento establecidas y es inseguro.

En: Si la pelota estuviera en juego 13 veces sin caer, ¿cuántas veces crees tú que te van la lanzarían a ti? Explica. Dos o tres veces, porque efectuando la división 13: 6 = 2 y el 1 que sobra, le puede tocar nuevamente.

No se puede saber porque el juego no tiene orden o por porque no se puede saber lo que ocurrirá en el futuro.

Estas predicciones permiten identificar las siguientes categorías:

Categoría 1: Da explicaciones aleatorias en un lenguaje informal e intuitivo. Cuantifica la posibilidad de ocurrencia en porcentaje, por ejemplo, hay un 20% de posibilidades. La concepción de incertidumbre está relacionada con la percepción de equiprobabilidad. En esta categoría es posible encontrar explicaciones en las que utilicen el término probabilidad en sus explicaciones, como una palabra del lenguaje natural.

Categoría 2 evidencia la incertidumbre expresada a través del lenguaje de la probabilidad, cuantificándola porcentualmente, como en forma de fracción (aunque sea verbal) o como comparación no explicita entre casos favorables y posibles.

Por ejemplo, en expresiones como las siguientes: tiene la misma probabilidad que se la lance a él como a cualquiera de los otros jugadores; no sé, porque el juego no tiene un orden establecido y el jugador que tiene la pelota se la puede lanzar a cualquiera"

Categoría 3: Agrega suposiciones subjetivas externas al desarrollo del juego. Estas le permiten realizar argumentaciones inferenciales con un grado de certidumbre absoluta, que revela el no reconocimiento de la aleatoriedad.

Por ejemplo, tener altas posibilidades de que, si se encuentra en alguna posición diagonal con respecto al jugador que tiene la pelota, se la va a lanzar. De los 13 lanzamientos le tocara

2 o 3 veces a él, en una especie de reparto equitativo. Se concentra para que le lance la pelota, etc. Argumentos inferenciales subjetivos que no permiten reconocer la aleatoriedad en el fenómeno.

Tabla 1[8] Algunas producciones estudiantiles:

Cate goría	Frec. / %	P1:	P2:	P3:
C1	P1: 13 43% P2: 5 17/ P3: 15 a 20 50- 67%	Hay un 17,5% de probabilidades de que la pelota llegue a mis manos porque somos 6 por lo tanto la posibilidad es más remota.	No porque hay más compañeros y obviamente se indecidiría y no sabría a quién tirarla, por eso. Yo pienso que no, porque son 6 jugadores y tiene posibilidades de lanzarle el balón de futbol a cualquier jugador.	De trece veces yo creo que tocaría o tendría el balón unas 3 veces Yo creo que me la lanzarían dos veces más o menos, porque sería como igualdad para todos.
C2	P1: 8 27% P2: 12 40% P3: 3 10%	La posibilidad es de un 50% a cada participante, ya que no se sabe a quién se dirigirá el balón. Y a quien es lanzado finalmente cumple con el 100%	No, no podría saber eso. No estaría 100% segura porque puede cambiar de opinión en un segundo. No podría saberlo ya que podría lanzarla a cualquiera.	Unas 6 veces yo creo porque a cualquiera le puede llegar o no le llega porque es un juego de azar.
C3 SS	P1: 9 30% P2: 3 10% P3: 22 73%	Yo creo que sería un 90% porque si yo no he tomado loa pelota podría ser que me la tiraran a mi	Podría ver si me la van a lanzar a mi depende del movimiento que haga el que tiene el balón, sin descartar ninguna posibilidad ya está sin obstáculo.	De 13 oportunidades me la lanzarían 4 veces porque se las pediría a los que tuvieran la pelota
C2 – C3				Si es que va en orden, podría ser 2 a 3 veces es decir en forma de patrón, si es que fuera de manera discontinua no existe la manera de dar una estadística ya que es impredecible.

La tabla muestra que las concepciones más descendidas provienen de las respuestas 1 y 3. Los datos de esta última les inducen a creer con seguridad que recibirán 2 veces la pelota en el desarrollo del juego.

Las respuestas a la pregunta 1 evidencian la cuantificación de la incertidumbre, expresada

Resultados y análisis

La siguiente tabla muestra algunas producciones estudiantiles y sus respectivas explicaciones, de acuerdo a la posibilidad.

8Se ha considerado, en este recuento, clasificar respuestas en dos categorías, cuando corresponda. Ello explica que en algunas categorías el total de respuestas excede al 100%.

en porcentaje. Este aspecto es revelador ya que las curricula solo cuantifican el azar a partir de la noción de probabilidad y en escenarios que se limitan al lanzamiento de dados, monedas, etc.

La equiprobabilidad observada en el juego, induce a un alto porcentaje de estudiantes a cuantificar la aleatoriedad de la situación. Esto se constata en las respuestas a la pregunta 1 y 3 en las que subyace lo equitativo en sus concepciones. Otro porcentaje importante no reconoce la incertidumbre puesto que asigna suposiciones subjetivas al juego, tales como: creer que el juego tiene reglas definidas con las que poder controlar sus resultados en las diferentes situaciones a las que se les expone.

Conclusiones

Este estudio ha motivado abordar el aprendizaje de la probabilidad desde una aproximación intuitiva de la aleatoriedad en la educación primaria. Pretendimos tomar un camino que rompa las restricciones que los actuales currículos proponen limitando el ámbito de estudio de la probabilidad a unos cuantos casos ajenos a los significados que los estudiantes puedan construir. Las producciones de estudiantes de 12 a 14 años, frente a estas actividades han puesto en evidencia los significados atribuidos a la aleatoriedad que surgen desde un razonamiento que les permite concluir desde su subjetividad, interpretamos aquí una suerte de razonamiento argumentativo inferencial que no les permite intuir la noción de aleatoriedad.

Se observa un rango de 10% a 40% de estudiantes que tienen más desarrollado el sentido de la aleatoriedad lo que se manifiesta en respuestas como "no se puede ver el futuro"; "No podría saberlo ya que podría lanzarla (la pelota) a cualquiera" o en la identificación de otros elementos que pueden influir en el resultado de esta situación aleatoria. Su razonamiento evidencia una argumentación analítica que les permite ver otras posibilidades de ocurrencia y en consecuencia acercarse a la noción intuitiva de aleatoriedad.

Frente a las preguntas formuladas apreciamos que actividades como la formulada para esta comunicación podría poner en funcionamiento las creencias e intuiciones de estudiantes de 12 a 14 años, cuantificándolas antes de dar inicio al estudio de la probabilidad, introduciéndonos en la zona de desarrollo real de los estudiantes. Las respuestas de los estudiantes nos han guiado a identificar experiencias que permitirían aproximarse intuitivamente a la comprensión de esta noción y su reconocimiento en diferentes contextos.

Respecto del alto índice asociado al no reconocimiento de la aleatoriedad es un elemento importante en nuestro reporte ya que nos permite detectar las limitaciones de nuestra investigación y considerar la realización de estudios acerca de las devoluciones pertinentes para encausar el razonamiento del estudiante en la comprensión de la aleatoriedad. Lo que significa que hay que modificar el medio. Nos formulamos nuevamente la pregunta ¿Qué intervenciones sobre el medio se deben realizar para lograr el objetivo enriqueciendo la adidacticidad de la situación, es decir el trabajo autónomo del alumno?

Referencias

ANEP. 2009. Programa de Educación Inicial y Primaria. Montevideo: Rosgal.S.A.

Azcárate P., Cardeñoso J.M., Porlán, R. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. Enseñanza de las Ciencias 16 (1), p. 85 – 97.

Batanero, C (2001), Didáctica de la Estadística, Grupo de Investigación en Educación Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

Batanero, C. (2005) Significados de la probabilidad en la educación secundaria. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8 (3), 247–263.

Brousseau G. 1998, Théorie des Situations Didactiques. La pensee Sauvage. Recherches en Didactiques des Mathematiques.

Lineamientos curriculares colombianos, Ministerio de Educación de Colombia 1998

Méndez T., Díaz L, 2013 Acercamientos a impredecibilidad en la enseñanza obligatoria. Lestón Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27 2013.

Mineduc 2012 Bases Curriculares ciclo básico - Programas de curso ciclo básico.

Aplicación de una ingeniería didáctica del concepto límite desde su epistemológica a estudiantes de primer año de ingeniería en la UCSC-Chile

Orellana, Eduardo R.
Universidad Católica de la Santísima Concepción, Concepción, Chile
eorellana@ucsc.cl
Ponencia, Nivel Educativo Superior, Historia y epistemología

Resumen

El presente trabajo se inserta desde una investigación previa de indagación hecha entre la comparación de la evolución histórico-epistemológica del concepto límite y el currículo de primer año de ingeniería en la UCSC y UNICIT Chile presentada en congreso 2012 de la SOCHIEM y que tendrá como objetivo describir y analizar los avances en el aprendizaje del concepto límite de estos estudiantes presentado desde su epistemología y su uso en la posterior aplicación de una ingeniería didáctica.

La propuesta nos permite describir y analizar las principales variables que son necesarias para la construcción del concepto de límite y su inserción en el currículo. En este trabajo se presentan las conclusiones que obtenemos al realizar dicha aplicación para determinar los conceptos y procesos matemáticos desarrollados por estudiantes de ingeniería de la UCSC.

El trabajo utiliza herramientas de la metodología cualitativa y cuantitativa que nos permita describir los principales errores y dificultades que los estudiantes de primer año de ingeniería tienen, en relación a esos conceptos y procesos matemáticos presentes en la construcción del concepto de límite. En este trabajo se presenta un avance de las herramientas metodológicas que se utilizan en la investigación.

Los resultados serán utilizados para realizar diferentes propuestas que mejoren el currículo correspondiente y que puedan ser utilizadas en el aula para obtener mayores aprendizajes del concepto límite.

Palabras clave: Epistemología, concepto de límite, currículo, ingeniería didáctica

Introducción

Este trabajo forma parte del proyecto de investigación mucho que da continuidad a uno previo y que tiene como finalidad aplicar una ingeniería didáctica a estudiantes de ingeniería de la UCSC teniendo como sustento la epistemología del concepto límite desde la epistemológica del concepto y el currículo en Chile en matemáticas para el nivel superior en un primer semestre de la carrera de ingeniería en la UCSC. Trabajos referentes al estudio del concepto existen varios, entre los más relevantes se pueden considerar los de Cornu (1991) y Sierpinska (1985), en ellos se manifiesta la enorme dificultad de la enseñanza y del aprendizaje del concepto de límite que se debe a su riqueza y complejidad tanto como al hecho de que los aspectos cognitivos implicados no se pueden generar a partir de la definición matemática simple.

El trabajo anterior permitió dilucidar que desde la perspectiva educativa el análisis del concepto límite y su enseñanza-aprendizaje se convierte en un problema para la educación matemática. Entre los posibles problemas que presenta su enseñanza-aprendizaje es el referido a la concepción sobre las matemáticas con que se asume esa enseñanza-aprendizaje (Cornu, 1991). Esta concepción es contraria a la histórica-epistemológica del desarrollo del concepto, ya que primero las nociones se utilizan para reconocerse y definirse lógicamente mucho tiempo después (19 siglos). Otro de los problemas de la enseñanza-aprendizaje del concepto es el de convertirlo en un conocimiento algorítmico desde la perspectiva algebraica debido a que sólo son reducidos al manejo de manipulaciones algebraicas.

Las nociones de infinito, aproximación, variación como mecanismos de aproximación a la construcción lógica del concepto límite están presentes desde épocas muy tempranas en la Historia y Epistemología de las matemáticas. Para fines de la investigación, cabe necesario preguntarse, ¿por qué es necesario comparar la historia y epistemología del concepto límite y el currículo para los estudiantes de primer año de ingeniería?, en función de ello, en el proceso de enseñanza-aprendizaje actual, ¿qué elementos del desarrollo del concepto no se están atendiendo en el currículo de primer semestre de ingeniería?, por ende, ¿Es la práctica del currículo un elemento determinante en el logro de aprendizajes de calidad en los estudiantes de primer año?. El objetivo general de este trabajo es ahora proponer la enseñanza del concepto desde su epistemología y sus procesos matemáticos cuando se detectan los errores y dificultades en la construcción del concepto de límite, determinado del análisis comparativo entre historia-epistemología del concepto límite y, el currículo de primer año de ingeniería de la UCSC hasta esta "nueva" forma de enseñarlo. Para llevar a cabo tal objetivo es necesario, entonces, desarrollar en dicha propuesta la concepción histórico-epistemológico del concepto límite describir y caracterizar un conjunto de elementos conceptuales para finalmente, mejorar las prácticas de enseñanza–aprendizaje del concepto límite en los estudiantes de primer año de ingeniería...

