

VOLÚMEN 14
N°3
DICIEMBRE 2022

R

E

C

H

REVISTA
CHILENA DE
EDUCACIÓN
MATEMÁTICA

I

E

M



ÍNDICE

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

- 101 *Alfabetización y razonamiento estadístico de estudiantes mexicanos al concluir el bachillerato.*
Santiago Inzunza Cazares, Saray Serrano Enciso

PROPUESTAS DIDÁCTICAS

- 118 *Ingeniería Didáctica para la Formación y Teoría de Situaciones Didácticas en el contexto de la enseñanza a distancia: una propuesta apoyada en el software GeoGebra para la enseñanza de volumen.*
Rosalide Carvalho de Sousa, Francisco Régis Vireira Alves





ALFABETIZACIÓN Y RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO DE ESTUDIANTES MEXICANOS AL CONCLUIR EL BACHILLERATO

LITERACY AND STATISTICAL REASONING OF MEXICAN STUDENTS UPON COMPLETION OF HIGH SCHOOL

Santiago Inzunza Cazares
sinzunza@uas.edu.mx
Universidad Autónoma de Sinaloa,
Culiacán, México

Saray Serrano Enciso
sarayserrano.face@uas.edu.mx
Universidad Autónoma de Sinaloa,
Culiacán, México

RESUMEN

En este artículo reportamos resultados de una investigación con estudiantes mexicanos sobre los niveles de alfabetización y razonamiento estadístico que han desarrollado en su educación básica y media superior, utilizando la taxonomía SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes). El instrumento utilizado es un cuestionario aplicado en línea que se ha adaptado de diversos ítems de la literatura y algunos de elaboración propia. Los resultados señalan que los estudiantes tienen bajos niveles de alfabetización y razonamiento estadístico en representaciones gráficas y medidas descriptivas, a pesar de que son temas del currículo desde la educación primaria; los resultados son más bajos aún en ítems de correlación, diagramas de caja, deciles y probabilidad.

PALABRAS CLAVE:

Estadística, Razonamiento estadístico, Alfabetización estadística, Taxonomía SOLO, Bachillerato.

ABSTRACT

In this article we report the results of an investigation with Mexican students on the levels of literacy and statistical reasoning that they have developed throughout their elementary and high school education, using the SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes) taxonomy. The instrument used is an online questionnaire that has been adapted from various items of literature and some of the author's creation. The results indicate that students have low levels of literacy and statistical reasoning in graphic representations and descriptive measures, even though these are themes of the curriculum from primary education; the results are even lower in correlation items, box plots, deciles, and probability.

KEYWORDS:

Statistics, Statistical Reasoning, Statistical Literacy, SOLO Taxonomy, High School

1. Introducción

La estadística es una materia esencial en el currículo de matemáticas de todos los niveles educativos (Garfield y Ben-Zvi, 2008; Tishkovskaya y Lancaster, 2012). Su importancia como herramienta metodológica para el análisis de diversos fenómenos en los que tienen presencia el azar y los datos, le ha dado un lugar en el currículo universitario desde hace más de tres décadas. En años más recientes, a partir del gran desarrollo de las tecnologías digitales, los datos y el azar se han vuelto omnipresentes en la sociedad moderna (Ridgway, 2016; Steen, 2002); la estadística adquiere a partir de entonces una nueva dimensión: como herramienta para la alfabetización cuantitativa de los ciudadanos. Es en este contexto en el cual llega la estadística al currículo del nivel básico y medio superior en México.

La vertiente metodológica ha predominado por mucho tiempo en el currículo de estadística, sobre todo a partir del bachillerato (Inzunza y Rocha, 2021; Naya et al., 2012), como consecuencia de su utilidad en el estudio de fenómenos de interés para las profesiones y las ciencias. Desde esta perspectiva, generalmente los docentes enfocan su enseñanza a que los estudiantes comprendan las fórmulas y procedimientos que subyacen a los métodos estadísticos, para desarrollar cálculos y resolver problemas, ya sea manualmente o con ayuda de algún software estadístico.

En cambio, cuando la estadística es vista como herramienta de alfabetización, más que el dominio de fórmulas y procedimientos, el objetivo central es el desarrollo de habilidades para comprender, interpretar, reflexionar y evaluar en forma crítica información estadística sobre diversos aspectos de la vida de los ciudadanos y el desarrollo de la sociedad (por ejemplo, seguridad, economía, salud, política), que aparece en los medios de comunicación y reportes gubernamentales (Gal, 2002; Porkess, 2011; Watson, 2006).

Entre estos dos extremos se encuentran muchos currículos de estadística en la actualidad, unos más orientados hacia los métodos, técnicas y procedimientos, y otros, con mayor énfasis en las habilidades de alfabetización y razonamiento estadístico (Inzunza y Rocha, 2021). La definición de un enfoque sobre otro no es un asunto trivial, pues por un lado es necesario preparar a los estudiantes en el dominio de los métodos estadísticos y la comprensión de los conceptos que se involucran en ellos para su vida profesional; por otro lado, la sociedad requiere ciudadanos alfabetizados estadísticamente, capaces de comprender y razonar adecuadamente con los

cúmulos de información estadística que diariamente se vierten en los medios de comunicación sobre asuntos de interés ciudadano. Esa dualidad es posible resolverla en los límites de los contenidos curriculares, los enfoques de enseñanza y los perfiles de egreso de los estudiantes.

En función de ello, en el presente trabajo nos hemos propuesto investigar sobre el nivel de alfabetización y razonamiento estadístico que han logrado estudiantes mexicanos al concluir sus estudios preuniversitarios mediante la taxonomía SOLO, con el propósito de conocer en qué medida los cursos que han tomado les han permitido desarrollar estas habilidades estadísticas, consideradas primordiales en la formación educativa de los ciudadanos de la sociedad actual. Los resultados de este trabajo proporcionan evidencia para proponer cambios curriculares y actividades de enseñanza que contribuyan al desarrollo de la alfabetización y el razonamiento estadístico de los estudiantes.

Para lograr esto, se realizó una revisión de la literatura sobre la evaluación de la alfabetización y el razonamiento estadístico, de la cual se obtuvieron las bases para la elaboración de un instrumento de evaluación para estudiantes que terminaron el bachillerato, recopilando, adaptando y proponiendo ítems en función de las temáticas que estos aprenden. Posteriormente, se aplicó el instrumento de evaluación y se creó una escala valorativa basada en la taxonomía SOLO para definir el nivel de alfabetización y razonamiento estadístico alcanzado por los estudiantes participantes. Finalmente, se identificaron los posibles aspectos que influyeron en el desempeño de estas habilidades por parte de los estudiantes mexicanos evaluados.

2. Marco conceptual

Los objetivos de aprendizaje de los cursos de estadística han estado cambiando en los últimos años, destacando como factor principal la revolución de los datos. Este fenómeno ha sido impulsado por la irrupción de las tecnologías digitales en todos los ámbitos de la vida humana, haciendo posible la generación, procesamiento, distribución y análisis de grandes cantidades de datos de manera muy eficiente (Ridgway, 2016).

De tal forma, diariamente nos vemos rodeados de cúmulos de información obtenida de actividades del ser humano en las distintas esferas en las que participa, tal información generalmente es expresada en lenguaje estadístico (gráficas, tablas, promedios, porcentajes, estimaciones, correlaciones,

probabilidades, riesgos), y requiere ser comprendida e interpretada adecuadamente para la toma de decisiones informada (Galesic y García-Retamero, 2010; Johannssen et al., 2021). Como señalan Batanero et al. (2013), la omnipresencia de los datos y el azar son características de la sociedad moderna, con lo cual, la estadística se ha convertido en un lenguaje de argumentación que requiere ser comprendido por los ciudadanos y profesionistas de la sociedad actual.

Derivado de lo anterior, se deben implementar enfoques de enseñanza de la estadística distintos a los que han prevalecido hasta ahora, los cuales privilegian aún el cálculo y los procedimientos sobre la comprensión y el razonamiento (Weiland, 2017). Para revertir esta situación, en diversos países, por ejemplo, Australia (Australian Curriculum, 2018) y Nueva Zelanda (Ministry of Education New Zealand, 2014) han realizado cambios curriculares y pedagógicos con objetivos de aprendizaje centrados en el desarrollo de habilidades de alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico desde la primaria, enfocando sus esfuerzos en el desarrollo de la interpretación y entendimiento de los datos por parte de los estudiantes a través de la realización de investigaciones, recolección, organización, representación e interpretación de datos, resolución de problemas y comunicación de sus resultados; esto difiere de lo observado en el currículo mexicano en cuanto que este solo ubica la estadística en sus últimos años de educación obligatoria, dentro del último ciclo, sin tener un carácter obligatorio y enfocado en la realización de procedimientos básicos (Inzunza y Rocha, 2021).

2.1 El significado de alfabetización y razonamiento estadístico

Los términos de alfabetización y razonamiento estadístico han sido definidos por diversos investigadores (Gal, 2002; Garfield, 2002; Rumsey, 2002; Watson y Callingham, 2003), sin embargo, no existe aún una definición consensuada, pues los procesos cognitivos que los caracterizan tienen algunas similitudes y existe un traslape en sus definiciones (Sharma, 2017). Con el objetivo de identificar los aspectos comunes de ambos constructos, Sabbag (2016) analiza a profundidad la relación entre ellos, sus resultados fueron considerados por nosotros para abordar estos conceptos en la investigación.

2.1.1 Alfabetización estadística

Wallman (1993) plantea una de las primeras definiciones de alfabetización estadística: "Habilidad para comprender y evaluar en forma

crítica resultados estadísticos que permean la vida diaria" (p. 1). Similarmente, Gal (2002) propone una conceptualización de la alfabetización estadística en el contexto de educación de adultos, y define un modelo para su análisis y desarrollo en el aula de clase, partiendo de la identificación de dos componentes interrelacionadas. La primera componente que menciona este autor hace referencia a la habilidad definida por Wallman, pero incluye, además, la habilidad para discutir o comunicar sus reacciones a tal información estadística, tales como la comprensión del significado de la información, sus opiniones sobre las implicaciones de esta información o sus consideraciones en relación con la aceptabilidad de las conclusiones.

En términos generales, Gal (2002) propone un modelo de alfabetización estadística que consta de dos componentes principales: conocimiento y disposiciones.

- Conocimiento (habilidades de alfabetización generales, conocimiento estadístico, conocimiento matemático, conocimiento del contexto, preguntas críticas).
- Disposiciones (creencias y actitudes, postura crítica).

Como puede verse, el aspecto crítico ocupa un papel relevante en la alfabetización estadística, entendido este como el cuestionamiento de los diferentes procesos y etapas que se involucran desde el planteamiento hasta la solución de un problema estadístico. Entonces, un estudio sobre alfabetización va más allá del análisis de la comprensión de conceptos estadísticos. Mientras tanto, Rumsey (2002) utiliza el concepto de *competencia estadística* para referirse al conocimiento estadístico (comprensión de conceptos, términos y lenguaje) que, según su opinión, debe adquirirse antes de poder razonar y pensar estadísticamente; y el concepto de *estadística ciudadana*, como la habilidad de las personas para desenvolverse en una sociedad basada en datos. Ambos términos como parte de la alfabetización estadística.

Callingham y Watson (2017), por su parte, conceptualizan la alfabetización estadística como un constructo de tres niveles jerárquicos: comprensión básica de terminología estadística y de probabilidad, comprensión de lenguaje y conceptos estadísticos integrados en el contexto de una discusión social, y una actitud de cuestionamiento de conclusiones estadísticas y resultados.

En particular, los planteamientos sobre alfabetización estadística de Gal (2002) fueron los que se utilizaron en la investigación para caracterizar esta habilidad, pues sintetizan las componentes cognitivas y afectivas, a la vez que evitan imbricarse en lo que se concibe como razonamiento estadístico, como se observa en el siguiente apartado.

2.1.2 Razonamiento estadístico

Entre las definiciones de razonamiento estadístico más citadas en la literatura se encuentra la de Garfield (2002):

Es la forma como las personas razonan con ideas estadísticas y dan sentido a información estadística. El razonamiento estadístico puede involucrar conectar un concepto con otro (por ejemplo, centro y dispersión) o combinar ideas sobre datos y azar. El razonamiento estadístico significa, además, comprender y explicar procesos estadísticos e interpretar resultados estadísticos. (p. 1)

La comprensión conceptual de importantes conceptos estadísticos tales como distribución, promedio, variabilidad, asociación, aleatoriedad y muestreo, es necesaria para un buen razonamiento estadístico, en este sentido, la literatura muestra evidencia de diversos tipos de razonamiento estadístico incorrecto debido a que los sujetos no comprenden los conceptos e ideas que se involucran (Garfield, 2002). Ejemplo de ello son las investigaciones psicológicas y educativas sobre situaciones que involucran datos y azar (Kahneman et al., 1982; Konold, 1989; Lecoutre, 1992), mismas que dan muestra de una diversidad de sesgos y razonamientos incorrectos que las personas, incluso con preparación estadística avanzada, tienen sobre el azar, los datos y la incertidumbre.

Para Shaughnessy et al. (2009), la variabilidad de los datos está en el corazón del razonamiento estadístico:

El razonamiento estadístico utiliza una combinación de ideas desde los datos y azar en búsqueda de *comprender y explicar la variabilidad*. El objetivo no solo es resolver problemas en presencia de la variación, sino además obtener una medida de como la variación puede afectar la solución. (p. 1)

Con base en ello, identifican los siguientes elementos clave para el razonamiento y poder dar sentido a la estadística y probabilidad:

- *Analizar datos*. Tener una idea de la solución

a una pregunta estadística recolectando datos y describiendo características de los datos mediante representaciones gráficas y tabulares y resúmenes numéricos.

- *Modelar distribuciones*. Desarrollar modelos de probabilidad para describir comportamiento a largo plazo de observación de una variable aleatoria.
- *Conectar estadística con probabilidad*. Reconocer a la variabilidad como esencial del enfoque de la estadística y comprensión del rol de la probabilidad en el razonamiento estadístico para tomar decisiones bajo incertidumbre.
- *Interpretar estudios estadísticos*. Extraer conclusiones apropiadas desde los datos e interpretar resultados desde estudios estadísticos usando inferencia estadística.

3. Antecedentes de la investigación

Mucha investigación se ha desarrollado en los años recientes sobre el conocimiento y comprensión de conceptos estadísticos en los diferentes niveles educativos, tanto por estudiantes como por profesores (Frost et al., 2019; Saffran y Kirkham, 2018; Zapata, 2016). Sin embargo, en el rubro de alfabetización y razonamiento estadístico, los resultados son más escasos, pues son habilidades estadísticas de interés investigativo más reciente.