Metodología

El estudio metodológico de esta primera parte del trabajo está centrado en realizar una ingeniería didáctica a los estudiantes de primer año de ingeniería del semestre I del 2014 de la UCSC desde la epistemología del concepto límite y con lo que respecta a la construcción del concepto límite. Por lo que, los ejes del estudio de la metodología son la epistemología del concepto límite y las respuestas que logran los estudiantes de primer año frente a ello.

La importancia de considerar en el proceso de enseñanza-aprendizaje un estudio histórico-epistemológico del concepto en matemáticas lo argumenta Guzmán (1992) preguntando, *¿Qué conocimientos sobre la historia de las matemáticas y sobre un tema en particular se puede ofrecer al estudiante?,* a lo que responde:

- *Ofrecer una visión de la ciencia y las matemáticas como actividades humanas.*

- *Ofrecer un marco dentro del cual organizar los elementos de nuestro conocimiento matemático.*

- *Ofrecer una visión dinámica de la evolución de las matemáticas.*

- *Ofrecer reconocimiento de la interrelación de pensamiento matemático y la cultura en la sociedad humana: de la importancia de las matemáticas como parte de la cultura humana.*

- *Ofrecer una profunda comprensión técnica.*

- *Ofrecer tomar conciencia de lo especial en la vida de cualquier teoría matemática.*

Se desprenden del estudio las respuestas de los estudiantes frente a esta nueva forma de enfrentar el concepto y lo "clásico" que normalmente se realiza en un curso común de ingeniería de la UCSC.

Del concepto límite

Esta primera parte del estudio considera los cuatro períodos históricos que datan desde los primeros indicios del concepto en la Grecia antigua hasta el siglo XIX de nuestra era. Son dichos períodos: la Grecia Antigua,

el Siglo XVIII, Siglo XIX y Siglo XX.

De la Grecia Antigua. La elaboración del concepto de límite, origina entre otras cosas, que pase a primer plano un concepto que se remontaba a épocas pretéritas: el infinito (Cobos, 2000). En aquel entonces la explicación de la revelación de lo inconmensurable de las magnitudes en la Grecia antigua, se centraba en *la prolongación ilimitada del proceso de búsqueda de una medida común, en lo infinitamente pequeño de la medida común, y ésta, debía estar contenida un número infinito de veces en las magnitudes que se comparan* (Ríbnikov, 1987). Los métodos se apoyan en un concepto intuitivo, los métodos infinitesimales son el punto de partida para los antiguos.

Del siglo XVIII. Para los principales matemáticos de este período, como Euler, D'Alembert, Descartes, Bernoulli, lo esencial era argumentar que todo el análisis gira alrededor de las *"funciones"* y de las magnitudes variables. Así, se sustentaba que el tratamiento de los límites era por la forma de las variables y el cálculo de diferenciales. La representación era de carácter no algorítmico Se aceptan algoritmos especiales y se

ocupan los pasos al límite con la teoría de los ceros, también, se considera la definición de límite unilateral.

Del siglo XIX. Las características más importantes de este período es que se contribuye a la teoría de variable real y de conjuntos con razonamientos filosóficos, cuestión defendida por Bolzano, por lo que las aplicaciones quedan atrás.

Llega la introducción del criterio de convergencia y la continuidad de funciones.

Del siglo XX. Las características más relevantes de este período respecto al concepto tienen que ver con las definiciones y demostraciones que se usan para fundamentar el límite. Es necesaria la rigurosidad de número real (por medio del límite de sucesiones convergentes). La construcción del concepto de límite debe tener como base la teoría de número real.

El concepto de límite en el currículo chileno

Currículo de primer año de ingeniería en la UCSC y Unicit (Chile). Principalmente este considera tres cuestiones medulares: calcular límites de funciones y sucesiones.

Aplicar teoremas. El estudio delata una fuerte influencia de problemas de tipo algorítmico, esta clasificación está considerada bajo la definición de Blanco (1993).

Aplicación de una Ingeniería Didáctica desde la epistemología del concepto límite a estudiantes de primer año de ingeniería de la UCSC

Se persigue un único objetivo: dar una teoría rigurosa del número real teniendo como base la teoría de límites, No olvidemos que la teoría del número real le sirve como base a Weierstrass, para toda la construcción del análisis matemático. Como se sabe, actualmente el análisis exige la utilización de los métodos y resultados de la teoría de conjuntos y la teoría de funciones de variable real.

Se recurre a trabajar entonces con los estudiantes con las concepciones de axiomas de Cuerpo, orden y de completitud en *IR*, recubrimiento, espacios normados, distancia, bolas abiertas-cerradas, vecindad, vecindad despuntada, convergencia, teoremas de Cauchy y Henry-Borel, etc. (Apostol, 2006)

Dentro de las diferencias más importantes se presentan en la siguiente tabla:

CURRÍCULO	RESPUESTAS DESDE LA EPISTEMOLOGÍA
no relaciona directamente las concepciones de diferenciación e integración con el concepto de límite	Relacionan directamente las concepciones de diferenciación e integración con el concepto límite
desarrollo algorítmico del concepto límite	Desarrollan la epistemología del concepto límite
no hay evolución del concepto de límite desde el reconocimiento hasta definirse	se utilizan las nociones de límite para reconocerse y luego definirse
no se aprecia acondicionamiento histórico de la organización lógica de las matemáticas	existe un condicionamiento histórico de la organización lógica de las matemáticas en los estudiantes
es notoria la presencia de la técnica en las practicas del currículo	Presentan la técnica del cálculo en las prácticas de los estudiantes como algo reemplazable
ausencia de demostración de la unicidad del límite	demostración de la propiedad de la unicidad del límite
no se utiliza el método de exahusción para casos directos de límites	uso general del método de exahusción con la demostración por reducción al absurdo para cada caso particular

CURRÍCULO	RESPUESTAS DESDE LA EPISTEMOLOGÍA
ausencia completa de paradojas tales como las de Zenón para la búsqueda de soluciones a problemas que tengan que ver con el concepto de límite	Usan las paradojas de Zenón para buscar soluciones lógicamente perfectas a problemas relacionados con la idea intuitiva de límite
presencia algorítmica del concepto de límite en la actualidad en la carrera de ingeniería	aparece el concepto de límite muy alejado de ser un concepto algorítmico
dependencia excesiva funcional para la concepción de límite	necesidad de una idea de dependencia funcional para la nueva concepción de límite
el currículo muestra todo su programa en torno a las funciones respecto al concepto de límite	lo que tiene que ver con límites en la propuesta, gira alrededor de las magnitudes variables y sus funciones
consideración de la definición de límite unilateral	aún queda la dificultad de la definición de límite unilateral
presencia notoria del método algebraico y algoritmos de resolución de cálculo de límites	lo existente hasta este momento se debía sustituir por el método algebraico o cualquier otro algoritmo especial
poca fundamentación del concepto límite en aplicaciones concretas	las críticas del concepto se fundamentan por su uso en aplicaciones concretas
utilización de estimaciones cualitativas tales como "cerca de"	no se acepta el concepto con estimaciones cualitativas
vacíos lógicos de elementos topológicos para el concepto	existen lagunas lógicas como por ejemplo la de número real

Tabla 1. *Aspectos diferenciadores más importantes entre el currículo en ingeniería en la UCSC y la propuesta de una I.D. desde la epistemología del concepto lími*

Conclusiones

En este trabajo se ha puesto de manifiesto, tanto en el análisis teórico (historia-epistemología y el concepto de límite) como las respuestas de los estudiantes, que el tratamiento realizado hasta *el momento de los conceptos no es el adecuado para conseguir una buena asimilación de los mismos.* Entre las conclusiones más significativas se pueden considerar las siguientes:

Conclusiones I. Es necesario considerar el desarrollo Histórico-Epistemológico del concepto límite en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Se debe considerar limitadamente el concepto en cuestiones de velocidad, tangente, ya que puede llevar al fracaso cuando se pretendan justificar las bases del cálculo. Existe excesiva importancia al registro algebraico y poco a los registros numéricos. Hay demasiado énfasis de los procesos algorítmicos, induciéndose siempre en fórmulas que llevan a un resultado. Se tienen mínimos contenidos conceptuales previos al concepto en la enseñanza secundaria (o enseñanza media.).

Conclusiones II. Existe una notoria diferencia entre el cómo se aprende el concepto de límite y su epistemología. De la primera se determina una necesidad de reestructuración y actualización del currículo y como segunda cuestión, se nota un porcentaje mayoritario de cuestiones históricas-epistemológicas que no son consideradas en el aprendizaje del concepto por parte de los estudiantes. Notamos un desarrollo no lineal a través del tiempo del concepto límite y algo muy interesante es que más de la mitad del estudio epistemológico no coincide con el aprendizaje.

Consecuencias del análisis comparativo. Se percibe poca articulación entre el currículo vigente y la historia-epistemológica del concepto límite, por lo que, la planificación del currículo se hace débil, así, la crítica está centrada en esa falta de análisis del currículo y de la historia del desarrollo del concepto límite.

Finalmente, se pueden desprender del estudio una serie de proyecciones para un nuevo trabajo de investigación que presenta la necesidad de diseñar un currículo que asegure aprendizajes efectivos y de calidad en los estudiantes reestructurando el currículo, para así, mejorar las prácticas docentes. La futura investigación debiera estar dirigida en base a preguntas ejes tales como, ¿qué contenidos básicos sobre el concepto límite tiene que poseer el currículo de primer año de ingeniería, para conducir procesos de enseñanza-aprendizaje de calidad y equidad en la sociedad del conocimiento del siglo XXI?, o, atendiendo a los principios de una educación de calidad, diversidad y pluralidad ¿existe relación entre el aprendizaje de los estudiantes y desarrollo histórico-epistemológico del concepto límite?. Finalmente, ¿cuáles son los errores y dificultades en la enseñanza-aprendizaje del concepto límite en los estudiantes de primer año de ingeniería de la UCSC?

Limitaciones del trabajo. Algunas más significativas:

1. Por motivos de tiempo, la utilización del concepto de límite para el estudio de la derivada e integral, no tuvo la trascendencia que se esperaba. Se mencionan las cuestiones históricas, pero no son analizadas detenidamente. Así, el problema de las aplicaciones del límite como aproximación óptima es también un problema abierto.

2. Al plantear este trabajo existe un interés, entre otras cosas, de abordar el tema a estudiantes de cursos inferiores (últimos años de enseñanza media en Chile)

3. Futuras investigaciones pueden estar dirigidas a estudiantes de carreras como los negocios, la arquitectura entre otros.

Referencias

Apostol, T., M. (20106). Análisis Matemático. Editorial Reverté. España.

Blanco, L.J. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. Revista Épsilon. N° 25 (pp 49- 60). Universidad de Sevilla.

Boyer, C. (1986). Historia de la Matemática. Editorial Alianza S.A., Madrid.

Cobos, J. (2000). Francisco Vera Fernández de Córdoba. Tres obras inéditas. Badajoz, Servicio de publicaciones Diputación de Badajoz.

Cornu, B. (1991). Apprentissage de la notion de limite:

modéles spontanés et modéles propres. Proceedings PME-V. Grenoble. France. Vol. I, pp. 322-326.

Guzmán, M. (1992). The origin and evolution of mathematical theories. Implications for mathematical education. Selected lectures from the 7th international congress on mathematical education. Canadá pp 147 – 155.

Ríbnikov, K. (1987). Historia de las matemáticas. Editorial MIR, Moscú. Traducido del ruso por Concepción Valdés Castro.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. Educational Studies in Mathematics. Vol. 18, pp. 371-397.

Tristán, L. (2014). Análisis Matemático. Ediciones Universidad de Valladolid, Valladolid. España.

Significado de referencia del objeto matemático Antiderivada

Wilson Gordillo Thiriat; Luis R. Pino-Fan
Universidad Distrital-Colombia; Universidad de Los Lagos-Chile
wgordillot@udistrital.edu.co; luis.pino@ulagos.cl
Superior- Epistemología e Historia de las Matemáticas

Resumen

En este trabajo se presenta resultados parciales de una investigación más amplia, a través del cual se identificaron diversas prácticas que abordaron los matemáticos en la historia y que dieron paso al surgimiento y evolución de la noción antiderivada. Luego de identificar las prácticas, éstas se analizan con las herramientas teórico-metodológicas que nos proporciona el marco teórico denominado Enfoque Ontosemiótico (EOS), con el fin de determinar los significados parciales que a lo largo de la historia ha adoptado la antiderivada. Cada significado parcial identificado, refieren a significados de referencia de la antiderivada, que no deben dejarse de lado en la enseñanza actual de esta noción.

Palabras clave: Antiderivada, enfoque ontosemiótico, significado de referencia, configuración epistémica.

Introducción

En este trabajo presentamos el resultado basado en un estudio histórico-epistemológio de tipo documental, que se realizó con el fin de identificar las diversas etapas historicas de las cuales emerge la antiderivada. A través de situaciones problemas abordados por los matematicos de la época, describimos las carácterísticas de las prácticas desarrolladas en divesos momentos históricos, los cuales contribuyeron al surgimiento y formalización de la antiderivada como objeto matemátíco.

Para el análisis de las prácticas matemáticas desarrolladas, utilizamos algunas de las herramientas que nos proporciona el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos, concretamente utilizamos la noción de configuración epistémica, la cual nos permitió identificar y caracterizar cuatro significados parciales para la antiderivada.

Marco teórico y metodología

Inicialmente se realizó un estudio mediante en el cúal se revisó en la historia del análisis matemático el uso de prácticas matemáticas con la antiderivada, en el cual tratamos de identificar problemáticas relevantes que dieron paso al surgimiento de la antiderivada y a su evolución.

Una vez identificadas estas situaciones-problemas en las etapas históricas, el siguiente paso fue identificar el tipo de problemas que se abordaron en cada una de ellas, así como el tipo de tratamiento (o soluciones) que se plantearon. Para analizar tanto el tipo de situaciones-problemas como el tipo de soluciones que se plantearon a dichas situaciones-problema, hicimos uso de la noción de c*onfiguración epistémica* (Pino-Fan, Godino & Font, 2011). Esta noción es proporcionada por el marco teórico conocido como *enfoque onto-semiótico,* y se ha utilizado porque permite describir y caracterizar de manera sistemática los objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades y argumentos) que intervienen en las prácticas matemáticas sobre antiderivadas, así como los significados de esta noción matemática, de acuerdo a cada etapa histórica.

Configuraciones epistémicas asociadas a problemáticas que involucran el uso de la antiderivada.

El recorrido histórico-documental que se utilizó, permitió identificar problemáticas que dieron paso a la emergencia de la antiderivada como objeto matemático, las cuales hemos agrupado en cuatro grandes categorías: a) El problema geométrico de las tangentes de una curva y la cuadratura de la misma; b) El problema de la relación fluxiones–fluentes; c) El problema sobre la relación de las sumatorias y los diferenciales; y d) El problema de la identificación de funciones elementales.

A continuación, se analiza cada uno de los cuatro sistemas de prácticas, mediante el análisis de un ejemplo prototípico a través del cual se describen las características de la configuración epistémica asociada a cada sistema.

Configuración epistémica 1 (CE1): El problema geométrico de las tangentes y cuadraturas.

Este problema, fue abordado por Barrow de forma geométrica, y es característico tanto de las *situaciones/problemas* abordados en la época, como de las prácticas matemáticas que hasta esa época se desarrollaban. Barrow logra unir dos *conceptos* separados hasta ese momento, la 'tangente a una curva' y la 'cuadratura' de la misma.

Las construcciones geométricas son un trabajo propio de los griegos y se utilizaron como único *argumento,* y *lenguaje,* hasta el siglo XVII. Todas las *propiedades* y *procedimientos* están apoyadas en construcciones geométricas heredadas de los griegos, los cuales no disponían de métodos generales para el trazado de rectas tangentes a cualquier curva, ni mucho menos relacionarla con la cuadratura de la misma. Tanto en el planteamiento como en las soluciones de las situaciones problemas, se utilizó un *lenguaje* propio de la geometría euclidiana y sus *argumentos* eran puramente sintéticos. En las soluciones propuestas, intervenían *conceptos* tales como curva continua creciente, ordenada, perpendicularidad, puntos, rectángulo, longitud, paralelismo. Así mismo, en la lección X planteada por Barrow (1735), destaca la relación geométrica entre las tangentes y la cuadratura, describe:

"Sea ZGE una curva cuyo eje es VD y consideremos las ordenadas (VZ, PG y DE) perpendiculares a este eje y continuamente creciendo desde la ordenada inicial VZ; también sea VIF una curva tal que si una línea recta EDF es trazada perpendicular al *eje VD, cortando a las curvas en los puntos E, F y*

VD en D, el rectángulo determinado por DF y una longitud dada R es igual al espacio VDEZ; también sea DE:DF=R:DT, y unimos [T y F]. Entonces TF cortará a la curva VIF. Tomemos un punto I en la curva VIF (primero del lado F hacia V) y, a través de él, tracemos IG paralelo a VZ y IL paralelo a VD, cortando a las líneas dadas como se muestra en la figura [Figura 3.2]; entonces, LF:LK=DF:DT, es decir R×LF=LK×DE. Pero de la naturaleza de las líneas DF y LK se tiene R×LF=área (PDEG), por tanto se tiene que LK×DE=área (PDEG)<D×DE, por lo tanto se tiene LK<DP<LI. De forma análoga, si el punto I se toma del otro lado de F, se haría la misma construcción de antes y se puede fácilmente demostrar que LK>DP>LI. A partir de lo anterior, es completamente claro que toda línea TKF permanece en o debajo de la curva VIF. Resultados análogos se obtienen si las ordenadas VZ, PG y DE decrecen en forma continua, la misma conclusión se obtiene mediante un argumento similar. Sólo una particularidad ocurre, a saber, en este caso, al contrario que en el otro, la curva VIF es cóncava respecto al eje VD" (p. 167). Aquí aparecen propiedades utilizadas siglos atrás por los griegos, como la perpendicularidad entre curvas, rectas que unen intersecciones opuestas al trazo de tangentes en figuras cónicas, entre otras. Con respecto a los *procedimientos*, son los característicos de los matemáticos de la época, geométricos.

El problema resuelto por Barrow, abordado por los griegos, al igual que por otros matemáticos de la época, forma parte de un sistema de prácticas que se ha denominado "*Tangentes-Cuadraturas*", la cual reúne las prácticas matemáticas geométricas que en dicha etapa histórica se desarrollaban y que conferían un significado parcial, geométrico, a la antiderivada.

Configuración epistémica 2 (CE2): El problema de la relación fluxiones-fluentes

Este problema, es parte de un sistema, que se ha denominado *Fluxiones-Fluentes.* Para describir los elementos de esta segunda configuración (CE2), consideramos dos problemas prototípicos propuestos por Newton (1736):

"I. Dada la longitud del espacio descrito continuamente (es decir, en todo momento), encontrar la velocidad del movimiento en cualquier momento propuesto.

II. Dada la velocidad del movimiento continuamente, encontrar la longitud del espacio descrito en cualquier momento propuesto" (p. 19).

Estos problemas, y su solución, están basados en la concepción cinemática del movimiento continuo, y maneja dos *conceptos* centrales. El primero es el de *fluente*, entendido como cantidad de movimiento que varía respecto del tiempo. El segundo es el de *fluxión*, que es la velocidad de cambio del movimiento respecto del tiempo.

De acuerdo con Pino-Fan (2014), Newton introduce nuevos *conceptos/definiciones* en sus desarrollos sobre el cálculo infinitesimal y, con ellos, nuevas expresiones de términos y notación (además de *lenguaje* algebraico, geométrico y descriptivo), entre los cuales podemos señalar los siguientes (Pino-Fan, Godino y Font, 2011): a) "o" es un intervalo de tiempo infinitamente pequeño; b) "momento de x" que define como un incremento infinitesimal de x, que representa con ox (análogamente define el momento de y, oy); c) en palabras de Newton: "Llamaré *cantidades fluentes*, o simplemente *fluentes*, a estas cantidades que considero aumentadas gradualmente e indefinidamente; las representaré mediante las últimas letras del alfabeto v, x, y, z para distinguirlas de las otras cantidades"; d) el concepto fluxión definido con sus palabras: "representaré con las mismas últimas letras coronadas con un punto $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, las velocidades con que las fluentes aumentan por el movimiento que las produce y que, por consiguiente, se pueden llamar fluxiones"; y e) *"momento de la fluente"* es la cantidad infinitamente pequeña que varía una fluente como x en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño "o", es decir, $\dot{x}o$.

El método de las fluxiones de Newton es, a su vez, el *procedimiento* de esta configuración. Para abordar el segundo problema Newton sugiere: "Sea la ecuación propuesta por $3xx^2 - 2axx + axy - 3yy^2 + ayx = 0$, calcular las fluentes" (Newton, 1736, p. 26).

Sus escritos muestran la solución a este problema, indicando que se debe proceder de manera contraria a la sustitución del primer problema planteado.

En este último ejemplo propuesto por Newton, al igual que en el problema propuesto al inicio, vemos como *argumenta* los procedimientos (y en general sus *definiciones* y *proposiciones*) con base en consideraciones dinámicas y de infinitesimales, apoyándose siempre en el álgebra y el análisis geométrico.

Dentro de las *proposiciones/propiedades* dadas por Newton, podemos mencionar las siguientes (Pino-Fan, Godino y Font, 2011): a) Supongamos una curva cuya área está dada por la expresión $z = ax^m$, donde m es entero o fraccionario entonces la curva está dada por la expresión $y = max^{m-1}$ (derivación); y b) dada una $y = max^{m-1}$ entonces el área comprendida bajo la curva es $z = ax^m$ (integración).

En cuanto a los tipos de *situaciones/problemas* de esta configuración, Newton abordó problemas sobre el cálculo de la velocidad del movimiento en un tiempo dado cualquiera, dada la longitud del espacio descrito, y viceversa.

Vemos como en esta configuración las fluxiones o velocidades de los movimientos de las fluentes –que en la actualidad conocemos como la derivada–, y las fluentes o cantidades que varían respecto al tiempo –que en la actualidad conocemos como antiderivación–, son entendidos por Newton como procedimientos recíprocos.

Configuración epistémica 3 (CE3): El problema de la relación diferenciales-sumatorias

Este problema, planteado por Leibniz, forma parte de un sistema de prácticas que se ha denominado "Sumatoria-Diferencial". Este sistema de prácticas lo analizamos a partir de dos problemas prototípicos. El primero está basado en la construcción del cálculo diferencial a partir de las diferencias infinitesimales, mientras que el segundo se basa en la construcción del cálculo sumatorio (cálculo integral) a partir de la suma de diferencias infinitamente pequeñas.

De acuerdo con Pino-Fan (2014), Leibniz utiliza un *lenguaje* simbólico general mediante el cual se pueden escribir con símbolos y fórmulas todos los procesos de *argumentación* y de razonamiento. Con este fin, logró introducir un nuevo *lenguaje* accesible, que aún se mantiene en nuestros días, el cual facilita la manipulación de los *conceptos*, *procedimientos* y *argumentos*, en el cálculo diferencial. Por ejemplo, Leibniz introduce los símbolos $\int$ y d, los cuales concibe como operadores que representan respectivamente la suma de rectángulos o suma de áreas y las diferencias entre dos valores sucesivos de x o y. Así mismo, denota con dx y dy a las diferenciales de las variables x e y respectivamente, es decir, diferencias infinitamente pequeñas de x e y.