Rodríguez (2017), en un estudio con profesores chilenos, evaluó los niveles de alfabetización estadística y la percepción que tienen futuros docentes. Los resultados muestran que en general los estudiantes y profesores en ejercicio presentan porcentajes bajos de situaciones de tipo textual y hacen argumentaciones poco plausibles sobre saberes estadísticos con conceptos básicos de estadística. La inferencia, comprensión de tablas de doble entrada, gráficas e interpretación de estadígrafos presentaron los porcentajes de logro más bajos, tanto en los estudiantes como en los profesores. Desde el punto de vista de la argumentación es posible afirmar que los sujetos esgrimen argumentos poco plausibles e incoherentes con los saberes estadísticos tales como muestra, representatividad, estadígrafos y parámetros y su relación con la inferencia estadística.

Los promedios son otro concepto estadístico que se utiliza con mucha frecuencia para resumir información estadística. Mayen et al. (2007), en una investigación con estudiantes mexicanos de bachillerato, identificaron los siguientes elementos de significado y dificultades:

- Dificultades para reconocer la mediana como

mejor promedio de datos ordinales.

- Dificultades para calcular medias ponderadas.
- Dificultades para comprender la definición de mediana y media ponderada.
- Dificultades para identificar que la media muy sensible a datos extremos, el efecto del cero sobre su valor y que la suma de desviaciones por encima y debajo de la media es igual a cero.

Juárez e Inzunza (2014) reportan diversas dificultades que profesores de bachillerato tienen para razonar con conceptos estadísticos básicos que forman parte de los programas de estudio. Los profesores mostraron una comprensión superficial y aislada sobre conceptos estadísticos, como la interpretación y conversión de diversas representaciones gráficas, medidas de tendencia central y medidas de variabilidad.

De la misma manera, Inzunza (2015), en una investigación con estudiantes universitarios de México sobre sus habilidades de interpretación de gráficas con datos de contextos económicos y sociodemográficos, encontró que los estudiantes se ubicaron fundamentalmente en los niveles idiosincrático y lectura básica de una taxonomía creada exprofeso. Sus interpretaciones estuvieron enfocadas principalmente en aspectos locales de las gráficas y tuvieron dificultades para relacionar información relevante y el contexto.

Estos resultados fueron similares a los obtenidos por Estrella et al. (2015) con estudiantes y profesores chilenos. Estos autores evaluaron el conocimiento estadístico de los estudiantes y los conocimientos necesarios para enseñar en esta área. Se evidenció que enfrentan dificultades en todas las temáticas evaluadas y se asociaron a la falta de presencia de la estadística en su currículo y a la desarticulación de los temas en su instrucción.

Finalmente, en el contexto de la docencia, Molina et al. (2020) hicieron un estudio con futuros profesores españoles de primaria y encontraron en ellos una deficiente alfabetización estadística, concretamente en la componente de postura crítica, una de las disposiciones señalada por Gal (2002). Ello significa una falta de conocimiento del contexto y la postura crítica y reflexiva hacia la información basada en datos.

4. Metodología

4.1 Instrumento de evaluación

El instrumento que hemos construido está conformado por 21 ítems de opción múltiple, de los cuales 12 son de alfabetización estadística y 9 de razonamiento estadístico. Algunos ítems son de elaboración propia, otros fueron seleccionados y adaptados de instrumentos diversos, como es el caso de Statistics Concepts Inventory (SCI) (Allen, 2006); Basic Literacy in Statistics (BLIS) (Ziegler, 2014); Reasoning and Literacy Instrument (REALI) (Sabbag, 2016); LOCUS (Jacobbe et al., 2014); GOALS (Sabbag y Zieffler, 2015); CAOS (delMas et al., 2007) y SRA (Garfield, 2003). En la Tabla 1 se encuentra el listado de los ítems, el tema general al que cada uno pertenece y el contenido particular que evalúa, la habilidad con la que se relaciona, el nivel de desarrollo cognitivo necesario para resolverlo y el método de validación.

Tabla 1. Ítems por tema, habilidad, nivel, contenido, fuente de elaboración y su validación

Tema		Habilidad y nivel	Contenido	Instrumento	Validación
Recolección de datos	1	Alfabetización (U)	Muestra y Población	BLIS	$\alpha = 0.83$ *1
	2	Alfabetización (U)	Tipo de estudio estadístico	BLIS	$\alpha = 0.83$ *1
	3	Alfabetización (U)	Muestreo	REALI	$\alpha = 0.76$ $\alpha = 0.78$ *2
	6	Alfabetización (M)	Variabilidad muestral	BLIS	$\alpha = 0.83$ *1
	11	Alfabetización (U)	Diseño de un estudio	LOCUS	$\alpha = 0.71 \pm 1$ $\alpha = 0.87$ *3
	12	Alfabetización (U)	Muestreo	LOCUS	$\alpha = 0.71 \pm 1$ $\alpha = 0.87$ *3
	17	Razonamiento (U)	Muestreo	LOCUS	$\alpha = 0.71 \pm 1$ $\alpha = 0.87$ *3
Interpretación de representaciones gráficas de datos	5	Alfabetización (M)	Interpretar un diagrama de puntos	REALI	$\alpha = 0.76$ $\alpha = 0.78$ *2
	7	Alfabetización (R)	Interpretar un histograma	REALI	$\alpha = 0.76$ $\alpha = 0.78$ *2
	8	Alfabetización (M)	Interpretar un histograma	Elaboración propia	Validación externa y $\alpha = 0.5234$ *4
	10	Alfabetización (R)	Interpretar un diagrama de barras	Elaboración propia	Validación externa y $\alpha = 0.5234$ *4
	18	Razonamiento (R)	Interpretar un diagrama de línea	LOCUS	$\alpha = 0.71 \pm 1$ $\alpha = 0.87$ *3
Medidas descriptivas de datos	4	Alfabetización (U)	Deciles y percentiles	SCI	$\alpha = 0.61$ *5
	9	Alfabetización (R)	Correlación	Elaboración propia	$\alpha = 0.5234$ *4
		Razonamiento (M)	Media y mediana	GOALS	Validación externa y modelo de 2 parámetros *6
	14	Razonamiento (R)	Distribuciones de datos	CAOS	$\alpha = 0.82$ *7
	15	Razonamiento (M)	Distribuciones de datos	CAOS	$\alpha = 0.82$ *7
	19	Razonamiento (R)	Desviación estándar	LOCUS	$\alpha = 0.71 \pm 1$ $\alpha = 0.87$ *3

Probabilidad	16	Razonamiento (M)	Tablas de contingencia	CAOS	$\alpha = 0.82$ *7
	20	Razonamiento (R)	Probabilidad	SRA	$\alpha = 0.70$ $\alpha = 0.75$ *8
	21	Razonamiento (M)	Probabilidad	SRA	$\alpha = 0.70$ $\alpha = 0.75$ *8

Nota: *1 (Ziegler, 2014, p. 122); *2 (Sabbag, 2016, p. 69, son valores para los ítems de alfabetización y razonamiento por separado respectivamente); *3 (Whitaker et al., 2015, p. 9, valores para los ítems de nivel principiante/intermedio e intermedio/avanzado respectivamente); *4 valor de alfa aceptable para ítems dicotómicos (Pedhazur y Pedhazur, 1991); *5 (Allen, 2006, p. 109, Tablas 27 a-e); *6 (Sabbag y Zieffler, 2015, p. 96, existen tres valores diferentes para cada ítem que se utilizan para la validación); *7 (delMas et al., 2007, p. 33); *8 (Garfield, 1998, p. 785, valores para respuestas correctas e incorrectas respectivamente).

Los temas y contenidos evaluados en el instrumento planteado fueron escogidos en función del currículo de estadística en el bachillerato de México (Inzunza y Rocha, 2021). En este sentido, los contenidos que no se incluyeron son los que se relacionan principalmente con la estadística inferencial. Además, los ítems que se tomaron de los instrumentos fueron traducidos al español, se cambiaron valores de monedas, ubicaciones y contextos que pudieran generar confusiones, por elementos locales conocidos.

Los niveles uniestructural (U), multiestructural (M) y relacional (R) que se señalan en cada uno de los ítems, corresponden a los niveles de la taxonomía SOLO desarrollada por Biggs y Collis (1982). El modelo SOLO categoriza el desarrollo cognitivo de manera jerárquica y estructural, es útil para interpretar y clasificar las respuestas de estudiantes a una evaluación o para diseñar evaluaciones, de acuerdo con el número de conceptos y propiedades que utilizan en sus argumentaciones, la cual proporciona una base sobre su nivel de comprensión y razonamiento sobre un tema.

El modelo SOLO considera cinco niveles, los cuales se describen en la Tabla 2. Como se percibe, en los ítems que conforman el instrumento solo se utilizaron tres de los cinco niveles, esto se debe a que dentro de los objetivos de aprendizaje de estadística del currículo mexicano no se considera que los estudiantes se queden con un conocimiento básico como en el nivel preestructural, ni que alcancen procesos complejos como en el nivel abstracto extendido (Inzunza y Rocha, 2021).

Tabla 2. Niveles y descripción del modelo SOLO

Nivel	Descripción
Preestructural	Las tareas en este nivel se limitan al cálculo simple de medidas descriptivas de los datos (media, mediana y moda, por ejemplo), con base en un conjunto de datos. Para resolver estos, el estudiante no requiere identificar, caracterizar o comprender conceptos.
Uniestructural	La característica principal de los ítems de este nivel es que se requiere la comprensión de un único concepto o aspecto relevante por parte del estudiante para su resolución. Aunque es posible que la tarea planteada presente conexiones con otros conceptos, estas son explícitas y hechas para facilitar la identificación del concepto principal.
Multiestructural	Los ítems en este nivel presentan varios conceptos al mismo tiempo, sin que esto implique una dependencia o relación importante entre ellos (por ejemplo, las comparaciones entre medidas descriptivas). Aunque no es necesario que el estudiante relacione los conceptos entre ellos, es indispensable que los comprenda individualmente para resolver correctamente lo que se plantea en este nivel.
Relacional	A diferencia del anterior nivel, las tareas en este punto requieren de manera indispensable que el estudiante relacione los conceptos involucrados (por ejemplo, los datos atípicos y las medidas descriptivas, elementos anexos a una representación gráfica, relación entre partes, frecuencias y medidas de ubicación, entre otros).
Abstracto extendido	Las tareas de este nivel requieren, además de abordar la complejidad de las del nivel anterior, una transferencia del conocimiento a un contexto diferente al que fue aprendido.

Nota. Adaptado de Biggs y Collis (1982).

4.2 Contexto

En México, la educación preuniversitaria está dividida en dos tipos: básica y media superior. La educación básica se divide en preescolar, primaria y secundaria, mientras que la educación media superior se divide en el nivel bachillerato y la educación profesional técnica. La Secretaría de Educación Pública (SEP) establece programas de estudio para la educación básica a nivel nacional, sin embargo, en el caso de la educación media superior es diferente, pues esta es impartida por diferentes sistemas (federal, estatal y autónomo), en los cuales se definen diversos programas de estudio (Inzunza y Rocha, 2021).

La educación estadística es impartida en México desde el nivel preescolar y la probabilidad empieza en el grado quinto de primaria. En la educación secundaria la estadística y probabilidad se incluyen en la asignatura de Matemáticas. Por su parte, en el nivel medio superior el currículo está dividido en tres

componentes (básica, propedéutica y profesional), la Estadística corresponde a la componente propedéutica, lo que indica que esta asignatura no es obligatoria, sin embargo, las instituciones pueden elegir agregarla al plan de estudios de forma obligatoria u optativa. El contenido, por tema y nivel educativo, en el currículo mexicano, puede verse resumido en la Tabla 3.

Tabla 3. Contenidos de estadística y probabilidad de la educación básica y bachillerato en México

Tema	Preescolar	Primaria	Secundaria	Bachillerato
Recolección de los datos	Observación, encuestas, entrevista, consulta de información.	Encuestas, observación, entrevista, consulta de información.	Encuestas, observación, entrevista, consulta de información.	Encuesta, entrevista, observación, experimentación. Muestreo probabilístico y no probabilístico.
Organización, representación, interpretación de datos	Pictogramas, tablas.	Pictogramas, tablas, diagramas de barras y circulares.	Gráficas circulares, histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.	Distribuciones de frecuencia. Gráficas circulares, histogramas, polígonos de frecuencia y ojivas.
Medidas descriptivas de los datos		Moda, media aritmética y rango de un conjunto de datos.	Medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana) y rango y desviación media de un conjunto de datos.	Medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana) y medidas de dispersión (rango y desviación media, varianza y desviación estándar) de un conjunto de datos. Cuartiles, deciles y percentiles. Correlación de dos variables y regresión lineal.
Probabilidad		Experimentos aleatorios, registro de frecuencias y espacio muestral.	Experimentos aleatorios, probabilidad frecuencial, probabilidad teórica, probabilidad de eventos mutuamente excluyentes.	Enfoques de probabilidad, eventos y espacio muestral. Conjuntos y operaciones con conjuntos. Técnicas de conteo, diagrama de árbol, permutaciones y combinaciones. Evento dependientes e independientes. Distribuciones de probabilidad Binomial, Normal, Poisson, Ji Cuadrada. Probabilidad condicional y teorema de Bayes.

Nota. Obtenido de Inzunza y Rocha (2021). En consecuencia, en la etapa educativa que corresponde al nivel medio superior, a algunos sujetos de estudio no se les impartieron contenidos estadísticos; además, cabe aclarar que los sujetos eran estudiantes de primer semestre universitario que no habían tomado ningún curso de estadística.

4.3 Sujetos de estudio

Los participantes fueron 193 estudiantes de primer semestre en sus carreras de la Universidad Autónoma de Sinaloa, que aún no habían tomado el curso de Estadística, por lo que sus antecedentes de estudio de esta área corresponden a los niveles preuniversitarios (en la Tabla 4 se observa la cantidad de estudiantes por carrera universitaria). Sus antecedentes estadísticos eran muy diversos, pues, aunque el currículo de educación básica es el mismo para todos, no así lo es el de bachillerato. En la siguiente tabla se puede

observar el porcentaje de estudiantes por carrera universitaria que durante su bachillerato tuvieron un currículo en el cual la estadística pertenecía al componente propedéutico o básico, el 23.3% de los estudiantes participantes pudieron optar por matricular o no la asignatura de Estadística, mientras que el 76.7% vieron la asignatura de forma obligatoria.

Tabla 4. Estudiantes por carrera universitaria

Carrera universitaria	Sexo		Estudios previos bachillerato		Total
	M	F	Propedéutico	Básico	
Arquitectura	62	66	24.2%	75.8%	128
Diseño Urbano		1	100%		1
Estudios Internacionales	2	3	40%	60%	5
Informática	43	5	16.7%	83.3%	48
Ingeniería Electrónica	3	1		100%	4
Ingeniería en Telecomunicaciones, Sistemas y Electrónica	2	1	66.7%	33.3%	3
NN		1		100%	1
Políticas Públicas	2	1		100%	3
Total	114	79	23.3%	76.7%	193

Nota. Elaboración propia.