Los lenguajes, nuevos términos y notaciones, introducidos por Leibniz, estaban asociados a una serie de nuevos *conceptos/definiciones* o *procedimientos*, primordiales en su cálculo de diferencias. Por ejemplo, dy la utiliza para denotar el concepto de diferencial de una variable y, la cual define como la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos de y (análogamente define la diferencial de la variable x, dx). Así mismo, como ya señalamos anteriormente, introduce el símbolo $\int$ para representar el proceso de sumar rectángulos o áreas de rectángulos, y d para representar las diferencias entre dos valores sucesivos de x o y. Las fórmulas proporcionadas por Leibniz, que hasta ahora conocemos, para derivar productos, cocientes, potencias y raíces, así como la regla de integración por partes, son ejemplos de *proposiciones* y *procedimientos* al mismo tiempo.

Así mismo, afirmaba que el proceso de integración, referido como proceso de sumación es inverso al proceso de diferenciación. Pronto se interesaría en la relación que existe entre dx y dy, y del significado de expresiones tales como $d(uv)$, $d\,(u/v)$, etc. Así, en un manuscrito, titulado *Methodus Tangentium Inversa* (Método inverso de tangentes), Leibniz afirmaba que la mejor manera de encontrar las tangentes es determinando el cociente dy/dx , dándose cuenta de que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón de las diferencias de ordenadas y abscisas cuando se hacen infinitamente pequeñas.

Uno de los resultados geométricos de Leibniz, equivalente a los hallazgos de Barrow, se obtiene cuando relaciona la tangente de una curva con la cuadratura de la misma. Él lo describe como sigue:

"Sea AC una forma curva cuyo eje ordenado es AB, el área de esta curva es llamado l. Sea AD otra forma curva con el mismo eje de ordenado, este segmento de ordenada es BD, llamado "y". Sea esta curva AD tal que el área ABC está dada por todas las eles $(l$'s$)$ o escrito de otra forma $\int l$, que es igual al producto de BD y una línea fija igual a ay; luego, tomando B(B) igual a la unidad, tenemos que $l=aw$, donde w:B(B)=DB:BT o $w=y/d$, $l=ay/d$" (Leibniz, 1920, p. 180).

Configuración epistémica 4 (CE4): El problema de la identificación de funciones elementales

Este problema, corresponde a uno de los sistemas de prácticas que identificamos y que lleva vinculada la configuración epistémica cuatro (CE4) que se ha denominado "funciones elementales". A continuación, se describen los elementos de esta configuración mediante un problema prototípico propuesto por Euler y construido sobre los problemas y soluciones de Leibniz. Euler determinó la adición de una constante de integración al encontrar las funciones primitivas (antiderivada) y que en la actualidad conocemos como la constante de integración en la solución de una integral indefinida, que representa una familia de funciones de una función que ha sido derivada; de esta forma Euler distingue entre la integral particular (integral definida) y la integral completa (integral indefinida).

Euler utiliza un *lenguaje* nuevo en las matemáticas al adicionar una constante arbitraria para expresar la solución de la integral completa, que hoy se conoce como la adición de la constante de integración para representar una función que reúne la familia de funciones de una función al ser derivada. Sus *argumentos* para diferenciar la integral completa de la integral particular, llevan a lo que hoy conocemos como la antiderivada. Los aportes de Euler (1770), determinan con *definiciones* el hecho de que no todas las funciones tengan antiderivada o primitiva, pero sí puedan integrase a través de series trabajadas por Leibniz.

Euler, advierte la forma en que debe ser abordada la antiderivada de una función. Indica en sus escritos la forma de abordar funciones a través del cálculo integral, indicando qué hacer cuando estas no pueden ser expresadas en forma elemental. Esta indicación hace que encontremos la solución por métodos diferentes a los elementales (numéricos) haciendo que la función pueda ser integrable sin tener antiderivada.

Pero la importancia del aporte de Euler esta en la distinción que hace entre las nociones de integral completa –lo que conocemos hoy en día como integral indefinida o antiderivada–, y de integral, haciendo referencia a integrales definidas. Estas integrales definidas se pueden calcular, siempre y cuando se cumplan las condiciones de continuidad y de función elemental, a través de la aplicación de lo que hoy conocemos como TFC

Consideraciones finales

La propuesta de reconstrucción del significado de referencia de la antiderivada, resulta especialmente importante porque a través de ellos se identifican significados parciales de un objeto en la historia. El análisis de problemáticas por medio de la herramienta del EOS, en particular de la noción de *configuración epistémica* (Pino-Fan, Godino & Font, 2011), permite describir de forma sistemática situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, y argumentos, involucrados en las prácticas desarrolladas en diversos momentos históricos y que dieron paso al surgimiento y evolución de la antiderivada.

El estudio resultó en la identificación de cuatro configuraciones epistémicas que denominamos: 1) *Tangentes-Cuadraturas* (CE1); 2) *Fluxiones-Fluentes* (CE2); 3) *Sumatorias-Diferencias* (CE3); 4) Funciones *Elementales* (CE4). Cada una de estas *cuatro* configuraciones epistémicas, a su vez, llevan asociado un significado parcial distinto para la antiderivada. De acuerdo con Pino-Fan, Godino y Font (2011), y a los resultados de este estudio, la herramienta *configuración epistémica* se prevé como una herramienta teórico-metodológica que permite determinar significados parciales para los objetos matemáticos.

Referencias

Barrow, I. (1735). Geometrical Lectures. (Translated from the Latin Edition by Edmund Stone). Londres: Cambridge University.

Euler, L. (1770). Intitutionum Calculi Integralis (Vol. 1) (Translated from the Author's Latin Original). St. Petersburg.

Leibniz , W. G. (1920). The early mathematical manuscrpts of Leibniz. New York: Dover Publication, Inc.

Newton, I. (1686). Philosophiae naturalis principia mathematica (Translated from the Author's Latin Original). Londres.

Newton, I. (1736). The method of fluxions and infinite series (Translated from the Author's Latin Original by John Colson). Londres.

Pino-Fan, L. (2014). Evaluación de la faceta epistemica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada. Granada: Universidad de Granada.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático *sobre la derivada. Educação Matemática Pesquisa, 13(1), 141-178.*

CLICKERAS: Una herramienta para la evaluación y la construcción social del conocimiento matemático

Claudio Gaete Peralta, Marta Araya Wersikowsky,
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
claudio.gaetep@gmail.com, profematw@gmail.com
Nivel Educativo: Enseñanza Media y Superior. Categoría: Evaluación en Ed. Matemática.

Resumen

El presente taller tiene como finalidad, dar a conocer de una forma teórico - práctica, las ventajas y potencialidades de herramientas tecnológicas, llamadas Clickeras, que permiten obtener de forma instantánea, información sobre el progreso de los participantes. En base a esto, pueden ser utilizadas para evaluar, desde el paradigma de la toma de decisiones, diversas actividades matemáticas. En esta ocasión, trabajaremos en torno a las llamadas Ecuaciones Irracionales, en donde la operación algebraica no entrega necesariamente la solución de esta ecuación, sino más bien, soluciones "espurias", es decir, que se obtienen de la resolución cuando se realizan transformaciones, pero que no necesariamente satisfacen la igualdad en la ecuación original. A partir de esto, resulta importante abordar su resolución desde otro enfoque.

Cabe señalar que dichas actividades están diseñadas en base a la teoría de la Socioepistemología, y que con esta actividad buscamos dotar a dicha teoría de aspectos relacionados con la evaluación. Además, esta herramienta ayuda a generar un ambiente que propicia las prácticas sociales, las cuales son vistas como generadoras de resignificaciones de conocimiento matemático.

Introducción

Es sabido que existen muchas definiciones de Evaluación, pero independiente de cuál sea la utilizada, lo que se evalúa en el sistema escolar es el Aprendizaje (en términos de conocimientos, habilidades o actitudes), en función de alcanzar un determinado Saber. Nosotros entenderemos estos conceptos en el sentido de Cantoral (2013): Conocimiento como información sin uso y Saber cómo la acción deliberada para hacer del conocimiento un objeto útil frente a una situación problemática a partir de prácticas socialmente situadas. Por tanto, el Aprendizaje es una manifestación de la evolución del conocimiento al saber.

En la teoría de la Socioepistemología, el Saber es considerado como una construcción social del conocimiento y está ligado a la vivencia, presentándose como un objeto lleno de experiencia. Cordero (2006) menciona que el planteamiento fundamental de esta teoría consiste en asumir que el conocimiento matemático se construye en base a prácticas sociales, las cuales dirigen o hacen normar todo el proceso de construcción del aprendizaje matemático y cuya función es la explicación científica, para generar marcos epistemológicos que sirvan para la intervención didáctica. A través de las prácticas sociales el hombre da sentido a los problemas fundamentales de la ciencia, sometiéndolos a las complejas relaciones entre ellos y su entorno. La teoría Socioepistemológica realiza una crítica del discurso Matemático Escolar (dME). Cantoral (2013) lo define como un discurso que valida la introducción del saber matemático al sistema educativo. Se establece que el dME deja a la matemática en un nivel utilitario y no en un nivel funcional (Cordero, 2006), provocando que el estudiante no logre hacer suyos los conocimientos adquiridos, ya que este se despersonaliza y descontextualiza, lo que lleva a una escasa posibilidad de que el propio estudiante logre su construcción, donde una de sus consecuencias es que, al estar frente a diversas situaciones, no logren articular y movilizar dichos conocimientos. En este sentido, podríamos decir que la enseñanza de la Matemática esta ciencia ha sido usada para expulsar estudiantes del sistema de enseñanza (Cantoral, 2013).

Sin embargo, el concepto de evaluación no está ligado a la Socioepistemología. Lo que pretendemos en este taller, es colocar la evaluación en el centro de la discusión, para revisar nuestras prácticas y reflexionar sobre ellas, además de establecer acuerdos y consensos, sobre qué evaluar en Matemáticas.

Desde la perspectiva sociocultural, la evaluación es algo que está presente en todo momento, en los más diversos contextos de la vida. En términos generales, las definiciones le asocian connotaciones como apreciar, valorar y calcular el valor de algo. En particular, en el contexto educativo, se le reconoce como un proceso sistemático ligado al aprendizaje cuyos elementos fundamentales son: la recogida de datos, el juicio valorativo y la toma de decisiones.

El proceso de evaluación ayuda tanto al profesor como al estudiante a conocer los avances y las áreas que necesitan fortalecer para continuar el proceso de aprendizaje. Con esta información, el docente puede tomar decisiones para modificar su planificación y adecuarla mejor a las necesidades de sus estudiantes. Por su parte, los alumnos podrán focalizar sus esfuerzos, con la confianza de que podrán mejorar sus resultados. Es importante que la evaluación se realice como un continuo dentro de las actividades en la sala de clases, pues está inserta en un proceso de aprendizaje.

Entonces, ¿cómo evaluamos, dentro de este marco, dicha actividad? Nuestra finalidad será aproximarnos a esta idea con ayuda de Clickeras, las cuales además nos permitirán realizar una evaluación no sólo a estudiantes, sino también evaluar nuestra propia labor docente.

Las Clickeras -como sistemas- permiten generar y obtener información (individual y colectiva) de los participantes de manera rápida y sencilla, facilitando la gestión de la clase de acuerdo a la información recabada, Es así que se puede aumentar la participación de los estudiantes, incrementar, abordar las debilidades detectadas y actualizar los aprioris, etc. atender especificidades, etc. En otras palabras, es un sistema que permite capturar datos de una audiencia en forma simultánea, hacer análisis rápidos de los datos para sacar información relevante para el proceso de construcción de conocimientos o para promover el desarrollo de una clase multidireccional, favoreciendo la atención, la participación y el debate entre los asistentes. Además, le permite al profesor realizar el seguimiento de cada estudiante, obteniendo una retroalimentación directa sobre la comprensión de los contenidos y el aprendizaje que va adquiriendo clase a clase.

En este taller, nos enfocaremos en dos objetivos. El primero, corresponde al uso del conocimiento matemático de la situación en cuestión, para entender, con ayuda de las Clickeras, cómo debate tal conocimiento, entre su función y su forma, de acuerdo con lo que organicen los participantes. Cordero (2006) denomina esto último como resignificación y tal debate se propiciará por medio del uso de estas herramientas. El segundo objetivo, busca determinar y precisar algunas ideas acerca de los aspectos más relevantes que giran en torno a la evaluación en Matemática, debatiendo sobre preguntas tales como: ¿Por qué y para qué evaluar en esta ciencia? ¿Qué aspectos deben ser evaluados? ¿Cuáles son las ventajas de las Clickeras, sobre otras formas de evaluación?

Para poner en práctica el uso de esta herramienta tecnológica, buscamos en esta ocasión, resignificar el objeto matemático denominado Ecuaciones irracionales, en donde su resolución algebraica, en muchos casos, entrega una solución "falsa". Este es el caso de la ecuación

$$\sqrt{x} - 3 = \sqrt{x + 3}$$

la cual no tiene solución, pero al resolverla algebraicamente, llegamos a una "solución", a saber, $x = 1$.

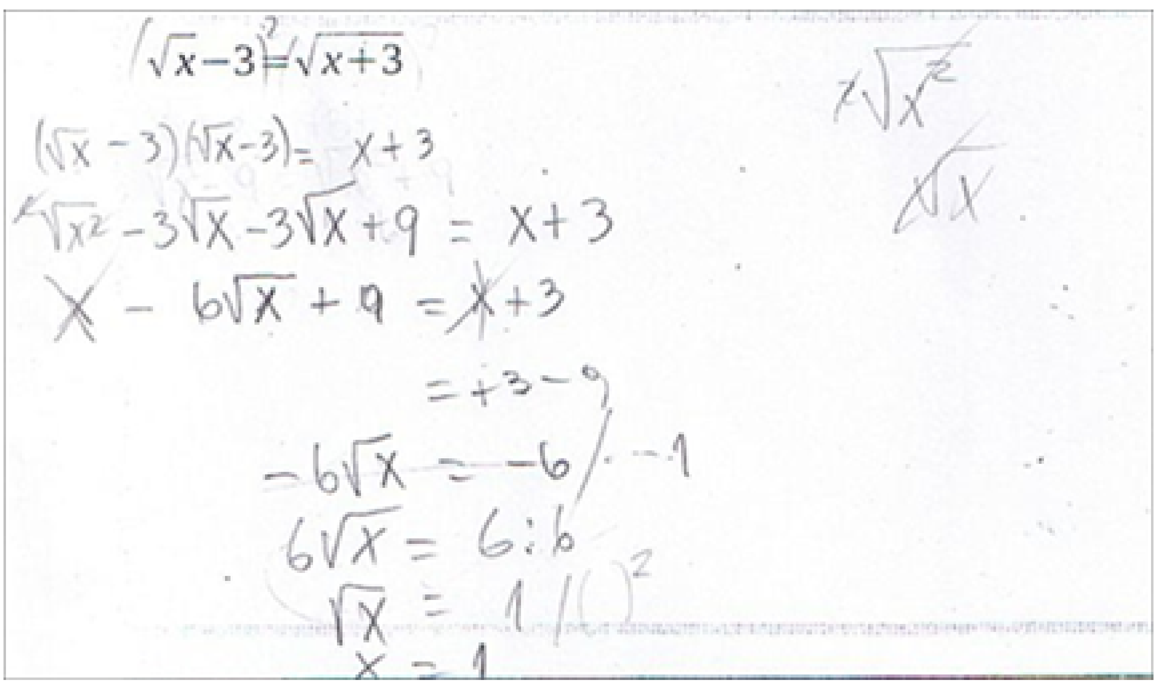


Figura 1: Resolución algebraica realizada por un estudiante

Chevallard (1997) menciona como "irresponsabilidad matemática" por parte de los alumnos, el no verificar que la solución que obtuvieron, es efectivamente, la solución de la ecuación irracional. La forma tradicional como se ha venido trabajando este asunto no permite que la mente del estudiante común albergue justificación alguna para realizar la comprobación, entendiendo ese procedimiento como algo adicional y superfluo.

En cuanto al diseño de la actividad

Cabe señalar que previamente se ha realizado un trabajo de carácter exploratorio, en donde hemos detectado, por medio de entrevistas en video y evidencia escrita, las falencias a la hora de resolver este tipo de ecuaciones, realizando este estudio en estudiantes de Ingeniería Comercial de una universidad privada (Viña del Mar), en formación inicial de profesores de una universidad que forma parte del consejo de rectores (Valparaíso), docentes universitario de distintas universidades, estudiantes de educación media participantes en un programa de talentos y diferentes profesores del sistema educativo de Colombia que participaron en un congreso internacional en Mayo de 2014.

Cantoral (2013) menciona que, al pretender enseñar un concepto, se deben favorecer las diversas miradas que puedan hacerse de los conocimientos y sus relaciones con los conocimientos previos, a fin de que los conocimientos adquiridos anteriormente puedan ir formando una cierta estructura conceptual cada vez más robusta y funcional. Para generar dicha estructura, hemos optado por realizar una actividad, por medio del uso de esta herramienta tecnológica.

Consideramos importante a la hora de diseñar la actividad con Clickeras, lo siguiente:

- Es necesario que la actividad integre aquellas circunstancias, en términos epistemológicos, que propiciaron su aparición, para que su integración en la vida de los estudiantes sea funcional (Cordero, 2004).

- La actividad debe promover el discurso argumentativo por parte de los estudiantes.

- El conocimiento debe ser construido por los estudiantes. Su objetivo debe ser la resignificación del concepto matemático en cuestión, en vías de hacer al conocimiento funcional.

La algoritmia en la búsqueda de solución (es) de una ecuación, está fuertemente instaurada en el dME. Encontrar la solución de esta, equivale a "despejar la x" y la herramienta más utilizada para esto es el álgebra. Inicialmente, en la resolución de ecuaciones de primer grado, este algoritmo es fuertemente utilizado y es la principal herramienta para encontrar una solución. Posteriormente, esta herramienta es utilizada para ecuaciones de Segundo grado, Irracionales, etc., por lo que el álgebra es a menudo, el único instrumento utilizado para validar su respuesta.

Si bien es cierto, es posible resolver este tipo de ecuaciones por medio de operaciones algebraicas (junto con un adecuado análisis de las funciones involucradas), nosotros propondremos una forma diferente de abordar dichas ecuaciones. Esto se realizará por medio del estudio de funciones del tipo $f(x) = a + \sqrt{bx + c}$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, estudiando su dominio, recorrido y gráficas. La actividad será guiada por medio del uso de Clickeras.

Nuestra propuesta

Trabajaremos en base a la siguiente actividad:

Encontrar la(s) solución(es) de la siguiente ecuación irracional:

$$\sqrt{x} - 3 = \sqrt{x+3}$$

Para lograr la resignificación relativa a la resolución de este tipo de ecuaciones, estudiaremos, con ayuda de esta herramienta tecnológica, el uso del conocimiento, viendo este como algo que se va organizando y cambiando, es decir, se va desarrollando en la situación o escenario que se enfrente.

La actividad propuesta cuenta con diferentes situaciones, en donde el uso de Clickeras nos ayudará a generar y obtener información de los estudiantes en cada una de estas. En una primera instancia, buscamos dar a conocer esa herramienta, mediante la participación de los presentes, a través de la siguiente actividad:

Situación 1
Indagación
Resolver la ecuación $\sqrt{x} - 3 = \sqrt{x+3}$ y posteriormente se les pide comentar sus respuestas.

Situación 2
Estudio de la función Raíz cuadrada
Estudio de su definición, dominio y recorrido, a través de diferentes preguntas con alternativas

Situación 3
Estudio de gráficas
Identificar, con ayuda de Geogebra, diversas gráficas de funciones de la forma $f(x) = a + \sqrt{bx + c}$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ son parámetros apropiados, con espacio a preguntas en las que se deba argumentar.

Situación 4
Resolución funcional de Ecuaciones irracionales por medio del uso de gráficas
Los estudiantes, deben determinar entre diferentes alternativas, qué valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$, permiten que la ecuación $a + \sqrt{bx + c} = \sqrt{x} - 3$ tenga solución y no tenga solución. A partir de esto, los estudiantes argumentarán sus conjeturas acerca de cuáles son todos los valores $a, b, c \in \mathbb{R}$, para los cuales dicha ecuación tenga o no solución.

Situación 5
Resolución de la ecuación $\sqrt{x} - 3 = \sqrt{(x+3)}$
Con los nuevos elementos abordados, se les pide resolver nuevamente dicha ecuación.

Situación 6
Resolver una nueva Ecuación irracional
Se les pide a los estudiantes resolver una nueva ecuación, para determinar cuáles fueron los avances logrados.

Aproximación a la evaluación de la actividad, bajo este marco teórico.

Luego de la experimentación, en una segunda instancia, buscamos dar a conocer las enormes potencialidades de esta herramienta, dentro de las que destacan:

- Ser una herramienta que facilita la práctica docente.
- Ofrece ambientes más participativos.
- Ayuda a generar y obtener información de los presentes de manera rápida y sencilla.
- Aumenta la participación de los estudiantes y su atención durante la clase.
- Agiliza procesos de retroalimentación.

Además, debatiremos sobre la forma en la que el uso de las Clickeras ayuda a la evaluación Matemática, bajo algunos tópicos relevantes de la Socioepistemología. Por ejemplo, con el fin de encontrar indicadores para que el conocimiento logre un nivel funcional, es necesario, a la hora de pensar en una evaluación, bajo este marco teórico, considerar lo siguiente:

- Evaluar el discurso argumentativo.
- Es de suma importancia analizar y ver cómo funcionan los argumentos que emergen de los procesos de interacción social. Esto, debido a que no debemos desconocer que existen en el aula de matemática y deben ser utilizarlos para la construcción y/o resignificación del conocimiento matemático. Especialmente, analizar cómo los argumentos que surgen a partir del uso de Clickeras, permiten llevar un conocimiento a un nivel funcional. Debemos tener en cuenta que la actividad que diseñamos se enfocará fuertemente en este tipo de análisis.

Referencias

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Barcelona: Gedisa.
Chevallard, Y. (1997). Estudiar Matemáticas, el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Barce-

lona: Océano.

Cordero, F. (2004). La Socioepistemología en la graficación del discurso matemático escolar. Resúmenes de la Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, 34. Ciudad: México.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matemática. La Matemática e la sua Didattica, 20(1), 59-79.

Socas M.; Camacho, M.; Hernández. (1996). Iniciación al algebra. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Trends in International Mathematics and Science Study (El Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias).TIMSS.

Villagrán, E. (1996). Construcción y validación relativa de un test pronóstico en álgebra para el primer año de enseñanza media. Tesis no publicada para optar al grado de Magíster en Educación con mención en psicología. Copiapó. Universidad de Atacama.

Implementación de la geometría topológica en aula de nivel inicial con estudiantes en formación mediante un estudio de clases

Víctor Huerta y Soledad Estrella
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
vhuertaherrera@gmail.com
Educación Pre escolar, Formación de Profesores.

Resumen

Esta investigación tiene como propósito analizar la creación e implementación de una clase de geometría topológica (invariantes topológicos en la geometría) en el aula de nivel inicial. Ello debido a la ausencia de ésta en los planes y programas del currículo oficial de Educación Infantil en Chiley en las mallas de formación, en comparación con la prevalencia de la geometría euclidiana. La creación e implementación de la clase se llevó a cabo ocupando la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) como constructo didáctico y el Estudio de Clases (EC) como constructo metodológico. Las notas de campo, bitácoras y encuesta permitieron analizar y describir la acción didáctica de cinco educadoras de párvulos en formación, participantes de un Grupo de Estudio de Clases, y cómo estas prácticas docentes pueden mejorar a través de la metodología de Estudio de Clases.