4.4 Estrategia de aplicación del instrumento y análisis de la información

El instrumento de evaluación se diseñó con la herramienta de formulario de Google Forms para aplicarse en línea. Se envió un correo electrónico a 887 estudiantes pidiendo que respondieran el cuestionario sin vincular su participación a ninguna motivación externa, por lo que los 193 sujetos fueron participantes voluntarios.

Una vez aplicado el instrumento, se procedió a contar la cantidad de respuestas correctas para cada ítem y cada estudiante, haciendo distinción entre los puntajes de alfabetización y razonamiento estadístico. Dado que los ítems de evaluación eran dicotómicos, la asignación del puntaje se determinó con 1 punto para respuesta correcta y 0 puntos para respuestas incorrectas, para un máximo de 21 puntos. Posteriormente se hizo un análisis conceptual de las respuestas para proporcionar explicaciones de los resultados.

5. Resultados y discusión

5.1 Alfabetización estadística

Los resultados obtenidos por los estudiantes en la habilidad de alfabetización estadística se resumen en la Tabla 5, donde se encuentra cada ítem de dicha categoría, el porcentaje de estudiantes que seleccionó cada opción de respuesta (A, B, C o D) (el asterisco en los resultados indica la respuesta correcta) y el nivel de la taxonomía SOLO al que pertenece cada ítem.

Tabla 5. Porcentaje de respuestas correctas de los ítems que evalúan la alfabetización estadística

#	Porcentajes de respuestas correctas				Nivel SOLO
	A	B	C	D	
1	37.8	10.4	51.8*		U
2	13.5	83.4*	3.1		U
3	45.1	24.9	30.1*		U
4	17.1	21.8	19.2*	42	U
5	32.6	24.4	43*		M
6	16.1	32.1	51.8*		M
7	20.7	14	22.8	42.5*	R
8	16.6*	17.1	18.1	48.2	M
9	18.7	28	39.9*	13.5	R
10	14.5	21.8	18.1	45.6*	R
11	26.4	57*	8.3	8.3	U
12	68.4*	5.7	10.9	15	U

Nota: Las celdas vacías en los ítems 1, 2, 3, 5 y 6 se deben a que solo poseen tres opciones de respuesta.

5.1.1 Ítems de nivel uniestructural

Los ítems con mayor porcentaje de respuestas correctas fueron el 2 y el 12, con 83.41% y 68.4%, respectivamente. Ambos ítems corresponden al tema de recolección de datos. El ítem 2 tiene como objetivo evaluar si los estudiantes distinguen un estudio observacional de uno experimental a partir

de una situación dada. Por su parte, el ítem 12 tiene como propósito evaluar si los estudiantes consideran al muestreo aleatorio para hacer generalizaciones hacia una población, a partir de la descripción de una situación que implica la elección de una opción de muestreo entre cuatro opciones presentadas.

Por otro lado, los ítems de mayor dificultad fueron el 3 y el 4, correspondientes a los temas de recolección de datos y medidas descriptivas, respectivamente. El ítem 3, con una tasa de respuestas correctas de 30.1%, tiene como propósito evaluar la validez de los resultados de una encuesta en la que se selecciona una gran muestra no aleatoria de una población. La complejidad de este ítem consistió en que los estudiantes atendieron más el tamaño de la muestra que la forma en que fue seleccionada; los estudiantes que eligieron la muestra grande pero no aleatoria, asociando la representatividad de una muestra más al tamaño de ella que a la forma como se selecciona la muestra, porque no reconocen el poder de la aleatoriedad.

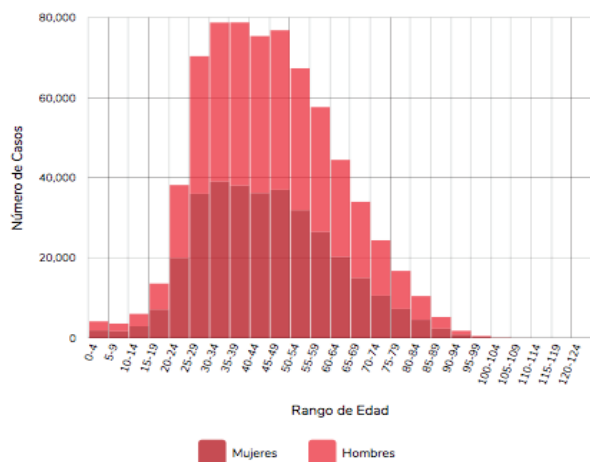
Por su parte, el ítem 4 tiene como objetivo evaluar si los estudiantes comprenden el significado de un decil a partir de un enunciado que involucra los puntajes de un examen. La tasa de respuestas correctas fue de apenas 19.2%. En este caso, cabe decir que el tema es nuevo en el currículo mexicano, centrado más en la descripción de datos mediante medidas de centro y de variabilidad, que en los deciles y cuartiles.

En general, los ítems de nivel uniestructural, no obstante, involucran solo un concepto o propiedad en su argumentación, no resultaron sencillos para los estudiantes, salvo los ítems 2 y 12 donde superaron las dos terceras partes de respuestas correctas.

5.1.2 Ítems de nivel multiestructural

Los ítems 5 y 8 corresponden a interpretación de representaciones gráficas, y el ítem 6 a recolección de datos. El ítem 8 fue el más difícil del cuestionario, pues solo fue respondido correctamente por 16.6% de los estudiantes; consiste en interpretar un histograma construido con el número de casos COVID-19 en México en un momento dado de la pandemia, según la edad de las personas y haciendo distinción entre hombres y mujeres (ver Figura 1).

Figura 1. Número de casos Covid-19 en México por rango de edad y género



Nota. Secretaría de Salud

Como puede verse, involucra dos variables que requieren ponerse en conexión para interpretar correctamente la información. Por su parte el ítem 5, que constaba de dos diagramas de puntos, el primero con los datos de una muestra y el segundo con los promedios de un conjunto de muestras (distribución muestral), obtuvo el 43% de respuestas correctas. Los estudiantes tenían que distinguir que en un diagrama los datos eran brutos y en el otro estaban procesados (medias muestrales).

5.1.3 Ítems de nivel relacional

Se consideraron tres ítems, 7, 9 y 10, todos con tasas de respuestas correctas menores al 50%. El ítem 7 consistía en interpretar un histograma cuyos datos eran las horas de sueño diarias de un grupo de estudiantes; se obtuvo una tasa de respuestas correctas de 42.5%. El ítem 9 consistía en relacionar la gráfica de la Figura 1 (número casos COVID-19 por grupo de edad) y un histograma con indemnizaciones de gastos médicos de enfermos COVID-19 por los mismos grupos edad; se obtuvo un 39.9% de respuestas correctas. Como puede verse, se involucran dos gráficas de dos variables cada una, lo cual resultó complejo para los estudiantes, pues requerían poner en relación simultánea ambas gráficas.

Resultados de estudios previos sobre alfabetización estadística con estudiantes y profesores (Rodríguez, 2017) concuerdan con estos resultados, al reportar porcentajes bajos de situaciones de tipo textual con argumentaciones no sustentadas en conceptos básicos de estadística, como son las gráficas e

interpretación de medidas descriptivas, muestreo y representatividad. De la misma manera, Mayen et al. (2007) reportaron serias dificultades de estudiantes de bachillerato sobre los promedios y sus propiedades.

5.2. Razonamiento estadístico

Los resultados obtenidos por los estudiantes en la habilidad de razonamiento estadístico se resumen en la Tabla 6, donde se encuentra cada ítem de dicha categoría, el porcentaje de estudiantes que seleccionó cada opción de respuesta (A, B, C o D; el asterisco en los resultados indica la respuesta correcta) y el nivel de la taxonomía SOLO al que pertenece cada ítem.

Tabla 6. Porcentaje de respuestas correctas de los ítems que evalúan el razonamiento estadístico

#	Porcentajes de respuestas correctas					Nivel SOLO
	A	B	C	D	E	
17	67.4*	11.9	13.5	7.3		U
18	7.3	50.8*	18.1	23.8		R
13	31.1	43	25.9*			M
14	41.5*	21.2	21.2	16.1		R
15	53.9	7.3	38.9*			M
16	38.3*	24.4	37.3			M
19	24.4	29	46.6*			R
20	10.4	5.7	2.6	39.4*	42	R
21	20.2	11.9	20.7	35.8*	11.4	M

Nota. Elaboración propia

5.2.1 Ítems de nivel uniestructural

Solo un ítem de este nivel fue contemplado, su propósito era identificar al muestreo aleatorio como el mejor método para seleccionar a las personas y recolectar información en una encuesta para conocer la opinión de una población; el 67.4% respondió correctamente. Este tema fue abordado en otros ítems de alfabetización estadística, con resultados mixtos, dependiente del contexto.

5.2.2 Ítems de nivel multiestructural

Los ítems 13, 15, 16 y 21, correspondientes a medidas descriptivas y probabilidad, obtuvieron todos un porcentaje de respuestas correctas por debajo del 40%. El ítem 13 fue el más bajo (25.9%), este involucraba razonar con las propiedades de la media y la mediana, un tema poco analizado en el currículo mexicano, que se centra más en el cálculo y procedimientos. Los otros tres ítems apenas superaron la tercera parte de respuestas correctas. En el caso del ítem 15, este requería interpretar dos diagramas de caja, un tema que aparece en el currículo de bachillerato, pero por ser nuevo, es poco visto por los profesores, igual ocurre con el ítem 16 sobre tablas de contingencia.

5.2.3 Ítems de nivel relacional

En este nivel se ubican cuatro ítems. El ítem 14 involucra un par de diagramas de caja (41.5%), el ítem 18 trata sobre la interpretación de una serie de tiempo (50.8%), el ítem 19 involucra una situación que requiere la interpretación de la media y la desviación estándar de manera conjunta (46.6%), y el ítem 20 la interpretación de un enunciado de naturaleza probabilística (39.4%).

En la literatura se reportan dificultades de comprensión con conceptos de estadística considerados básicos para el nivel bachillerato, incluidos profesores, no solo estudiantes, tal es el caso de la interpretación y conversión de diversas representaciones gráficas, medidas de tendencia central y medidas de variabilidad. De la misma manera, Inzunza (2015), en una investigación con estudiantes universitarios de México sobre sus habilidades de interpretación de gráficas con datos de contextos económicos y sociodemográficos, encontró que los estudiantes se ubicaron fundamentalmente en los niveles idiosincrático y lectura básica de una taxonomía creada exprofeso, lo cual guarda analogía con los niveles preestructural y uniestructural de la taxonomía SOLO, utilizada en esta investigación. Sus interpretaciones estuvieron enfocadas principalmente en aspectos locales de las gráficas y tuvieron dificultades para relacionar información relevante y el contexto.

En suma, los estudiantes evaluados presentaron un bajo nivel de alfabetización y razonamiento estadístico. De forma más específica, en la dimensión de alfabetización estadística el promedio de respuestas correctas de los estudiantes fue de 45.8%; mientras que, en la dimensión de razonamiento estadístico, el promedio de respuestas correctas fue de 42.7%. Ahora, los resultados por nivel basados en la taxonomía SOLO fueron mejores en los ítems de

nivel uniestructural. El promedio de aprobación fue de 49.7%; en los ítems de nivel multiestructural, la media de las puntuaciones fue 39.9%, mientras que, en los ítems de nivel relacional, el promedio de las puntuaciones fue 43.7%.

6. Conclusiones

No obstante, todos los ítems seleccionados para formar el cuestionario abordan conceptos presentes en el currículo de educación básica y media superior, los resultados muestran que los estudiantes desarrollaron un bajo nivel de alfabetización y razonamiento estadístico de acuerdo con los niveles de la taxonomía SOLO, lo cual es coincidente con resultados de otras investigaciones (por ejemplo, Estrella et al., 2015; Juárez e Inzunza, 2014; Mayen et al., 2007; Rodríguez, 2017). Aun en los ítems de nivel uniestructural, que contemplan argumentos que requieren movilizar un solo concepto o alguna propiedad, hubo un alto porcentaje de respuestas incorrectas en las dos habilidades estadísticas evaluadas.

En este sentido, los estudiantes –y mayormente quienes se ubicaron en el nivel uniestructural del modelo SOLO– mostraron insuficientes conocimientos estadísticos y falta de la actitud crítica que caracteriza a la alfabetización estadística; ambas componentes son centrales en el modelo de alfabetización que plantea Gal (2002). A su vez, en situaciones que requieren discutir o comunicar reacciones a información estadística publicada en los medios, estos estudiantes estarían en dificultades para hacerlo correctamente.

De la misma manera, los resultados muestran diversas dificultades por parte de los estudiantes con el dominio de los elementos clave para el razonamiento estadístico definidos por Shaughnessy et al. (2009), como es el caso de analizar datos, modelar distribuciones, conectar estadística con probabilidad e interpretar estudios estadísticos.

Como explicaciones sobre los resultados obtenidos destacamos las siguientes: un enfoque de enseñanza que enfatiza más en fórmulas y procedimientos que en alfabetización y razonamiento estadístico; explicación del muestreo desde la relación parte-todo (muestra-población) con énfasis en los instrumentos de recolección de datos, más que en propiedades del muestreo, como es la variabilidad y representatividad; los temas de correlación, diagramas de caja y deciles son nuevos en el bachillerato en México, y muchos profesores no los enseñan, o los enseñan de manera superficial; incluso en secundaria, se orienta a los profesores a construir gráficas manualmente, *para que los estudiantes comprendan cómo se construyen,*

en vez de fomentar la interpretación y el desarrollo de una postura crítica ante información presentada gráficamente sobre contextos significativos para los estudiantes (Inzunza y Rocha, 2021).

Finalmente, la probabilidad, aunque es parte del currículo desde el quinto grado de primaria, es tema complejo para muchos profesores, y se enfoca en el uso de técnicas combinatorias y enfoque clásico en secundaria y bachillerato.

En concordancia con los señalado por Inzunza y Rocha (2021), la metodología de enseñanza en educación básica otorga importancia a contextos reales y al planteamiento de preguntas estadísticas para responder con los datos, pero en bachillerato se hace mayor énfasis en el cálculo estadístico y técnicas combinatorias, promoviendo una desarticulación entre los temas y los contextos. Esto, como ya lo describieron Estrella et al. (2015), se relaciona con los bajos resultados y las dificultades que los estudiantes enfrentan en esta área.

En resumen, los resultados indican que los cursos de Estadística que han tomado los estudiantes en educación básica y media superior no han contribuido en gran medida en el desarrollo de habilidades de alfabetización y razonamiento estadístico. De tal forma, las reformas curriculares más recientes en educación en México, aun cuando se han enfocado en el desarrollo de competencias y resolución de problemas, no han logrado insertar el enfoque de alfabetización y razonamiento estadístico como sería deseable.