Introducción

La presente investigación expone algunos alcances con respecto a aquellos invariantes presentes en las geometrías, topológica, proyectiva y euclidea, que deben estar presentes en la educación y que empiezan a conocer los niños y niñas a temprana edad en su educación preescolar y en sus experiencias en el espacio.

Los Planes y Programas de Estudio (MINEDUC, 2008) del eje de geometría en los cursos iniciales muestran, de manera general, los conceptos geométricos que se deben enseñar en los primeros niveles. Al analizar los aprendizajes esperados del currículo, estos no están directamente relacionados con la geometría, más bien, las educadoras de párvulos deben interpretar qué geometría está asociada en cada aprendizaje (Tabla 1). Estos documentos curriculares tampoco declaran a la geometría topológica como parte de estos aprendizajes.

Tabla 1.

Aprendizajes esperados* del núcleo de relaciones lógico matemáticas según tipo de geometrías asociadas.**

Aprendizajes Esperados*	Tipo de Geometría
Orientarse temporalmente en situaciones cotidianas,	Proyectiva

Aprendizajes Esperados*	Tipo de Geometría
utilizando diferentes nociones y relaciones tales como: secuencias (antes después; mañana y tarde; día y noche; ayer-hoy-mañana; semana, meses, estaciones del año); duración (más-menos) y velocidad (rápido-lento).	Proyectiva
Reconocer algunos atributos, propiedades y nociones de algunos cuerpos y figuras geométricas en dos dimensiones, en objetos, dibujos y construcciones.	Euclidea
Comprender que los objetos, personas y lugares pueden ser representados de distinta manera, según los ángulos y posiciones desde los cuales se los observa.	Proyectiva
Descubrir la posición de diferentes objetos en el espacio y las variaciones en cuanto a forma y tamaño que se pueden percibir como resultado de las diferentes ubicaciones de los observadores.	Proyectiva
Establecer relaciones de orientación espacial de ubicación, dirección, distancia y posición respecto a objetos, personas y lugares, nominándolas adecuadamente.	Proyectiva

*Nota: * Currículo de Educación Parvularia (MINEDUC, 2008). **Propuesta de V. Huerta.*

Esta investigación abordala falta de conocimiento de la geometría topológica en estudiantes de Educación Parvularia; la ausencia de aprendizajes esperados relacionados a esta geometría que presentan los Planes y Programas (MINEDUC, 2008) en torno al núcleo de aprendizaje Relaciones lógico-matemáticos y Cuantificaciones; y la ausencia de una orientación metodológica para enseñar esta geometría en la educación preescolar.

Varias investigaciones aconsejan tomar acciones en la formación del profesor para proporcionar un acercamiento real sobre la geometría, entendiendo a la geometría topológica como un estudio de relaciones espaciales, que aporten a la construcción de relaciones numéricas y de razonamientos (Gabrielli, 2013).

Cuando el niño ingresa a la educación inicial posee cierta visión del espacio que ha estructurado según sus vivencias y experiencias en las que ha participado, esos conocimientos previos le permiten resolver los nuevos problemas que se le presentan, logrando incrementar sus aprendizajes, ampliando los sistemas de referencias involucrados que va adquiriendo en tales situaciones. Aunque Gabrielli (2013) hace una distinción entre el espacio real y aquellos aspectos matemáticos que lo vinculan y determina que "el simple hecho de desplazarse, arrojar objetos o jugar con una pelota, no permite, a los niños, realizar conceptualizaciones de conceptos matemáticos. No hay actividad matemática en el desplazamiento físico" (p. 2).

Bishop (1983) define "la geometría es la matemática del espacio" (p. 16) y es a través del estudio del espacio y de los objetos que "viven" en él, por donde los niños accederán a conceptos más abstractos. En la educación inicial el espacio físico es punto de partida para el desarrollo del pensamiento geométrico, de modo que el niño llegue a establecer conexiones entre el uso de imágenes, relaciones y razonamientos.

Piaget e Inhelder (1967) proponía dos hipótesis con respecto a la representación espacial: la constructivista y la primacía topológica. Es en esta última donde declara que el sujeto va construyendo primero relaciones topológicas, luego proyectivas y finalmente euclideas. Camargo (2011) realiza una revisión de estas hipótesis piagetanas y afirma que la primera hipótesis se sostiene, pero la segunda no, esta autora aconseja que la supremacía topológica "debe aprovecharse en didáctica de la Geometría para procurar que los niños experimenten procesos matemáticos, en los que las relaciones topológicas, proyectivas y euclideas, sugeridas por Piaget e Inhelder (1967) se desarrollen al tiempo y de manera coordinada" (p. 57). Al respecto, Vecino (1999) señala la necesidad de que los párvulos adquieran ideas topológicas en los primeros años para lograr mejores conceptualizaciones y relaciones entre las geometrías proyectivas y euclideas.

Fueron los estudios de Klein (1872, citado por Vecino, 2005) los que dan lugar a considerar los diversos tipos de geometrías (topológicas, proyectivas y euclideas o métricas), y los estudios de Piaget (1967) los que colocan de manifiesto que los invariantes de estas geometrías aparecen en las primeras representaciones espaciales del niño.

La geometría euclidiana es la que resulta más familiar para los docentes como tema ligado al currículo de enseñanza inicial, sin embargo, no ocurre lo mismo con los conceptos proyectivos y menos aún con los topológicos.

Considerando las relaciones geométricas entre estas tres geometrías (topológicas, proyectivas y euclideas), esta investigación se centra en los invariantes topológicos propuestos por Vecino (2005):

a) El tipo de lugar geométrico: abierto o cerrado y las distintas regiones en el espacio (interior, exterior y frontera).

b) Continuidad o discontinuidad del lugar geométrico.

c) Orden entre los elementos del lugar geométrico.

d) Tipo de conexión entre los elementos del lugar geométrico.

La presente investigación trabajó con la metodología del Estudio de Clase, siendo esta una estrategia de desarrollo profesional docente, conducida por los propios docentes, con el objetivo de planificar, enseñar, observar y analizar clases, en grupos de estudio de profesores.

Como señala Isoda et al. (2007), el estudio de clases ha demostrado ser una potente metodología para incrementar el conocimiento de los profesores que ejercen en las escuelas, es decir, es un medio para capacitar a los profesores para que desarrollen y mejoren sus propias prácticas pedagógicas.

En el sentido anterior encontramos en el Estudio de Clases tiene aspectos bien definidos, que se realizan de manera cíclica con el fin de mejorar progresivamente el diseño y la ejecución de las clases (Figura 1).

El Estudio de Clases es el medio para adaptar el currículo a la clase real y llevarlo a cabo bajo la iniciativa del docente, pudiéndose decir entonces que es un puente entre el ideal y la realidad (Isoda y Olfos, 2009).

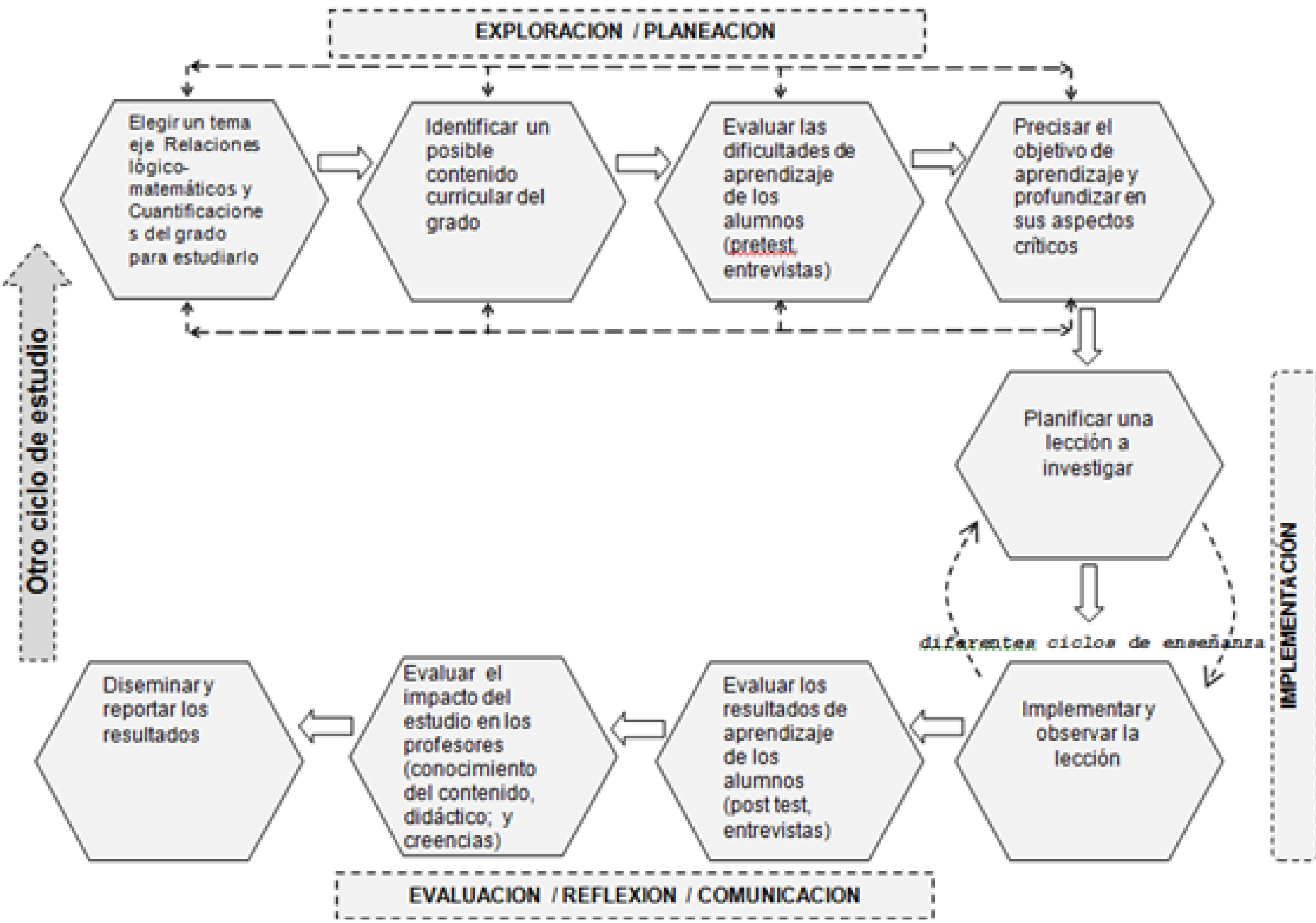


Figura 1: Ciclo de Estudio de Clase.
Fuente: Modificado desde (Olfos, Estrella y Morales, 2014).

Metodología

El estudio adopta un enfoque cualitativo y analiza como estudio de caso la interacción de un grupo de estudiantes en formación en un Grupo de Estudio de Clase.

Las participantes son 5 estudiantes de la carrera de Educación Parvularia de una universidad particular que cursan su último año, y uno de los investigadores es el profesor de dicho curso, y es quien propone abordar la geometría topológica como conocimiento para aprender, para ellas como futuras educadoras y para los párvulos. El profesor investigador es quien las convoca durante 4 meses, para reunirse como grupo que prepara, mejora e implementa una clase de Geometría Topológica para párvulos (Estudio de Clases) y quien les propone preparar una clase en base a la TSD (Brousseau, 2007).

La recolección de datos consideró las notas de campo de las discusiones de las estudiantes en formación (profesor investigador), las bitácoras de las estudiantes, y una encuesta estructurada (7 preguntas) vía email posterior a la implementación de la clase creada e implementada.

Resultados

La observación de la discusión de las estudiantes de la carrera de Educación Parvularia (5 alumnas) respecto a la creación de la clase de Geometría Topológica en el aula inicial, permite sostener que las estudiantes realizaron:

- Intervenciones fundamentadas en la teoría, delos invariantes topológicos durante el Estudio de Clases, para mejorar de la clase, utilizando referentes teóricos, psicológicos y didácticos frente a situaciones pedagógicas analizadas, que se reflejan en el análisis de las Clases 1 y 2 y sus correspondientes bitácoras.
- Aumento progresivo en la participación y el debate dentro del grupo Estudio de Clases, ya que tuvieron que lidiar con conceptos nuevos y del cómo integrar éstos tanto en situaciones didácticas como en el Plan de Clase, (observables en bitácoras 4, 6 y 7).
- Relevancia de las decisiones didácticas de la clase y sus efectos, concentrándose las mayores dificultades en ponerse de acuerdo en el diseño del Plan de Clase, (observable en bitácoras 4 y 6).
- Inferencias, hipótesis y conjeturas respecto a las problemáticas asociadas a una clase planificada utilizando principalmente referentes teóricos y didácticos de la disciplina, cuando realizan los análisis a-priori de cada Plan de Clase construido para hipotetizar las posibles repuestas de los párvulos, (analizados en cada Plan de Clase de esta investigación).
- Análisis y justificación de la utilización y pertinencia del material concreto dominó topológico creado para una clase basada en la TSD, (observable en la propuesta de material concreto intencionado para una situación didáctica).

Las estudiantes en formación que participaron de esta investigación paulatinamente valoraron lo efectivo que puede ser estudiar sus clases en grupo de pares, y del cómo algunas ayudas estructuradas como el Plan de Clases (propio del Estudio de Clases japonés) permiten organizar y estudiar las prácticas docentes.

El análisis de la encuesta posterior a la experiencia de las estudiantes en formación, permite sostener que ellas lograron adquirir conceptos topológicos de este tipo de geometría y del cómo poder llevarlos al aula de nivel inicial, pues al inicio del proyecto manifestaron su desconocimiento de esta geometría y que el contenido era complejo para la edad de los niños. Además, se evidenció en las conversaciones y de sus experiencias en prácticas anteriores, que estos conceptos no los enseñaban las educadoras de párvulos a sus alumnos en clases.

Asimismo, esta experiencia muestra que las mejoras a las clases que se crean en los grupos de Estudio de Clases no sólo van en beneficio del aprendizaje de los alumnos sino en gran medida de los docentes, ya que estos adquieren mayor profundidad, del conocimiento del contenido y del conocimiento didáctico, del objeto matemático que aborda la clase.

Conclusiones

El análisis que se obtiene de las observaciones y experiencias en las reuniones del grupo Estudio de Clases, permite sostener que las estudiantes en formación lograron avanzar en conocimiento, lenguaje y reflexión respecto a la Geometría Topológica para el nivel inicial y pudieron crear una clase en base a la TSD.

La experiencia del grupo estudiantes en formación y del profesor investigador en el Estudio de Clases, da evidencia que el Estudio de Clases permite a las estudiantes en formación crear, implementar y mejorar una Situación Didáctica de geometría topológica. Los análisis permitieron observar cómo el Estudio de Clases transformó el trabajo del grupo y del formador de profesores. En este sentido podemos mencionar que las estudiantes en formación construyeron un Plan de Clasepara nivel inicial, crearon un material de geometría topológica para la clase, e implementaron la clase dos veces, y así analizaron y reflexionaron a partir de la clase para mejorarla.

A pesar que la mirada de nuestra investigación no estaba puesta en el aprendizaje de los alumnos de nivel inicial, se pudo observar cómo el trabajo organizado, estructurado y discutido entre pares, permitió que los párvulos se sintieran motivados y desafiados a buscar la solución al problema planteado, buscando y validando entre ellos mismos sus propias producciones, lo que abre una puerta para futuras investigaciones sobre el impacto del aprendizaje en los párvulos en clases creadas bajo el Estudio de Clases.

Referencias

Bishop, A. (1983). Space and Geometry. En R.Lesh and M.Landau(eds) Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,Academic Press, New York.

Brousseau, G. (2007). Iniciación el estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Camargo, L. C. (2011). El legado de Piaget a la didáctica de la Geometría. Revista colombiana de educación, (60), 41-60.

Gabrielli, P. (2013). El espacio y las formas geométricas. Recuperado desde http://didactica-y-matematica.idoneos.com/index.php/Capacitaci%C3%B6n__Docente/La_geometr%C3%ADa_y_los_ni%C3%B1os

Isoda, M., Arcavi, A. y Mena, A. (2007). El Estudio de

Clases Japonés en matemáticas. Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Isoda, M., Olfos R. (2009). El Enfoque de Resolución de Problemas: En la Enseñanza de la Matemática. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

MINEDUC (2008). Programa Pedagógico Educación Parvularia. Santiago: MINEDUC.

Olfos, R., Estrella, S., & Morales, S. (2014). Open lessons impact statistics teaching teachers'beliefs. En K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics. Voorburg: International Statistical Institute.

Piaget, J. y Inhelder, B. (1967). The child's conception of space. NY: Norton y Co.

Vecino, F. (2005). El espacio como modelo teórico para el desarrollo de las geometrías. Situaciones de introducción a las mismas. En Chamorro, C., Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil. Madrid: Pearson.

Diseño de un instrumento de evaluación del conocimiento didáctico y matemático en profesores de primaria para la enseñanza de la probabilidad

Claudia Vásquez Ortiz, Angel Alsina i Pastells
Pontificia Universidad Católica de Chile (Chile), Universidad de Girona (España)
cavasque@uc.cl
Educación continua, Formación de profesores.

Resumen

Con el fin de aportar información que permita transformar la práctica docente por medio de la mejora de la formación del profesorado de matemáticas de Educación Primaria (6-12 años), hemos diseñado un instrumento para evaluar el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad. Para su elaboración consideramos el modelo de categorías de análisis del conocimiento didáctico-matemático del profesor, que contempla cuatro categorías de conocimientos fundamentales: a) conocimiento del contenido; b) conocimiento del contenido en relación a los estudiantes; c) conocimiento del contenido en relación a la enseñanza; y d) conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares. Estas categorías permiten identificar, clasificar, analizar y evaluar tanto los conocimientos que necesitan los profesores para la enseñanza como los que ponen en juego a la hora de enseñar un determinado contenido, en nuestro caso los vinculados a la enseñanza de la probabilidad en Educación Primaria. Estos conocimientos están siendo ampliamente investigados durante los últimos años en futuros profesores, sin embargo, existen muy pocos datos de profesores en ejercicio sobre todo en países como Chile.

El análisis de los datos va a permitir, en primer lugar, describir las fortalezas y debilidades de las distintas categorías de los conocimientos del profesor involucradas en la enseñanza de la probabilidad; y en segundo lugar, se va a obtener información relevante para orientar la formación inicial y continua del profesorado en relación a los conocimientos necesarios para la enseñanza de la probabilidad.

Introducción

La incorporación de la probabilidad en el currículo escolar viene cobrando fuerza desde que el *National Council of Teachers of Mathematics* incluye a "Datos y Azar" como una de las cinco áreas temáticas en el *Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics* (NCTM, 1989). Desde entonces el estudio de la probabilidad se ha introducido progresivamente en las orientaciones curriculares a nivel mundial para promover en los estudiantes la capacidad de establecer gradualmente conexiones entre las matemáticas y otras áreas del saber, así como con experiencias de la vida diaria (NCTM, 2000; CCSSI, 2010; MEC, 2007; MINEDUC, 2012, entre otros). Esta innovación curricular es producto de las nuevas demandas de la sociedad actual, que han llevado a reformular los conocimientos sobre probabilidad que los ciudadanos de hoy necesitan manejar y por ende aprender en la escuela ya desde los primeros años.

Chile no ha quedado ajeno a esta tendencia, y el Ministerio de Educación incorpora el eje temático de "Datos y Probabilidades" en las Bases Curriculares 2012 como un continuo en la Educación Primaria (6-12 años), que abarca desde la comprensión de ideas de azar y probabilidad presentes en situaciones cotidianas, hasta el cálculo de probabilidades sencillas por medio de la experimentación y aplicación de la regla de Laplace, y así *"responder a la necesidad de que todos los estudiantes se inicien en temas relacionados con las probabilidades"* (Mineduc, 2012, p. 5), y a la vez aminorar los desfases existentes entre el currículo nacional y los internacionales.

Desde esta perspectiva, y en concordancia con Sthol (2005), es fundamental contar con profesores preparados que logren que sus estudiantes alcancen los objetivos establecidos en los nuevos referentes curriculares, sobre todo si consideramos que existe una fuerte correlación entre el saber del profesor y los resultados de sus estudiantes (Leinhardt y Smith, 1985; Ball y McDiarmid, 1990; Monk, 1994; Mullens, Murnane y Willett, 1996; Darling-Hammond y Young, 2002; Chambliss, Graeber y Clarke, 2003; Frome, Lasater y Cooney, 2005). Sin embargo, en países como Chile las cifras internacionales en relación al profesorado de Educación Primaria revelan severas falencias en la calidad educativa en general y de manera particular en matemáticas (OCDE, 2010; TEDS-M, 2010; INICIA 2012), lo que pone en evidencia que la gran mayoría de profesores no han contado en su formación inicial con asignaturas que les preparen, tanto a nivel disciplinar como didáctico, para una enseñanza eficaz. En este contexto surge la necesidad de centrar el foco de atención en la formación del profesorado de Educación Primaria, y sobre todo en la formación continua del profesorado, específicamente en el desarrollo y fortalecimiento del conocimiento didáctico y matemático, pues un profesor no puede enseñar lo que no sabe. Este tipo de conocimiento viene siendo estudiado desde hace mucho tiempo y cobra relevancia con la propuesta de Schulman (1986) quien distingue entre tres tipos de conocimientos para la enseñanza: a) conocimiento de los contenidos; b) conocimiento pedagógico; y c) conocimiento pedagógico de los contenidos o conocimiento didáctico de los contenidos, como los tipos de conocimientos pedagógicos y didácticos necesarios para lograr una enseñanza eficaz. Desde entonces diversos autores han orientado sus investigaciones a describir el conocimiento matemático para la enseñanza, destacando el trabajo de Ball, Lubienski y Mewborn (2001), quienes basándose en las ideas de Schulman proponen el modelo "Mathematical knowledge for Teaching" (MKT), que definen como "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno" (Hill, Ball y Schilling, 2008).

Es importante destacar que, si bien los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza han ganado su espacio en la investigación y formación de profesores, todavía son muy generales y no permiten un análisis minucioso de los distintos tipos de conocimientos que deberían poseer los profesores para lograr una enseñanza efectiva de las matemáticas, y más aún en el caso de la probabilidad. Es bajo esta perspectiva que Godino (2009) realiza un análisis de los principales modelos de conocimiento para la enseñanza (Schulman, 1986) y de conocimiento matemático para la enseñanza (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008), y propone un modelo teórico sobre el conocimiento didáctico-matemático del profesor que integra algunas de las categorías de los modelos anteriores que se complementan y desarrollan con elementos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), aportando nuevos niveles y herramientas de análisis.

Es desde esta perspectiva que se desarrolla el estudio, que pretende analizar en profundidad el conocimiento didáctico-matemático del profesorado de Educación Primaria en relación a la enseñanza de la probabilidad, para determinar sus fortalezas y debilidades y entregarles una formación específica que permita, finalmente, mejorar la enseñanza de este tema en las escuelas.

El conocimiento didáctico-matemático del profesorado para la enseñanza de la probabilidad

Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi (2008) elaboran un modelo integrador para el conocimiento didáctico y matemático del profesor de matemáticas que ofrece un conglomerado de herramientas para analizar, evaluar y desarrollar de manera sistemática, a partir de un sistema de categorización, los conocimientos didácticos y matemáticos del profesor. Se usan categorías de análisis explicitas para las dimensiones epistémica y cognitiva desde una perspectiva pragmática-antropológica de la matemática, en la que el objeto matemático es entendido como una entidad emergente e interviniente en las prácticas. De esta manera, dicho modelo se vale de las categorías de objetos y procesos del Enfoque Ontosemiótico para llevar a cabo el análisis tanto de la actividad matemática como de los conocimientos presentes en una enseñanza idónea de las matemáticas. Asimismo, a partir de dicho modelo se plantea un desglose del conocimiento didáctico y matemático del profesor que se encuentra constituido por las siguientes categorías de conocimientos fundamentales: a) Conocimiento del contenido común, especializado y ampliado; b) Conocimiento del contenido en relación a los estudiantes; c) Conocimiento del contenido en relación a la enseñanza; y d) Conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares. Por medio de estas cuatro categorías de análisis y la "guía para el enunciado de consignas" (Godino, 2009), es posible abordar por medio de la resolución de tareas, algunos de los aspectos relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje que llevarían a conocer las competencias profesionales de los profesores de matemáticas.