Los resultados de la investigación orientan a una revisión de los programas de estudio para incorporar una metodología de enseñanza que promueva el desarrollo de habilidades estadísticas que van más allá del cálculo, centradas en la interpretación y reflexión crítica de información estadística, así como en la comprensión de los métodos y sus fundamentos para la resolución de problemas estadísticos.

Referencias

- Allen, K. (2006). *The statistics concept inventory: development and analysis of a cognitive assessment instrument in statistics* [Tesis doctoral, University of Oklahoma]. UMI Microform. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2130143>
- Australian Curriculum (2018, 26 de octubre). *National Numeracy Learning Progression*. Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (ACARA). <https://www.australiancurriculum.edu.au/resources/national-literacy-and-numeracy-learning-progressions/national-numeracy-learning-progression/statistics-and-probability/?subElementId=50841&scaleId=0>
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J., y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 83, 7-18. <http://funes.uniandes.edu.co/3651/>
- Biggs, J., y Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. Academic Press. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-10375-3>
- Callingham, R., y Watson, J. (2017). The development of statistical literacy at school. *Statistics Education Research Journal*, 16(1), 181-201. <https://doi.org/10.52041/serj.v16i1.223>
- delMas, R., Garfield, J., Ooms, A., y Chance, B. (2007). Assessing students' conceptual understanding after a first course in statistics. *Statistics Education Research Journal*, 6(2), 28-58. <https://doi.org/10.52041/serj.v6i2.483>
- Estrella, S., Olfos, R., y Mena-Lorca, A. (2015). El conocimiento pedagógico del contenido de estadística en profesores de primaria. *Educação e Pesquisa*, 41(02), 477-493. <https://doi.org/10.1590/S1517-97022015041858>
- Frost, R., Armstrong, B., y Christiansen, M. (2019). Statistical learning research: A critical review and possible new directions. *Psychological Bulletin*, 145(12), 1128-1153. <http://dx.doi.org/10.1037/bul0000210>
- Gal, I. (2002). Adults' Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-5. <https://doi.org/10.2307/1403713>
- Galesic, M., y García-Retamero, R. (2010). Statistical numeracy for health: A cross-cultural comparison with probabilistic national samples. *Archives of Internal Medicine*, 170(5), 462-468. <https://doi.org/10.1001/archinternmed.2009.481>
- Garfield, J. (1998). The statistical reasoning assessment: Development and validation of a research tool. En L. Pereira-Mendoza (Ed.), *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics* (pp. 781-786). The Netherlands: International Statistical Institute. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.219.5316>
- Garfield, J. (2002). The challenge of developing Statistical Reasoning. *Journal of Statistics Education*, 10(3). <https://doi.org/10.1080/10691898.2002.11910676>
- Garfield, J. (2003). Assessing Statistical Reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 2(1), 22-38. <https://doi.org/10.52041/serj.v2i1.557>
- Garfield, J., y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting Research and Teaching Practice*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8383-9>
- Inzunza, S. (2015). Niveles de interpretación que muestran estudiantes sobre gráficas para comunicar información de contextos económicos y sociodemográficos. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 20(65), 529-555. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14035408010>
- Inzunza, S., y Rocha, E. (2021). Los datos y el azar en el currículo de educación básica y bachillerato en México: reflexiones desde la perspectiva internacional. *Diálogos sobre Educación: temas actuales en investigación educativa*, 12(23), 1-13. <https://doi.org/10.32870/dse.v0i22.717>
- Jacobbe T., Case, C., Whitaker, D., y Foti, S. (2014, 13 al 18 de julio). *The LOCUS assessment at the college level: conceptual understanding in introductory statistics* [Conferencia]. 9th International Conference on Teaching Statistics, Flagstaff, Arizona. https://icots.info/9/proceedings/pdfs/ICOTS9_3C3_WHITAKER.pdf
- Johannssen, A., Chukhrova, N., Schmal, F., y Stabenow, K. (2021). Statistical Literacy-Misuse of Statistics and Its Consequences. *Journal of Statistics and Data Science Education*, 29(1), 54-62. <https://doi.org/10.1080/10691898.2020.1860727>

- Juárez, A., y Inzunza, S. (2014). Comprensión y razonamiento de profesores de Matemáticas de bachillerato sobre conceptos estadísticos básicos. *Perfiles Educativos*, 36(146), 13-29. <http://www.iisue.unam.mx/perfiles/articulo/2014-146-comprension-y-razonamiento-de-profesores-de-matematicas-de-bachillerato-sobre-conceptos-estadisticos-basicos.pdf>
- Kahneman, D., Slovic, P., y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: heuristics and biases*. Cambridge University. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511809477>
- Konold, C. (1989). Informal Conceptions of Probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59-98. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0601_3
- Lecoutre, M. (1992). Cognitive models and problem spaces in purely random situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23(6), 557-568. <https://doi.org/10.1007/BF00540060>
- Mayen, S., Cobo, B., Batanero, C., y Balderas, P. (2007). Comprensión de las medidas de posición central en estudiantes mexicanos de bachillerato. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 9, 187-201. <http://funes.uniandes.edu.co/14650/>
- Ministry of Education New Zealand. (2014, 3 de abril) *What is the mathematics and statistics?* The New Zealand Curriculum Online. <https://nzcurriculum.tki.org.nz/The-New-Zealand-Curriculum/Mathematics-and-statistics/What-is-mathematics-and-statistics>
- Molina, E., Contreras, J., Salcedo, A., y Contreras, J. M. (2020). Evaluación de la posturcítica de futuros profesores de Educación Primaria como componente de la cultura estadística. *Educación Matemática*, 32(3), 97-120. <https://doi.org/10.24844/em3203.04>
- Naya, S., Ríos, M., y Zapata, L. (2012). La estadística en la enseñanza preuniversitaria. *La Gaceta de la RSME*, 15(2), 355-368. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3952887>
- Pedhazur, E., y Pedhazur, L. (1991). *Measurement, design, and analysis*. Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9780203726389>
- Porkess, R. (2011). *The future of statistics in our schools and colleges*. Royal Statistical Society. <https://rss.org.uk/RSS/media/News-and-publications/Publications/Reports%20and%20guides/rss-reports-future-statistics-schools-colleges-roger-porkess-2012.pdf>
- Ridgway, J. (2016). Implications of the Data Revolution for Statistics Education. *International Statistical Review*, 84(3), 528-549. <https://doi.org/10.1111/insr.12110>
- Rodríguez, F. (2017). Alfabetización Estadística en Profesores de Distintos Niveles Formativos. *Revista Educação e Realidade*, 42(4), 1459-1477. <https://doi.org/10.1590/2175-623662610>
- Rumsey, D. (2002). Statistical Literacy as a Goal for Introductory Statistics Courses. *Journal of Statistics Education*, 10(3). <https://doi.org/10.1080/10691898.2002.11910678>
- Sabbag, A. (2016). *Examining the relationship between statistical literacy and statistical reasoning* [Tesis doctoral, University of Minnesota]. ProQuest. <https://www.proquest.com/openview/1a1181f6a728abbfcfd147ba730b4048/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750>
- Sabbag, A., y Zieffler, A. (2015). Assessing learning outcomes: an analysis of the GOALS-2 instrument. *Statistics Education Research Journal*, 14(2), 93-116. <https://doi.org/10.52041/serj.v14i2.263>
- Saffran, J., y Kirkham, N. (2018). Infant statistical learning. *Annual review of psychology*, 69, 181-203. <https://doi.org/10.1146/annurev-psych-122216-011805>
- Sharma, S. (2017). Definitions and models of statistical literacy: a literature review. *Open Review of Educational Research*, 4(1), 118-133. <https://doi.org/10.1080/23265507.2017.1354313>
- Shaughnessy, M., Chance, B., y Henry, M. (2009). *Focus in High School Mathematics: Statistics and Probability*. NCTM.
- Steen, L. (2002). The case for quantitative literacy. En L. A. Steen (Ed.), *Mathematics and Democracy: The Case for Quantitative Literacy* (pp. 1-22). NCED. https://www.commoncorediva.com/wp-content/uploads/2016/10/8952_mathanddemocracy2.pdf
- Tishkovskaya, S., y Lancaster, G. (2012). Statistical education in the 21st century: A review of challenges, teaching innovations and strategies for reform. *Journal of Statistics Education*, 20(2), 1-24. <https://doi.org/10.1080/10691898.2012.11889641>
- Wallman, K. (1993). Enhancing Statistical Literacy: Enriching Our Society. *Journal of the American Statistical Association*, 88(421), 1-8. <https://doi.org/10.1080/01621459.1993.10594283>

Watson, J. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals*. Lawrence Erlbaum. <https://doi.org/10.4324/9780203053898>

Watson, J., y Callingham, R. (2003). Statistical literacy: A complex hierarchical construct. *Statistics Education Research Journal*, 2(2) 3-46. <https://doi.org/10.52041/serj.v2i2.553>

Weiland, T. (2017). Problematizing statistical literacy: An intersection of critical and statistical literacies. *Educational Studies in Mathematics*, 96, 33-47. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9764-5>

Whitaker, D., Foti, S., y Jacobbe, T. (2015). The Levels of Conceptual Understanding in Statistics (LOCUS) Project: Results of the Pilot Study. *Numeracy: Advancing education in quantitative literacy*, 8(2). <http://dx.doi.org/10.5038/1936-4660.8.2.3>

Zapata, L. (2016). Enseñanza de la estadística desde una perspectiva crítica. *Yupana Revista de Educación Matemática de la UNL*, 10, 30-41. <https://doi.org/10.14409/yu.v0i10.7695>

Ziegler, L. (2014). *Reconceptualizing statistical literacy: Developing an assessment for the modern introductory statistics course* [Tesis doctoral, University of Minnesota]. <http://iase-web.org/documents/dissertations/14.LauraZiegler.Dissertation.pdf>



ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO E TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS NO CONTEXTO DO ENSINO REMOTO: UMA PROPOSTA AMPARADA PELO GEOGEBRA PARA O ENSINO DE VOLUME

INGENIERÍA DIDÁCTICA PARA LA FORMACIÓN Y TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS EN EL CONTEXTO DE LA ENSEÑANZA A DISTANCIA: UNA PROPUESTA APOYADA EN EL SOFTWARE GEOGEBRA PARA LA ENSEÑANZA DE VOLUMEN

DIDACTIC ENGINEERING FOR TRAINING AND THEORY OF DIDACTIC SITUATIONS IN THE CONTEXT OF REMOTE TEACHING: A PROPOSAL SUPPORTED BY GEOGEBRA SOFTWARE FOR VOLUME TEACHING

Rosalide Carvalho de Sousa
rosalidecarvalho@hotmail.com
Secretaria de Educação do Estado do Ceará,
Sobral, Brasil

Francisco Régis Vireira Alves
fregis@ifce.edu.br
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
do Estado do Ceará, Fortaleza, Brasil

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma contribuição da Engenharia Didática de Formação (EDF) articulada com a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e o software GeoGebra no ensino de Geometria Espacial. O objetivo é apresentar uma proposta didática para o ensino remoto de Volume de Sólidos Geométricos como suporte ao professor de matemática, de modo a promover uma atividade que possibilite ao aluno interpretar e resolver situações-problema por meio da movimentação da construção no GeoGebra. Para estruturar esta pesquisa, utilizaram-se as quatro fases da Engenharia Didática (ED), a saber: Análise preliminar, Análise a priori, Experimentação, Análise a posteriori e validação. A aplicação ocorreu on-line, via Google Meet, com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública no interior do Ceará, Brasil. Verificou-se que o uso da EDF aliada à TSD e com o aporte do GeoGebra, possibilita ao docente a compreensão de ações que ocorrem no interior da sala de aula, antevendo os possíveis comportamento dos alunos, além de, desenvolver o ensino de conceitos geométricos através de várias linguagens, como a visual, verbal, geométrica e textual.

PALABRAS CLAVE:

Engenharia Didática de Formação, Ensino de Volume, Teoria das Situações Didáticas, GeoGebra.

RESUMEN

El presente trabajo presenta un aporte de la Ingeniería Didáctica Educativa (EDF) articulada con la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) y el software GeoGebra en la enseñanza de la Geometría Espacial. El objetivo es presentar una propuesta didáctica para la enseñanza a distancia de Volumen de Sólidos Geométricos como apoyo al docente de matemáticas, con el fin de promover una actividad que permita al estudiante interpretar y resolver situaciones problema a través del movimiento de la construcción en GeoGebra. Para estructurar esta investigación se utilizaron las cuatro fases de la Ingeniería Didáctica (ED), a saber: Análisis preliminar, Análisis a priori, Experimentación, Análisis a posteriori y Validación. La aplicación se realizó en línea, a través de Google Meet, con estudiantes del curso de Licenciatura en Matemáticas en una universidad pública del interior de Ceará, Brasil. Se encontró que el uso de EDF combinado con TSD y con el aporte de GeoGebra, permite al docente comprender acciones que ocurren dentro del aula, anticipándose a los posibles comportamientos de los estudiantes, además de desarrollar la enseñanza de conceptos geométricos a través de diversos lenguajes, tales como visuales, verbales, geométricas y textuales.

PALABRAS CLAVE:

Ingeniería Didáctica para Formación, Enseñanza de Volumen, Teoría de Situaciones Didácticas, GeoGebra.

ABSTRACT

The present work presents a contribution of Didactic Engineering for Training (EDF) articulated with the Didactic Situations Theory (TSD) and the GeoGebra software in the teaching of Spatial Geometry. The objective is to present a proposal of a didactic situation for the remote teaching of Volume of Geometric Solids as a support to the Mathematics teacher, in order to promote an activity that allows the student to interpret and solve problem situations through the movement of the construction in GeoGebra. To structure this research, the four phases of Didactic Engineering (DE) were used, namely: Preliminary analysis, A priori analysis, Experimentation, a posteriori analysis and validation. The application took place online via Google Meet, with students of the Mathematics Degree course at a public university in the interior of Ceará, Brazil.

KEYWORDS:

Didactic Engineering for Training, Volume Teaching, Theory of Didactic Situation, GeoGebra.

1. Introdução

A busca por metodologias e recursos didático-pedagógicos que potencializem o ensino de Geometria há muito desperta o interesse e motiva estudos entre educadores e pesquisadores da educação. Há décadas se discute, na literatura, maneiras de aproximar os conhecimentos científicos estudados na sala de aula das práticas do cotidiano, na tentativa de ressignificar o ensino para que o aluno adquira as habilidades matemáticas necessárias para uso no dia a dia, ao mesmo tempo que se tenta acompanhar a velocidade com que os recursos tecnológicos evoluem.

Diante do contexto atual, frente às mudanças provocadas pela pandemia da Covid-19, a educação, principalmente a pública, mostrou-se despreparada para implementar metodologias e recursos tecnológicos capazes de inserir o ensino no mundo das tecnologias digitais, de modo a provocar mudanças no comportamento dos estudantes e docentes, o que remete à discussão da formação de professores de matemática, em especial, para o ensino de geometria. Desse modo, Sousa e Alves (2021) ressaltam que:

[...] a Tecnologia Digital da Informação e Comunicação (TDIC), configura-se como um recurso valioso para o desenvolvimento do ensino e aprendizagem da matemática, pois [...] é nessa disciplina que as tecnologias têm sido desenvolvidas com mais força, privilegiando o docente dessa área, que pode contar com uma série de recursos, como calculadoras, jogos eletrônicos, ambientes virtuais e softwares direcionados à construção dos saberes matemáticos. (p. 2)

Sendo assim, percebeu-se a importância de realizar um estudo acerca do ensino de Volume de Sólidos Geométricos. Para tanto, buscou-se, na literatura, trabalhos que retratassem como esse conteúdo é ensinado nas escolas, de que maneira ocorre sua abordagem nos livros didáticos e quais ferramentas tecnológicas são utilizadas nesses livros para auxiliar o ensino e a aprendizagem desses conceitos.

O conteúdo de Volume, presente nos livros didáticos do Programa Nacional do Ensino Médio (PNLD), geralmente, é abordado de forma técnica, pouco contextualizada, priorizando fórmulas e cálculos sintetizados, com atividades que enfatizam as aplicações algébricas, limitando, desse modo, a visualização espacial do aluno, primordial para a compreensão de tal conceito. Observou-se, também, que tanto os exercícios propostos quanto as questões

resolvidas nas duas coletâneas analisadas não articulam o novo saber com os conhecimentos prévios dos alunos, não relacionando a matemática dos anos iniciais àquelas estudadas no ensino médio.

Ademais, Costa et al. (2009) afirmam que existem alguns fatores que ocasionam dificuldades no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos geométricos, são eles: ausência de atividades com Geometria de posição e com Desenho Geométrico, desvalorização das representações bidimensionais e tridimensionais das figuras geométricas, na exposição das aulas, valorização mecanizada dos conceitos geométricos, ausência de atividades com Geometria Espacial Métrica e de percepção, dificultando a representação mental de objetos.

Diante do exposto, percebeu-se a necessidade de elaborar e executar um ensino que promova a contextualização, de modo a conduzir o estudante à reflexão e compreensão do assunto abordado. Assim, relacionou-se, nessa investigação, o uso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação como estratégia para formular situações didáticas que estimulem o desenvolvimento das habilidades do estudante no estudo do conceito de Volume.

Partindo dessa premissa, o presente artigo apresenta uma proposta fundamentada na Teoria das Situações Didáticas (TSD) com o propósito de criar um recurso didático-pedagógico, que propicie a comunicação, entre a tríade professor-aluno-conhecimento matemático. De acordo com Camilo et al. (2020), construir essas situações didáticas, de modo dinâmico e eficaz, oferece à tríade, do processo de ensino e aprendizagem, um contributo para o desenvolvimento do ensino de Matemática, especialmente o de Geometria.

Diante do exposto, buscou-se responder ao seguinte questionamento: *É possível realizar a transposição empírica dos conceitos geométricos para a geometria dedutiva, na resolução de problemas, por meio do ensino remoto?*

Portanto, este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta didática, modelada pelo *software* GeoGebra, a partir da Teoria das Situações Didáticas e estruturada na Engenharia Didática de Formação (EDF). Como justificativa, partiu-se da necessidade de ampliar as reflexões sobre o ensino do conceito de volume, despertando mudanças na ação de ensinar e na abordagem da Geometria Espacial como um todo, diversificando a prática pedagógica dos professores que ensinam matemática, possibilitando

a interpretação e resolução de situações-problema pelos alunos, nesse caso específico, do conteúdo de volume.

Corroborando com o escopo anterior, Alves (2019) ressalta que o GeoGebra tem potencial para proporcionar ao docente maneiras de estimular os alunos a realizarem a “exploração dinâmica das propriedades numéricas e geométricas, de modo que a visualização, percepção e intuição desempenhe um papel essencial para a evolução da aprendizagem de todos os envolvidos em cada situação didática” (p. 115). Assim, para estruturar a proposta didática, selecionou-se um problema do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) que contemplasse o conteúdo de Volume de Sólidos Geométricos, objeto matemático dessa investigação. Tal escolha se deu, por tratar-se de uma prova que contempla uma extensa variedade de questões com esse tema, além de ser um exame que possui grande impacto na educação brasileira, haja vista ter como propósito principal avaliar o desempenho do aluno ao final do Ensino Médio e, portanto, direcionar políticas públicas para esse setor.

Convém ressaltar que a escolha da metodologia da EDF ocorreu por ter-se como público-alvo alunos de um curso de Licenciatura em Matemática e, portanto, professores em formação inicial, além de criar um recurso didático para o ensino do conceito de Volume. Ademais, essa metodologia propicia, segundo Almouloud e Silva (2012), a construção de situações de sala de aula, em que o docente é conduzindo a descrever ações implementadas para intermediar o ensino, para o qual é necessário planejar e prever os obstáculos que podem surgir no desenvolvimento das situações, que dificultam a condução do processo de construção dos saberes pelos alunos.

Fortalecendo o trecho anterior Tempier (2013) ressalta que uma pesquisa pautada na EDF visa ao desenvolvimento de recursos para professores, que promovam subsídios para realização de pesquisas sobre a transposição didática de conceitos matemáticos estudados. Os pesquisadores deste trabalho concordam com Alves e Catarino (2017), no esteio do pensamento, de que a EDF proporcionará compreender o processo de aprendizagem e aquisição das competências profissionais do professor, um campo que ainda apresenta muitas lacunas para o entendimento da formação do docente de matemática e sua importância no contexto da educação.

Convém ainda, demarcar alguns pressupostos relacionados com as duas engenharias. Enquanto na ED o *design* de investigação propicia realizar uma prática de intervenção controlada, acerca do entendimento

dos fenômenos de ensino e aprendizagem, com maior atenção às ações realizadas pelos estudantes, na EDF o interesse se volta para “modelizar, compreender, prever e antever” a função do docente em torno do processo e do sistema educativo (Alves e Catarino, 2017, p. 133).

Assim, a organização do percurso metodológico foi fundamentada nas fases da Engenharia Didática (ED), clássica, a saber: análises preliminares, análise *a priori*, experimentação, análise *a posteriori* e validação.

Para tanto, realizou-se uma formação com 10 alunos do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), Brasil, por meio da plataforma *on-line* do *Google Meet*. Para estruturar, e organizar o encontro, foram utilizados outros recursos, tais como: *software* GeoGebra em celulares e computadores e, o aplicativo de mensagens do *WhatsApp*.

2. Referencial Teórico

2.1 Engenharia Didática de Formação (EDF)

A Engenharia Didática (ED), clássica ou de 1ª geração, teve origem na França, com Brousseau (1965), sendo amplamente difundida nos anos 80 por Chevallard (1982) e por Artigue (1989), além do próprio Brousseau. Surgiu como uma metodologia de pesquisa que aproxima os fenômenos didáticos das ações docentes no interior de uma sala de aula. De acordo com Artigue (1995), o termo ED deu-se da comparação do pesquisador didático com o trabalho de um engenheiro que, para realização de um projeto, necessita conhecer, elaborar, executar e fundamentar uma teoria na sua implementação.

A Engenharia Didática, na concepção de Perrin-Glorian (2009), possibilita uma relação entre a pesquisa e o ensino e, portanto, propôs o estudo e a elaboração de uma transposição didática para o ensino, ao mesmo tempo em que, também, estudou outros fenômenos didáticos mais gerais, permitindo o enriquecimento e a ampliação das teorias conhecidas, provocando uma mudança de interesse no público-alvo, culminando no surgimento da Engenharia Didática de 2ª geração ou Engenharia Didática de Formação, com foco no papel do professor.

Desse modo, a EDF apresenta “por primeiro objetivo o desenvolvimento de recursos (ou objetos de aprendizagem) para o ensino regular, ou formação de professores” (Almouloud e Silva, 2012, p. 28), podendo, assim, estabelecer vários níveis de construção, incluindo situações de sala de aula, na qual o

professor é orientado a descrever as ações adotadas para intermediar o ensino. Alves (2018) corrobora com os autores, ao relatar que a EDF tem foco no papel e na função desempenhada pelo professor, uma vez que faz parte de suas funções elaborar modelos capazes de realizar uma transposição didática, provocando mudanças que promoverão transformações no conhecimento matemático, possibilitando, assim, ao aprendiz compreender as situações de ensino.

A EDF tem um grau de complementariedade com a ED, de 1ª geração, que segundo Almouloud (2011), procura aproveitar o que se produz na primeira, adequando-a às necessidades do professor. Sendo assim, evidencia-se que esses estudos se caracterizam por experimentos, nos quais o professor desempenha o papel de um engenheiro, concebendo, executando, observando e analisando sequências de ensino (Artigue, 1995).

Nesse sentido, essa pesquisa segue as etapas da ED, a saber: Análises prévias ou preliminares; Concepção e Análise *a priori*; Experimentação; Análise *a posteriori* e validação. Observe o esquema na Figura 1.

Figura 1. Esquema das etapas da Engenharia Didática



Nota. Elaborado pelo(s) autor(es) (2021).

Na Figura 1, apresentou-se a visualização das fases da ED que revela um posicionamento estrutural dessa investigação. Desse modo, iniciou-se essa pesquisa pela etapa das análises preliminares, na qual procurou-se direcionar os estudos nas perspectivas que envolvem o objeto matemático dessa pesquisa, como por exemplo, análise da metodologia didática empregada no ensino desse conceito e seus efeitos na aprendizagem, uma análise das concepções dos alunos, quais dificuldades e obstáculos podem inviabilizar sua evolução, a análise do público-alvo e onde a pesquisa será aplicada. Assim, essa primeira fase tem como função subsidiar o professor (pesquisador), no que concerne ao conhecimento geral do objeto da pesquisa, possibilitando a elaboração e a construção de um recurso que vise à apropriação de saberes matemáticos pelos discentes, promovendo meios que possibilitem a superação dos obstáculos identificados por meios da construção das situações didáticas.

Tais situações atuam sob o controle das variáveis didáticas, definidas pelo pesquisador, característica da segunda etapa, a análise *a priori*. Essas variáveis são identificadas como macrodidáticas e microdidáticas. Artigue (1995) denomina as variáveis macrodidáticas, ou globais, quando relacionadas à organização geral da engenharia, e, as microdidáticas, ou locais, àquelas que tratam da organização de uma sessão didática, sendo esta utilizada na concepção da sequência de ensino. Esse foi o momento em que, também, formulou-se a situação didática do ENEM, com o amparo do software GeoGebra.

No terceiro momento, tem-se a fase da Experimentação, conhecida como a fase clássica da ED, que se constitui na aplicação da situação didática com os sujeitos envolvidos na pesquisa e na coleta de dados obtidos por meio de fotos, áudios, vídeos, escritas, relatos, entre outros, para serem analisados na última fase da engenharia.

Na etapa final, análise *a posteriori* e validação, faz-se uma análise dos dados coletados, proveniente da confrontação com hipóteses levantadas no momento da análise *a priori*, sendo avaliado se o procedimento obteve êxito ou falhas. Para uma abordagem mais profunda das etapas da ED, recomenda-se a leitura de Artigue (1995).

Na sessão subsequente, apresenta-se a Teoria das Situações Didáticas em suas quatro fases, tendo em vista estruturar um recurso didático-pedagógico para o ensino de matemática, capaz de repercutir na formação e no aperfeiçoamento de professores.

2.2 Teoria das Situações Didáticas (TSD)

A TSD é um modelo teórico desenvolvido na França por Guy Brousseau, por volta de 1980, com o intuito de propiciar a criação de um ambiente de ensino e aprendizagem matemático que relacione professor, aluno e saber (Figura 2).

Figura 2. Triângulo Didático de Brousseau



Nota. Elaborado pelo(s) autor(es) (2021).

Essa relação didática, segundo Sousa et al. (2021), dá-se a partir de um meio organizado pelo professor, propiciando interações que estimulem o aprendizado dos discentes, levando em consideração os elementos humanos, professores e alunos, mediadas pelo saber, caracterizando os elementos não-humanos que determinam o modo como essas relações irão se desenvolver. Nesse sentido, é essencial a participação do docente, haja vista que faz parte de suas atribuições escolher o problema, determinar de que modo a mediação ocorrerá e como organizá-la para estabelecer essa tríade. Para Almouloud (2007), a mediação do professor estabelece uma relação apoiada em três hipóteses, como segue:

1. O aluno aprende adaptando-se a um *milieu* que é fator de dificuldade, de contradições, de desequilíbrio [...]. Esse saber, fruto da adaptação dos alunos, manifesta-se pelas respostas novas, que são a prova da aprendizagem.
2. [...] O professor deve criar e organizar um *milieu* que seja suficiente para desenvolver situações de provocar essas aprendizagens.
3. A terceira hipótese postula que esse *milieu* e essas situações devem engajar os conhecimentos matemáticos envolvidos durante o processo de ensino e aprendizagem (Almouloud, 2007, pp. 32-33).

Assim, observa-se que essas hipóteses dão suporte ao professor para organizar um ambiente que vise a ensinar conteúdos matemáticos que promovam o aprendizado e suscitem as ações discentes frente aos problemas propostos.

No entanto, durante esse processo de organização do meio, algumas variáveis podem surgir, apresentando-se de dois modos: situação didática e situação adidática. De acordo com Alves et al. (2020), a primeira consiste na interação do aluno em uma situação de jogo ocorrendo, sempre que há, uma intenção do professor de desenvolver um aprendizado. Na segunda, o aluno evolui por seu próprio mérito para desenvolver a aprendizagem, mediante as regras do jogo, anteriormente estabelecidas pelo docente. Portanto, uma situação adidática se torna indispensável em situações didáticas, possibilitando ao aprendiz agir, formular hipóteses, validar e, finalmente, o professor procederá à institucionalização do saber.

Para analisar as relações entre as atividades de ensino, e o conhecimento matemático, os pesquisadores utilizaram as etapas da TSD de ação, formulação, validação e institucionalização, descritas a seguir, de acordo com Brousseau (1986).

Situação de Ação: Essa é uma situação em que o saber do objeto estudado se manifesta por meio da reflexão, simulação na tentativa de estabelecer estratégias de resolução, dentro de um esquema de adequação com o meio, tomando as decisões necessárias para solucionar o problema.