Desde esta perspectiva, en este trabajo presentamos un cuestionario para evaluar el conocimiento didáctico y matemático del profesor para enseñar probabilidad en Educación Primaria, puesto que no existen instrumentos validados que contemplen los contenidos de probabilidad que el profesor debe enseñar de 1º a 6º año de Educación Primaria conforme a las actuales bases curriculares y los programas de estudio vigentes en Chile (Mineduc, 2012).

Metodología

El cuestionario se ha diseñado conforme al modelo teórico sobre el conocimiento didáctico-matemático del profesor de Godino (2009), por lo que considera las cuatro categorías de conocimientos fundamentales necesarios para que un profesor lleve a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje. El instrumento está formado por diez situaciones problemas y preguntas de respuesta abierta, que además de basarse en referentes curriculares de interés, se fundamentan en la experiencia personal directa y en la literatura relacionada, como es el caso de algunos ítems que fueron extraídos de la investigación de Cañizares (1997), quien a su vez los tomó de Green (1983) y Fischbein y Gazit (1984). Las situaciones problemas y preguntas del cuestionario consideran también algunas de las respuestas típicas por parte de los alumnos que participaron en dicha investigación. Estos ítems y respuestas nos han servido de insumo para plantear las situaciones problemas de nuestro estudio.

Para la elaboración del instrumento se ha optado por la metodología propuesta por (Godino, 2009), que incluye dos fases: en primer lugar se elige una tarea matemática que lleve a los profesores a poner en juego, por medio de la solución de la tarea o situación, los aspectos más relevantes en relación al tema probabilidad que se pretende evaluar o de las competencias que desean desarrolla; y en segundo lugar, se formulan los ítems de evaluación o propuestas de actividades que contemplen las distintas facetas y niveles del conocimiento del profesor que se desean evaluar y analizar. Un punto importante de destacar con respecto a la confección de ítems es que se ha tratado de confeccionar preguntas cuyas respuestas no fueran obvias, es decir, que no pudieran ser respondidas solamente desde el conocimiento matemático por personas que no tengan la experiencia de enseñar en educación primaria. Así, por medio de las respuestas dadas a tales situaciones, se busca indagar en el conocimiento didáctico y matemático del profesor vinculado a la probabilidad y su enseñanza. Una vez diseñado el instrumento se ha sometido a un proceso de validación que ha contemplado dos aspectos:

la validez del contenido se ha garantizado primero a partir de la selección de contenidos relacionados con el estudio de la probabilidad en Educación Primaria de los distintos referentes curriculares involucrados (Mineduc, 2012 y NCTM, 2000). Posteriormente, para contrastar la validez de los ítems, es decir, si éstos realmente miden lo que se pretende medir, el instrumento se ha sometido a la evaluación del juicio de expertos en el tema de evaluación del conocimiento para enseñar matemática. En este proceso de validación han participado 10 expertos de Chile y España, que han emitido su juicio con respecto a las preguntas por medio de la evaluación del grado de adecuación que tiene cada uno de los ítems con la dimensión propuesta (conocimiento del contenido, conocimiento del contenido en relación a los estudiantes, conocimiento del contenido en relación a la enseñanza y conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares). En concreto, estos expertos han analizado tres aspectos en relación a cada uno de las diez situaciones problemas que conforman el cuestionario: a) el grado de correspondencia (si cada ítem en particular pertenece o no a la dimensión); b) la formulación (opinión respecto a la claridad y al lenguaje utilizado en cada ítem); y c) la pertinencia (el grado de pertinencia del ítem respecto a la dimensión).

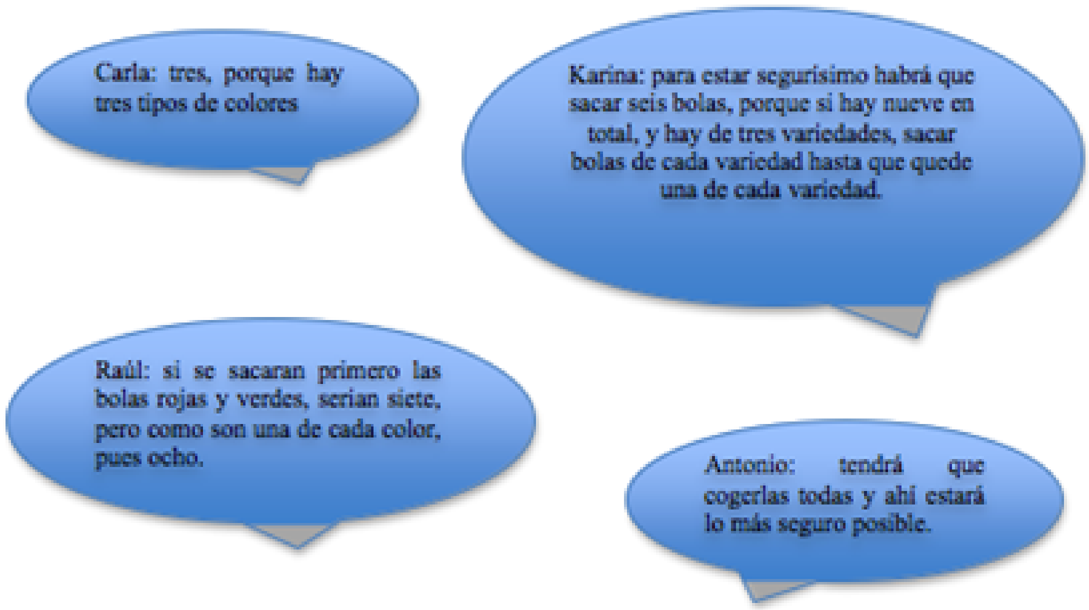
Resultados

Una vez finalizado el proceso de validación del cuestionario se ha procedido a la redacción definitiva de las diez situaciones problemas en base a las opiniones de los expertos. A continuación, se presenta, a modo de ejemplo (Figura 1), uno de los ítems que conforma el cuestionario.

El profesor Ramírez plantea el siguiente problema a sus alumnos:

En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. ¿cuántas bolas debe uno sacar para estar seguro de que se obtendrá una bola de cada color?

Obteniendo las siguientes respuesta por parte de algunos de sus alumnos:



Responda:

a) **Comente la respuestas dadas por estos alumnos y justifique su veracidad o falsedad.**
b) **¿Cuál respuesta deberia aceptar el profesor como correcta? ¿Por qué?**
c) **¿Qué conceptos o propiedades deben usar los alumnos para dar solución a este problema?**
d) **¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que han dando una respuesta errónea se den cuenta de su error y lo superen?**

Figura 1: Ejemplo ítem del cuestionario para evaluar el conocimiento didáctico y matemático para enseñar probabilidad en educación primaria

Por medio de este ítem se trata de identificar, por un lado, el conocimiento matemático necesario para la resolución del problema planteado, que en este caso, corresponde a la comprensión del concepto de suceso seguro, además de nociones básicas de combinatoria que permiten enumerar las distintas posibilidades de extracción. Es importante señalar que este problema y las respuestas de alumnos que se incluyen han sido tomado de la investigación de Cañizares (1997), quien a su vez lo tomó de Fischbein y Gazit (1984).

Asimismo, con este ítem se pretende identificar el conocimiento didáctico y matemático necesario para la resolución de la situación problema, el cual corresponde específicamente al conocimiento del contenido en relación a los estudiantes, conocimiento del contenido (común, especializado y ampliado) y conocimiento del contenido en relación a la enseñanza.

Consideraciones finales

La aplicación del cuestionario a un grupo de 93 profesores de Educación Primaria en ejercicio, como se ha indicado, va a permitir realizar un análisis en profundidad de su conocimiento matemático y didáctico sobre probabilidad, e identificar sus debilidades y necesidades formativas. A partir de los datos obtenidos se contará con evidencia suficiente para establecer directrices sobre las necesidades de formación de los profesores de Educación Primaria. Tales directrices se verán reflejadas en el diseño de un curso de formación continua a través del modelo realista (Melief, Tigchelaar y Korthaegen, en colaboración con van Rijswijk, 2010), al tratarse de una metodología de enseñanza centrada en la realidad que permite dar sentido a la relación dialéctica entre la teoría y la práctica, y que se ha revelado como un método eficaz para la transformación de las creencias sobre la práctica docente y, en definitiva, para la innovación metodológica de los futuros maestros y de los profesores de matemáticas en ejercicio (Alsina, 2007, 2010).

Referencias

Alsina, A. (2007). El aprendizaje reflexivo en la formación permanente del profesorado: un análisis desde la didáctica de la matemática. Educación Matemática, 19(1), 99-126.

Alsina, A. (2010). El aprendizaje reflexivo en la formación inicial del profesorado: un modelo para aprender a enseñar matemáticas. Educación Matemática, 22(1), 149-166.

Ball, D. L. y McDiarmid, G. W. (1990). The subject matter preparation of teachers. In W.R. Houston, M. Haberman, y J. Sikula (Eds.). Handbook of Research on Teacher Education, (pp. 437-439). New York: Macmillan.

Cañizares, M. J. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Chambliss, M., Graeber, A.O. y Clark, K. (2003). Does Subject Matter Matter? Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago.

Common Core State Standards Initiative (2010). Common Core State Standars for Mathematics. Recuperado el 30 de Septiembre de 2011, de http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Darling-Hammond, L. y Young, P (2002). Defining "highly qualified teachers": What does scientifically–based research tells us? Educational Researcher, 31(9), 13-25.

Fischbein, E., Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?. Educational Studies in Mathematics. 15, 1-24.

Frome, P., Lasater, B., y Cooney, S. (2005). Well-qualified teachers and high quality teaching: Are they the same? Atlanta, GA: Southern Regional Educational Board.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledgeof primaryschool teachers through Project work. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.). Joint ICMI/IASE Stud: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education.

Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference. Monterrey: ICMI and IASE.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactique des Mathématiques 22, (2/3), 237-284.

Green, D. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics, 2, Teaching Statistics Trust. (pp. 766-783).

Hill, H. C., Ball, D.L. y Schilling, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. Journal for Research in Mathematics Education, 39, 372-400.

Leinhardt, G., y Smith, D. A. (1985). Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge. Journal of Educational Psychology, 77(3), 247-271.

Melief, K., Tigchelaar, A., Korthagen, F. en colaboración con van Rijswijk, M. (2010). Aprender de la práctica. En O. Esteve, K. Melief y A. Alsina (Eds.), Creando mi profesión. Una propuesta para el desarrollo profesional del profesorado (pp. 19-38). Barcelona: Editorial Octaedro.

Ministerio de Educación (2012). Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). Boletín oficial del Estado. ORDEN ECI/2211/2007, del 20 de julio, por la que se establece el currículo y regula la ordenación de la Educación Primaria. Madrid, España.

Monk, D. H. (1994). Subject area preparation of secondary mathematics and science teachers and students achievements. Economics of Education Review, 13(2), 125-145.

Mullens, J. E., Murnane, R. J., y Willett, J. B. (1996). The contribution of training and subject matter knowledge to teaching effectiveness: a multilevel analysis of longitudinal evidence from Belize. Comparative Education Review, 40, 139-57.

National Council of Teachers of Mathematics (2003). Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla. SAEM Thales.

OECD (2010). Síntesis Estudio Económico de Chile, 2010. Recuperado desde http://www.oecd.org/dataoecd/7/38/44493040.pdf

Schoenfeld, A. H. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh & T. Wood (eds.), Tools and Processes in Mathematics Teacher Education (321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Schulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15 (2), 4-14.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. In G. A. Jones (Ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning (pp. 297–324). New York: Springer.

SOCHIEM

2014