Situação de Formulação: É uma situação que relaciona a interação de dois ou mais alunos com o milieu. Esse é o momento da troca de informações entre os participantes com o intuito de formular uma resolução para a situação-problema, podendo ocorrer por meio de uma linguagem escrita ou oral, sem o uso explícito da linguagem matemática formal. Nesse ambiente, a comunicação é essencial para o sucesso na formação de um saber direcionado.

Situação de Validação: Em uma dialética de validação, os alunos, também, tentam estabelecer a validade do conhecimento, convencendo os interlocutores da veracidade de suas soluções, fazendo uso de uma linguagem matemática mais apropriada como, por exemplo, demonstrações ou provas. Nesse momento acontece a organização do que foi estudado e analisado pelos alunos, ou seja, se houve a construção de um novo saber.

Situação de Institucionalização: essa é uma situação em que ocorre a passagem do conhecimento individual para a dimensão histórica, estabelecendo a convenção social e revelando a intenção do professor. Nessa fase, o docente reassume o controle da sessão didática, promovendo um levantamento de todos os dados apresentados pelos discentes. E, por fim, sintetiza todas as informações e estratégias, formalizando em um único modelo de resolução matemática.

Portanto, a TSD assume o caráter de fundamentar a concepção e proposição da situação-problema utilizada na experimentação dessa pesquisa. No entanto, devido à condição de isolamento social imposta pela pandemia, foram necessárias mudanças no processo de ensino, migrando para modalidade remota. Assim, no tópico seguinte, traz-se uma síntese do ensino remoto e sua aplicação em tempos de pandemia.

2.3 Ensino de Volume

O tema Áreas e Volumes está presente em situações do cotidiano, exercendo papel de destaque em diversas profissões, tais como: a agricultura, construção civil, artes, medicina, engenharia, entre outras. Ressalta-se, também, que o assunto faz parte do currículo da educação básica. Sendo assim, é importante relacionar a matemática com outras áreas do conhecimento e

com o entorno social do aluno. Portanto, as grandezas geométricas referentes ao comprimento, área e volume apresentam conhecimentos relevantes às vivências de um indivíduo em sociedade, justificando-se assim a importância desse assunto no processo de ensino e aprendizagem da educação básica.

Ademais, as instruções normativas presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o ensino básico (2018) têm como finalidade nortear e estruturar os currículos escolares. O documento propõe que a Geometria seja apresentada do seguinte modo: “No que se refere a grandezas e medidas, os estudantes constroem e ampliam a noção de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, e obtêm-se expressões para o cálculo da medida de área de superfícies planas e da medida de volume de alguns sólidos geométricos” (BNCC, 2018, p. 527).

Com isso, o ensino de “Volume” assume uma importância ainda maior no cenário escolar. Desse modo, a maneira como o tema é apresentado aos alunos pelos professores é motivo de inquietação entre os estudiosos e pesquisadores da educação, há bastante tempo. Um dos motivos que podem ser relacionados para tal, são as deficiências apresentadas pelos aprendizes, no que diz respeito aos conceitos básicos da Geometria Plana. Outro fato a ser considerado nesse processo são as dificuldades conceituais dos próprios professores em conceitos básicos da Geometria Plana e Geometria Espacial (Costa et al., 2009).

Situações como essas conduzem à reflexão sobre a formação dos professores de matemática, pois segundo Pavanello (2001), o professor ao ministrar sua aula não atenta para a necessidade de “[...] trabalhar relações existentes entre figuras, fato esse que não auxilia o aluno a progredir para um nível superior de compreensão de conceitos” (p. 183). Isso pode prejudicar a apropriação de conhecimentos geométricos por parte dos alunos, impedindo que as habilidades e competências desses conceitos sejam consolidadas, comprometendo a preparação dos discentes na continuação da formação estudantil, como também no exercício do trabalho e cidadania. No trabalho de Vuelma et al. (2011), eles observaram que os alunos possuem poucos conhecimentos geométricos, pois mesmo reconhecendo figuras planas, aplicam as fórmulas com dificuldades e, portanto, não conseguem identificar quais devem ser usadas na resolução do problema e menos ainda reconhecem nas figuras, as medidas que são importantes para o cálculo.

Desse modo, verifica-se que que houve poucas

mudanças na metodologia empregada para o ensino do conteúdo de “Volumes” e da matemática como um todo, refletindo numa aprendizagem deficiente de tais conceitos. Assim, é notório que mudanças precisam ocorrer no processo de ensino e que elas perpassam diretamente pela formação de professores, uma vez que se faz necessário desenvolver trabalhos que articulem a matemática com as ciências, para ajudar a compreender a matemática do cotidiano. Ademais, é importante também direcionar um olhar investigativo do domínio do professor em relação ao referido conteúdo, uma vez que a maioria dos estudos presentes na literatura que tratam desse tema, foca na aprendizagem do aluno.

2.4 Ensino Remoto

O início da pandemia fez pesquisadores e educadores voltarem os olhos para o ensino remoto e as tecnologias na educação. Foi necessário repensar o ensino e os meios para que a escola chegasse aos alunos. Em razão disso, foi preciso recorrer às diversas ferramentas tecnológicas disponíveis, tais como: atividades *on-line*, plataformas digitais, aulas gravadas, mídias sociais, aulas síncronas, *softwares* educativos, entre outros.

Assim sendo, torna-se essencial refletir e esclarecer a educação mediada pelo ensino remoto. De acordo com Moreira e Schlemmer (2020): “O Ensino Remoto ou Aula Remota se configura então, como uma modalidade de ensino ou aula que pressupõe o distanciamento geográfico de professores e estudantes” (p. 8), ocorrendo de modo virtual e síncrono, com foco centrado nas informações e no modo como elas são transmitidas.

Diante desses acontecimentos, o professor teve que estabelecer novas estratégias de ensino, utilizar recursos digitais, mobilizar novos conhecimentos; enfim, buscar ferramentas que possibilitem estabelecer uma interação com o estudante, na tentativa de minimizar os impactos negativos que essa modalidade pode causar na aprendizagem. No entanto, ainda há muitos obstáculos para que o ensino remoto consiga atingir todo o público-alvo necessário. Para Sousa e Alves (2021), existem dificuldades que precisam ser sanadas, tais como: muitos alunos não têm acesso à internet, computadores e celulares, impossibilitando participar das aulas remotas; os professores foram sobrecarregados no planejamento e execução de aulas nessa modalidade, pois tiveram que destinar horas de pesquisa na busca de informações e metodologias para serem aplicadas em suas aulas e, ainda, arcaram com todas as despesas que esse sistema exige: internet, computador, celular,

energia, entre outros, causando uma sobrecarga de trabalho que, conseqüentemente, trará danos físicos e psicológicos na vida do educador.

Diante do cenário da pandemia, o ensino de matemática, assim como os outros, necessitou de grandes transformações. Para o planejamento e execução das aulas remotas foi necessário o uso de recursos tecnológicos, possibilitando uma maior interação dos alunos com os conteúdos estudados. Nesse sentido, Gonçalves e Cunha (2021) enfatizam que o uso das mídias tecnológicas, enquanto mídia educativa, permitem que ela seja produzida e usada para ajudar a suavizar a Matemática e tornar seu estudo mais agradável e interessante. Para Sousa e Alves (2021) a compreensão desses ambientes e a correta aplicação de ferramentas tecnológicas pode ser um aliado valioso no ensino remoto, “deixando para trás a velha didática de memorização de fórmulas matemáticas” (p. 3) proporcionando, assim, o verdadeiro propósito docente que é intermediar o acesso do aluno ao conhecimento.

Em virtude do exposto, evidenciam-se algumas fragilidades na educação, mostrando a necessidade de mudanças, de modo que o estudante possa desempenhar seu papel enquanto protagonismo na apropriação do saber. Assim, procurou-se, nesse trabalho, relacionar a TSD ao ensino remoto, fazendo uso do aplicativo de mensagem de *WhatsApp* e do *software* GeoGebra, que pode ser acionado tanto no celular quanto no computador, haja visto que plataformas e aplicativos como esses podem favorecer a união da tecnologia com a Matemática ampliando o alcance de alunos e permitindo a personalização dos saberes.

No escopo seguinte, trazem-se os procedimentos metodológicos deste trabalho, almejando responder à questão desta pesquisa e alcançar o objetivo proposto.

3. Procedimentos Metodológicos

Esta é uma pesquisa de cunho qualitativa, fundamentada na Engenharia Didática (ED) com ênfase na Engenharia Didática de Formação (EDF), sendo essa última vista como uma extensão da primeira engenharia, na qual buscou-se analisar as percepções de docentes em formação inicial, acerca do uso de um recurso didático no contexto do ensino do conteúdo de volume. Portanto, a metodologia da EDF segue o roteiro da ED que foi alicerçada em suas quatro fases, para estruturar a aplicação desta investigação.

3.1 Análise preliminar

Na primeira etapa da ED, análises preliminares, com o intuito de verificar, na literatura, como o objeto matemático dessa investigação é tratado no processo de formação docente, elencaram-se autores como Douady e Perrin-Glorian (1989), Costa et al. (2009), Figueiredo et al. (2014), Awila (2017), entre outros. Todos esses estudos recomendam a necessidade da apropriação dos conceitos de grandezas geométricas e volume de sólidos, tanto na formação de professores quanto na aprendizagem dos alunos da educação básica.

Ainda na etapa das análises preliminares, procurou-se realizar, também, uma análise dos livros didáticos inscritos no PNLD e da matriz de referência do ENEM, com o intuito de verificar como eles abordam o volume de sólidos geométricos, com a intenção de avaliar os conhecimentos prévios dos discentes sobre o objeto matemático dessa investigação, como também o modo em que tal assunto é tratado na referida avaliação externa (ENEM). Desse modo, selecionaram-se 02 (dois) livros didáticos e 01 (uma) matriz de referência, conforme apresenta-se no Quadro 1.

Quadro 1. Livros selecionados para análise

Livro	Autores	Ano	Volume	Editora
Luiz Roberto Dante	Matemática: Contexto & Aplicações	2016	2 e 3	Ática
Gelson Iezzi; Osvaldo Dolce; David Degenszajn; Roberto Pérego; Nilze de Almeida.	Matemática: Ciências e Aplicações	2017	2	Saraiva
Matriz do ENEM	Brasil	2009	-	-

Nota. Elaborado pelos autores.

A escolha dos referidos livros ocorreu por serem obras adotadas por escolas do Ensino Médio, além de fazerem parte do acervo disponibilizado pelo PNLD. Os livros apresentam linguagens simples, com exercícios tradicionais, porém, procuram desenvolver a capacidade reflexiva, o trabalho cooperativo e

trazem como sugestões a utilização de ferramentas tecnológicas como calculadoras, *softwares* dinâmicos, planilhas eletrônicas, dentre outros.

No que tange à abordagem do conteúdo de Volume de Sólidos, verificou-se que tais exemplares apresentam o cálculo de área de figuras poligonais de forma clara e precisa, as fórmulas são deduzidas e muito bem explicadas. Geralmente, os professores seguem a sequência de distribuição dos conteúdos nos livros didáticos: teoria, demonstração e exercícios, supervalorizando fórmulas, ao invés de desenvolver as noções intuitivas de conceitos geométricos. No próximo tópico, faz-se uma análise mais detalhada sobre essas obras, enfatizando o ensino de Volumes.

3.1.1 Livro 1: Matemática: Contexto & Aplicações

Este livro didático faz parte do acervo proposto pelo PNLD para escolas públicas, sendo adotado por várias delas. Seu layout é dinâmico, com bom uso das cores, trazendo na abertura de seus capítulos a ilustração de objetos ou imagens rurais e urbanas, acompanhadas

de uma breve descrição associada ao conteúdo matemático da unidade, proporcionando ao discente a leitura, a análise e a reflexão do tema abordado em cada divisão. Convém ressaltar que o assunto de Corpos Redondos é tratado no volume 3 da coletânea; por esse motivo, realizou-se, também, uma análise desse exemplar.

Na Figura 3, tem-se uma abordagem sobre o Volume do Cone, em que se inicia o tópico fazendo um paralelo da Pirâmide e do Cone no plano horizontal, a partir do princípio de Cavalieri, onde é possível observar a relação entre os volumes do prisma e da pirâmide de mesma altura e mesma área da base, constatando que os dois objetos possuem volumes iguais. Dando prosseguimento, tem-se a dedução da fórmula para o cálculo do volume do Cone por meio do princípio de Cavalieri. Finalizando o capítulo, o livro traz um texto sobre a Geometria e conhecimento científico, mostrando a evolução do ser humano na busca por esses conhecimentos, desde os gregos até a Geometria que se estuda atualmente.

Figura 3. Volume do cone

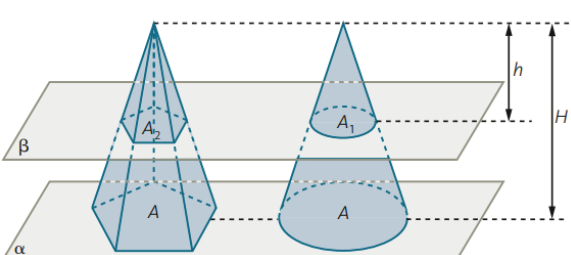
Volume do cone

Mais uma vez usaremos o princípio de Cavalieri.
 Consideramos um cone de altura H e base de área A contida em um plano horizontal α .
 Também consideramos uma pirâmide de altura H e base de área A contida em α .
 Se um plano horizontal β com distância h dos vértices secciona os dois sólidos, determinando regiões planas de áreas A_1 e A_2 , temos:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{h^2}{H^2} \text{ e } \frac{A_2}{A} = \frac{h^2}{H^2} \Rightarrow \frac{A_2}{A} = \frac{A_1}{A} \Rightarrow A_1 = A_2$$

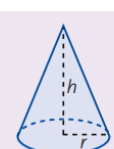
Pelo princípio de Cavalieri podemos afirmar que o cone e a pirâmide iniciais têm o mesmo volume. Como já sabemos o volume da pirâmide $\left(V = \frac{AH}{3} \right)$, o volume do cone também é o mesmo.

Então, para um cone circular de raio r e altura h , podemos dizer que:



$$V_{\text{cone}} = \frac{\text{área da base} \cdot \text{altura}}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} A_b h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$


Nota. Dante (2016, p. 80).

No que concerne ao aspecto didático-metodológico, mantém-se a sequência: demonstrações – exercícios resolvidos – exercícios de fixação, das mais simples até as complexas, com poucas questões contextualizadas, exceto quando se trata daqueles exercícios referentes ao ENEM. As demonstrações dos conceitos são detalhadas, trazendo uma contextualização sobre cada tópico e apresentando a dedução da fórmula.

Referente ao volume 2, dessa coletânea, a abordagem didática segue a mesma sequência descrita no escopo anterior. No entanto, ao final do capítulo de Poliedros e Prismas há uma seção intitulada “Pensando no ENEM”, com exercícios sobre o tema estudado na unidade. Para finalizar, o livro traz exercícios complementares, com questões de vestibulares tradicionais e do Exame Nacional do Ensino Médio.

Convém salientar que, apesar do autor declarar, em nota de edição, que a coleção traz questões contextualizadas, estas não aparecem em toda a extensão do livro. Tanto no livro 2 quanto no 3, apareceram em alguns casos e, dentre elas, as mais utilizadas são relacionadas ao ENEM.

Observou-se que, nos exemplares, não há sugestões metodológicas para que o professor utilize recursos tecnológicos no ensino de Geometria Espacial. Diante do exposto, apresenta-se o GeoGebra como ferramenta de auxílio ao docente para planejar, elaborar e executar o ensino de Geometria Espacial, no caso específico dessa investigação do conteúdo de Volume de Sólidos, visando apresentar uma proposta que possibilite ao aluno manusear, modificar, construir, visualizar e verificar propriedades e elementos dos sólidos, dentro de um ambiente de geometria dinâmica.

3.1.2 Livro 2: Matemática ciência e aplicações

Este é outro livro que faz parte da proposta presente no PNLD para o ensino médio das Escolas Públicas no triênio 2018-2020. Seu layout é dinâmico e de fácil interpretação. Sempre que possível, o início do capítulo é introduzido por situações do cotidiano, intercalando com a história da Matemática e, dessa forma, situando o aluno no processo de resolução de problemas, enfrentados pelo homem, ao longo do tempo. Na Figura 4, tem-se um recorte sobre como o livro trabalha tema do Volume da Esfera, demonstrando, detalhadamente, a dedução da fórmula para seu cálculo.

Figura 4. Volume da esfera – abordagem geométrica

Volume da esfera

O volume V de uma esfera de raio r é dado por: $V = \frac{4\pi r^3}{3}$

Demonstração:
 Vamos tomar um cilindro equilátero, cujo raio da base mede r e a altura mede $2r$.
 Seja V o ponto médio do segmento MN , contido no eixo do cilindro. Desse cilindro retiramos dois cones cujas bases coincidem com as bases do cilindro. Esses cones têm como vértice comum o ponto V , e a medida de suas alturas é r , como mostra a sequência de figuras abaixo. O sólido geométrico obtido será indicado por G .

Considere agora uma esfera de raio r e o sólido G obtido anteriormente. Imagine que essa esfera seja tangente a um plano α e que o cilindro original descrito tenha uma das bases contida em α .

figura A – esfera figura B – sólido G figura C

Quando um plano β , paralelo a α , intersecta a esfera a uma distância d de seu centro, ele determina nela um círculo de raio s cuja área é:

$$\pi s^2 = \pi \cdot (r^2 - d^2) \quad \text{① (Veja a figura A.)}$$

O plano β , naturalmente, também intersecta o sólido G , a uma distância d de V , determinando, como seção, uma coroa circular. Essa coroa circular é limitada por duas circunferências: uma de raio r e a outra de raio d , com $r > d$, cuja área é dada por:

$$\pi \cdot (r^2 - d^2) \quad \text{② (Observe nas figuras B e C que o triângulo VAB é isósceles e, portanto, AB = d.)}$$

Por ① e ②, concluímos que as áreas das seções na esfera e no sólido G são iguais. Logo, pelo princípio de Cavalieri, a esfera e o sólido G têm o mesmo volume.

O volume do sólido G pode ser calculado por:

$$V_G = V_{\text{cilindro}} - 2 \cdot V_{\text{cone}} = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r \Rightarrow V_G = 2\pi r^3 - \frac{2}{3} \pi r^3 \Rightarrow V_G = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Segue, daí, que o volume da esfera também é dado por: $V_{\text{esfera}} = \frac{4\pi r^3}{3}$

Nota. Iezzi et al. (2016, pp. 215-216).

Na imagem da Figura 4, é possível observar que os autores tiveram o cuidado de mostrar a dedução da fórmula para o cálculo do Volume da Esfera de modo detalhado, com ilustrações, e explicar o passo a passo do raciocínio geométrico até chegar à dedução algébrica da fórmula matemática, finalizando com um exemplo em que é possível empregar a fórmula apresentada para solucionar o problema. Convém ressaltar que, mesmo a explicação sendo bem rica no detalhamento, torna-se difícil para o aluno visualizar e entender os conceitos em imagens estáticas. Sendo assim, apresenta-se a sugestão de trabalhar esse assunto através do software GeoGebra, pois o uso dessa ferramenta tecnológica possibilita ao aluno visualizar e movimentar o objeto em terceira dimensão, facilitando a compreensão do conteúdo. A abordagem, didático-metodológica, acompanha a sequência tradicional: demonstrações – exercícios

resolvidos – exercícios propostos, em que as atividades são distribuídas de acordo com o nível, indo das mais simples até as mais complexas. Um ponto bastante positivo, nesse livro, é que ele traz uma quantidade bem expressiva de questões contextualizadas, aproximando o tema com a realidade e oferecendo, ao discente, uma variedade de situações-problema que aproximam a matemática da escola com o cotidiano. O exemplar ainda apresenta a seção “Troque ideias”, com atividades para serem realizadas em grupo e, a seção “Aplicações”, com textos que empregam o conhecimento matemático em outros campos, por exemplo, estabelecendo uma ligação entre a Matemática e a Física ou a Matemática e a Economia, possibilitando o aprofundamento de alguns conceitos e a construção de outros.

Observou-se nessa obra que, em alguns momentos, os autores apresentam sugestões aos professores para o uso de recursos tecnológicos, como por exemplo, no capítulo sobre Trigonometria na Circunferência em que se tem o uso do GeoGebra para construção dos gráficos das razões trigonométricas; no entanto, no que tange ao capítulo de Geometria Espacial, não há nenhuma orientação ao uso de ferramentas tecnológicas. Partindo dessa premissa, enfatiza-se o uso do *software* GeoGebra para o ensino do conceito de Volume, tanto para a introdução do conteúdo quanto para auxiliar os alunos na resolução do exercício, em um ambiente de geometria dinâmica.

3.1.3 Matriz de referência do ENEM

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é um programa do governo federal, criado pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC), com o objetivo de avaliar o desempenho do aluno ao término do Ensino Médio, além de propiciar a oportunidade de ingressar no ensino superior, haja vista que seus resultados são usados como critério de seleção por várias universidades públicas e privadas. Tal avaliação possibilita ainda direcionar as políticas públicas brasileiras para o desenvolvimento da educação básica.

A matriz de referência do ENEM para a disciplina de Matemática reúne um conjunto de competências e habilidades que o estudante deve possuir sobre um determinado conteúdo, em cada série do Ensino Médio, que serão avaliados através de um teste padronizado.

Para realização da prova do ENEM, o conteúdo de Volume de sólidos aparece interligado ao tópico de Geometria Espacial. Desse modo, a matriz orienta que os estudantes saibam interpretar a localização de

objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional, consigam identificar características de figuras planas e espaciais, resolvam situações-problema do cotidiano que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.

A Geometria Espacial, presente nessa matriz, envolve problemas contextualizados com situações da realidade, aparecendo em questões que vão desde o reconhecimento de sólidos geométricos até suas principais propriedades e elementos. São recorrentes ainda em problemas envolvendo área total e volume de sólidos geométricos e suas planificações. Assim, nesse estudo, abordou-se o conceito de Volume de Cone e Esfera em uma situação didática do ENEM.

3.2 Análise a priori

Após o processo de análise textual dos livros didáticos e da matriz de referência, selecionou-se um problema do ENEM, envolvendo o conteúdo de Volume do Cone e da Esfera, que foi estruturado nas quatro fases da TSD e construído no GeoGebra por tratar-se de um *software* matemático que permite ao aprendiz movimentar figuras e objetos, realizando simulações que possibilitam melhorar a compreensão dos conteúdos matemáticos implícitos no enunciado da questão, além de propiciar ao professor um recurso tecnológico que pode auxiliá-lo no planejamento e na execução de práticas docentes.

Nessa fase, escolhem-se as variáveis globais e locais, já apresentadas nessa investigação. Utilizaram-se as variáveis locais por tratar-se de um público-alvo pequeno e não ter ocorrido comparação de resultados com outros dados externos. A questão proposta foi selecionada da prova do ENEM do ano de 2010 e será trabalhada com mais afinco nos resultados e discussão.

3.3 Experimentação

A aplicação da situação didática foi realizada na terceira etapa da ED, a experimentação, com um grupo de 10 (dez) alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú, localizada no município de Sobral, estado do Ceará, Brasil. Em virtude da pandemia da Covid-19, o processo ocorreu em um encontro virtual, por meio da ferramenta *Google Meet*, com duração de 120 minutos. Os futuros professores receberam a questão do ENEM, através do aplicativo de mensagem do *WhatsApp*, em pdf, além do arquivo da construção do problema no GeoGebra. Achou-se por bem, disponibilizar esses materiais para o grupo, também, por meio de links e *QR-Code*, na tentativa de garantir que todos

os participantes tivessem acesso aos recursos e dispositivos necessários para o desenvolvimento do experimento.

Os futuros professores foram orientados a formarem 03 (três) equipes, distribuídas do seguinte modo: 02 (dois) grupos com 03 (três) membros e 01 (um), com 04 (quatro) participantes. No entanto, para este trabalho limitou-se a apresentar os resultados de apenas 01 equipe, devido a grande quantidade de dados analisados na investigação, e, também, a limitações de caracteres permitidos para o manuscrito. Os grupos criaram subgrupos, no *WhatsApp*, para promover as trocas de ideias e a construção de estratégias de resolução da situação-problema do ENEM. Torna-se importante ressaltar que o cancelamento de aulas presenciais, imposta pela pandemia, fez com que as fases da TSD fossem adaptadas à modalidade de ensino virtual, tencionando garantir a realização de todas as suas fases.

Para garantir que todos os dados fossem coletados, os licenciandos foram orientados a fazerem *screenshot* das conversas realizadas em seus respectivos grupos de *WhatsApp*, fotos e/ou gravações de vídeo das resoluções no caderno, da manipulação do objeto no GeoGebra e de quaisquer outras anotações realizadas pelos participantes. Cada equipe deveria escolher um representante para expor as resoluções por eles formuladas. Ao final do encontro, todos os registros deveriam ser enviados aos pesquisadores para a devida análise e validação. Esse processo assinalou nosso contrato didático.

Na última etapa, análise *a posteriori* e validação interna, característica da ED, ocorreu o estudo dos dados coletados, resultado da confrontação com as hipóteses previamente estabelecidas na análise *a priori*. A seguir, apresenta-se a situação didática aplicada nessa investigação e os resultados da análise realizada na última etapa da Engenharia Didática.

4. Resultados e discussão

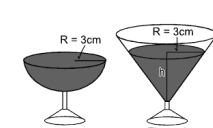
Norteadas pela pergunta central dessa pesquisa, tencionou-se que esse questionamento fosse respondido na etapa da experimentação, na qual a situação seria aplicada e, posteriormente, validada na análise *a posteriori*, última etapa da Engenharia Didática. Concretizaram-se as variáveis microdidáticas pela construção da situação didática de uma questão selecionada da prova do ENEM, modelada pelo GeoGebra, com o propósito de promover aos futuros professores, um mecanismo de auxílio para estruturar um modelo de resolução do problema proposto. Convém ressaltar que esses resultados são originados

de uma pesquisa de mestrado acerca de problemas do Exame Nacional do Ensino Médio, sobre conceito de volume de sólidos para o ensino de matemática e a formação de professores.

A questão foi retirada da prova do ENEM, ocorrida durante o ano de 2010, referente aos volumes da esfera e de um cilindro reto (Quadro 2).

Quadro 2. Questão de Volume do Enem caderno azul

Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.



Considere:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{e} \quad V_{\text{cone}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

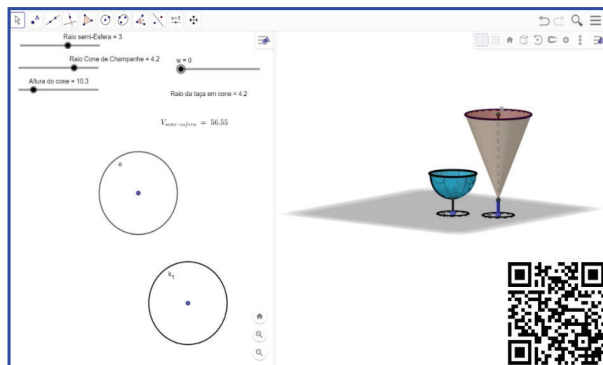
(A) 1,33.
(B) 6,00.
(C) 12,00.
(D) 56,52.
(E) 113,04.

Nota. Prova do Enem (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2010).

A aplicação da situação didática foi realizada na plataforma *Google Meet*, em que o problema e a construção no GeoGebra foram disponibilizados pelos pesquisadores por meio de *link* e *QR-Code*. Para garantir que todos os participantes tivessem acesso ao material, deduziu-se, por ser mais viável, dispor o pdf da questão do ENEM e o arquivo ggb da construção no *software*, por meio do aplicativo de *WhatsApp*.

Assim, os pesquisadores dispuseram um tempo para que os licenciandos mobilizassem seus conhecimentos matemáticos extraídos da leitura do problema. Os participantes, também, foram orientados a utilizarem o GeoGebra (Figura 5) para estabelecer estratégias de solução. Ademais, para que o leitor possa acompanhar a movimentação dinâmica da questão, disponibiliza-se na imagem o *QR Code* de acesso a construção no *software* GeoGebra.

Figura 5. Visualização do problema do ENEM no GeoGebra

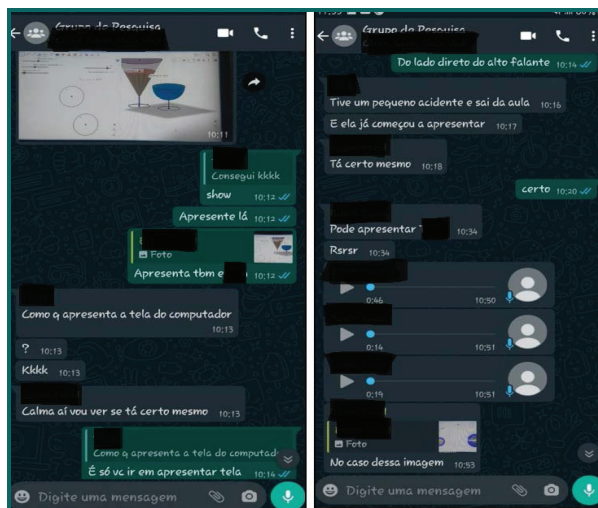


Nota. Elaborado pelo(s) autor(es) (2019).

Desse modo, os participantes realizaram a leitura do problema, acessaram o arquivo da construção no GeoGebra e iniciaram as primeiras conjecturas para estruturarem um esboço de resolução da situação proposta, caracterizando, portanto, a primeira fase da TSD, a dialética da ação. De acordo com Alves et al. (2020), nesse momento, os alunos, frente a uma situação didática, realizam procedimentos, planejam e formulam hipóteses, na tentativa de descobrir elementos e propriedades matemáticas que estão presentes no enunciado do problema. É importante salientar que nessa primeira fase da TSD não houve nenhum prejuízo com relação à aplicação presencial, haja vista que os participantes conseguiram ter acesso a todo o material necessário para realizar a atividade.

Após o primeiro contato com a situação-problema, os futuros professores iniciaram a troca de ideias no grupo de *WhatsApp* (Figura 6), tentando estabelecer diretrizes capazes de solucionar a questão, conforme pressupostos da análise *a priori*.

Figura 6. Dialética da formulação via *WhatsApp* do grupo 1



Nota. Dados da pesquisa (2020).

Diante do exposto, traz-se a transcrição das mensagens de áudio, trocadas pelo grupo, no momento da formulação. Para garantir o anonimato dos participantes, eles foram nomeados de P1, P2, P3 e P4.

P3: Como no caso, eu tenho que ter o mesmo volume, eu igualei o volume da esfera com o volume do cone.

P4: Eu fiz no GeoGebra, movimente aqui o raio dos controles deslizantes e coloquei o raio da semiesfera 3, como ele fala na questão. A do champanhe 3 e o raio da taça em cone 3. Aí, ele me deu o volume da semiesfera.

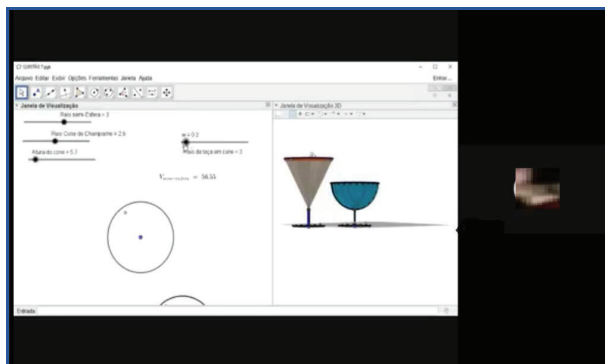
P1: Fiz as movimentações no GeoGebra, depois fiz o cálculo no caderno para comprovar. Achei o mesmo resultado.

P2: Fiz o cálculo no caderno, achei 6 para a altura.

Assim, os membros do grupo realizaram as trocas de informações via mensagem no celular e formularam seus modelos matemáticos de resolução. É conveniente ressaltar que os futuros docentes revelaram que usaram a construção no *software* GeoGebra para mobilizar os conhecimentos epistêmicos e pragmáticos que propiciassem a criação de um modelo algébrico de solução para a situação apresentada, conforme se evidencia na imagem dos diálogos do grupo exibida na Figura 7. Com relação à modalidade presencial, percebeu-se nessa segunda fase da TSD, que na aplicação remota não foi possível estabelecer um diálogo entre os participantes de modo a promover uma maior interação entre eles, pois para os pesquisadores, o contato visual no momento da manipulação no GeoGebra e da formulação do cálculo algébrico pode ser considerado um fator importante no processo de construção do conhecimento.

Em seguida, realizou-se a etapa da validação, na qual um representante do grupo expôs a todos os participantes, as estratégias que utilizou para solucionar o problema. Portanto, exibe-se a dialética de validação de um dos grupos, Figura 8.

Figura 7. Dialética da validação via Google Meet do grupo 1



Nota. Dados da pesquisa (2020).

Mediante o relato, captado no ambiente virtual, no momento da apresentação, percebe-se o uso do GeoGebra para estabelecer um modelo de resolução.

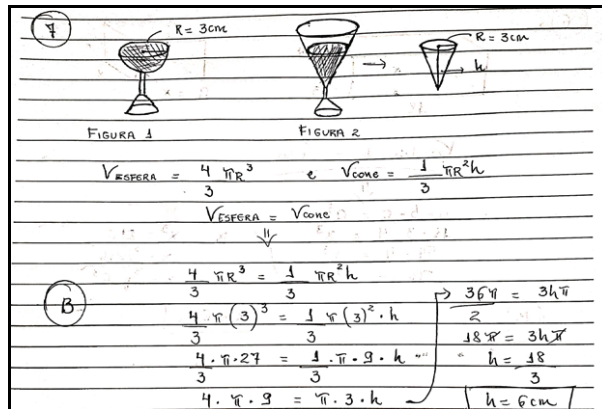
P4: Na questão ele fala que o raio da taça da figura 1 e da figura 2 são iguais. Então, eu movimente aqui, o raio dos controles deslizantes e coloquei o raio da semiesfera 3, como ele fala na questão. A da champanhe 3 e o raio da taça em cone 3 também. Ai aqui ele me deu o volume da semiesfera que é 56,55. Então eu fui mexendo aqui no controle deslizante da altura do cone, e quando eu cheguei na altura 6, foi mostrado o mesmo volume, igual ao volume da semiesfera. Portanto, a altura do champanhe é 6 cm.

Pelo exposto, verifica-se que os participantes do grupo manipularam a construção no GeoGebra para solucionar a questão e, posteriormente, realizaram os cálculos no ambiente lápis e papel para comprovar e instituir um modelo de escrita matemática para situação didática, de acordo com o que fora previsto na análise *a priori* (Figura 8). Analisando a apresentação desses futuros professores, foi possível perceber que eles já conseguem desenvolver certas habilidades na exposição da resolução, demonstrando preocupação em relacionar os conceitos implícitos no enunciado do problema com o modelo disponibilizado no computador, manifestando ações que podem ser usadas em sala de aula, contribuindo assim com suas formações profissionais, seguindo os pressupostos da EDF.

No entanto, é importante salientar, que mesmo tendo a exposição das resoluções pelos participantes, essa etapa perde um pouco da criticidade e do poder empírico que o debate presencial promove. A tela do computador distancia os sujeitos envolvidos, a dinâmica da discussão perde o vínculo entre os personagens e muitas vezes isso pode deixar dúvidas

do conteúdo no aluno, que acaba por se perder no processo, prejudicando seu desenvolvimento na construção dos saberes.

Figura 8. Modelização algébrica da solução do problema pelo grupo 1



Nota. Dados da pesquisa (2020).

Observa-se que, no modelo matemático apresentado pelo grupo, o primeiro passo foi igualar o volume das duas taças, pela expressão $V_1 = V_2$, de acordo com que foi previsto na análise *a priori*. Em seguida, aplicaram a fórmula do volume da esfera e do volume do cone na expressão, efetivando do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \pi R^3 &= \frac{1}{3} \pi R^2 h \\ \frac{1}{4} \pi (3)^3 &= \frac{1}{3} \pi (3)^2 h \\ \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 27 &= \frac{1}{3} \pi \cdot 9 \cdot h \\ 4 \cdot \pi \cdot 9 &= \pi \cdot 3 \cdot h \\ \frac{36}{2} \pi &= 3 \cdot h \cdot \pi \\ 18 \cancel{\pi} &= 3 \cdot h \cdot \cancel{\pi} \\ h &= \frac{18}{3} \\ h &= 6 \end{aligned}$$

Assim, o grupo concluiu que a taça em cone deveria ser cheia até a altura de 6 cm.

Vivenciadas as situações de ação, formulação e validação (situação adidática), a pesquisadora reassumiu as ações do encontro, fazendo um levantamento das estratégias de resolução expostas pelos participantes, esclarecendo as dúvidas e promovendo um novo saber. É importante ressaltar que os investigadores, também, exibiram a solução

por meio da manipulação no GeoGebra, confrontando o modelo matemático com o modelo gerado no computador, evidenciando a importância da mediação docente no momento da institucionalização, antevendo uma situação de aula ao futuro professor, enriquecendo, assim, o ambiente de formação. Assim como na etapa anterior, a falta de público presencial torna o debate menos intenso e a mediação do conhecimento perde um pouco de sua essência, uma vez que não se tem um efetivo diálogo entre os sujeitos envolvidos.

No que concerne ao uso do GeoGebra, os licenciandos afirmaram que ele foi um importante recurso tanto para formular a resolução quanto para comprovação da resposta, pois possibilita a visualização de propriedades e elementos matemáticos que permitem ajustar e apresentar um padrão de solução que promove uma resolução mais lógica e dedutiva, sendo este o ponto central dessa investigação.

Com relação à TSD, verificou-se que mesmo tendo alguns obstáculos nas vivências de suas etapas, uma vez que essa teoria fora pensada para ser trabalhada em aulas presenciais, foi possível visualizar e identificar todas as suas fases nas ações desenvolvidas pelos pesquisadores e pelos futuros professores, na aplicação remota, que aliada aos recursos tecnológicos educativos, possibilitou uma maior participação do aluno na apropriação de saberes matemáticos, consubstanciando-se, dessa maneira, um modelo didático promissor no processo de ensino e aprendizagem, tanto da educação básica quanto na formação docente.

5. Conclusão

Este trabalho teve como objetivo apresentar uma proposta didática, estruturada na TSD, fundamentada na EDF e modelado pelo *software* GeoGebra, com o intuito de oferecer ao professor, um suporte que o auxilie no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de Volume de Sólidos, ao mesmo tempo que incentive a autonomia do aluno na apropriação do conhecimento matemático.

Segundo as experiências dos pesquisadores, como professores da educação básica e superior, os alunos apresentam problemas de aprendizagem dos conteúdos envolvidos nessa pesquisa. Em relação à revisão bibliográfica, observaram-se duas características no ensino de Geometria Espacial: as dificuldades de compreensão de conceitos matemáticos que requerem um maior poder de abstração, especialmente aqueles relacionados ao cálculo de volume de objetos em terceira dimensão

e a falta de situações práticas relacionadas ao campo da atividade profissional do futuro professor nas aulas de Matemática.

O uso dos recursos tecnológicos facilitou a ocorrência das concepções perceptivas, discursivas e operatórias do volume do sólido geométrico representado no GeoGebra na resolução da situação, isto é, os participantes desenvolveram a visualização do objeto nesse *software* em perspectiva 3D para comparar o volume do recipiente, e, a partir de então, identificar a altura do líquido, apoiando-se nela para compreender os conceitos matemáticos implícitos no enunciado do problema. Assim, a utilização desse recurso, mostrou um meio de visualizar objetos de formas diferentes, com volumes iguais, facilitando a compreensão do conceito do volume do cone e da esfera.

Ademais, é importante destacar que os recursos tecnológicos utilizados foram fundamentais no desenvolvimento da pesquisa, como também para conceber um recurso didático-pedagógico que permitisse ao aprendiz um maior protagonismo na construção de novos saberes, haja vista a dificuldade de encontrar metodologias nos livros didáticos analisados, com sugestão para utilização de tecnologias para a exploração do conteúdo abordado, mostrando a importância da utilização do GeoGebra no ensino de Volume de Sólidos, podendo facilmente se estender a outros conteúdos matemáticos, em aulas remotas ou presenciais.

No que diz respeito à aplicação remota da pesquisa, é imperioso destacar que ela apresentou outro cenário aos professores em formação inicial, introduzindo em seus currículos um modelo de aula totalmente *on-line*, proporcionando um caráter de ineditismo nas vivências de um estudante de Licenciatura em Matemática. Além disso, este trabalho apresenta uma prática didática que pode servir de modelo para aulas em sistemas à distância, que promova um ensino matemático mais efetivo e fortaleça a autonomia do aprendiz.

Ressalta-se assim, a relevância de associar a TSD com o aporte do GeoGebra para a construção de situações didáticas que possibilitem ao docente desenvolver os conceitos de Geometria Espacial pela utilização de várias linguagens, como verbal, visual, geométrica e textual. Além de permitir a antecipação dos possíveis comportamentos do aluno, mediante uma situação de sala de aula, diminuindo, assim, as dificuldades cognitivas, epistemológicas e didáticas referentes ao tema abordado nesse estudo.

Para conduzir essa investigação, buscou-se uma metodologia de pesquisa que auxiliasse os investigadores a compreender tanto os fenômenos do processo de ensino e aprendizagem de certo saber matemático, e no planejamento das ações e transposição didática do futuro professor, quanto para estudar os resultados após a exploração dos dados coletados. Assim, desenvolveram-se as quatro fases da ED, assumindo as etapas clássicas em caráter de complementariedade com a EDF que estuda o papel sistemático da atividade docente.

Reitera-se a importância da metodologia empregada para coleta e análise dos dados nesse processo investigativo. Tem-se a compreensão que a E.D juntamente com a E.D.F possibilitam ao docente elaborar um plano de ensino que conduza a formação, construção, observação e análise de situações didáticas que podem subsidiar as práticas de sala de aula.

Portando, acredita-se que por meio da situação proposta neste trabalho, que os futuros professores apropriaram-se de um recurso didáticos-pedagógico que propicia o planejamento e a execução de práticas docentes capazes de induzir os alunos a considerarem a movimentação e visualização dos sólidos geométricos como alternativa para compreender, estruturar e executar noções intuitivas do conceito de Volume e, assim, despertar seus conhecimentos epistêmicos e pragmáticos para demonstrar os teoremas necessários para solucionar a situação-problema proposta. Nesse sentido, a aceitação e participação dos licenciandos, durante o encontro, e a realização da situação didática possibilitaram concluir que o objetivo da investigação foi atingido.

Outrossim, convém ressaltar que alguns entraves surgiram durante a etapa da experimentação, devido à natureza remota da aplicação. Alguns participantes relataram oscilação no sinal da *internet* durante o experimento, dificultando a comunicação com o pesquisador e com os demais colegas para realização da segunda etapa da TSD, a formulação. Outro fato a considerar é que, nessa modalidade, a etapa da formulação perde um pouco de sua essência, uma vez que a forma virtual inviabiliza uma maior interação entre os participantes, além de dificultar que o pesquisador acompanhe, de modo mais efetivo, as ações dos estudantes para estabelecer estratégias de resolução, sendo que esse olhar pode ser considerado um fator importante para os resultados da investigação, havendo necessidade, talvez, de outros equipamentos e/ou aplicativos e, uma maior equipe para coleta de dados.

Conclui-se assim, que esse estudo traz contribuições relevantes à educação matemática e à formação de professores, estimulando a reflexão das práticas docentes e fortalecendo o uso de tecnologias digitais no processo formativo e na educação básica, de modo a promover mudanças no comportamento dos alunos, como sujeitos ativos na apropriação de conhecimentos matemáticos.

Referências

- Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. UFPR. <https://doi.org/10.1590/S0101-32622008000100008>
- Almouloud, S. A. (2011). PCMA debate Engenharia Didática de Segunda Geração. [Entrevista concedida a] Ana Paula Machado & Laressa Santos. *Jornal da UEM, Maringá*, (102). <http://www.jornal.uem.br/2011/index.php/edicoes-2011/88-jornal-102-outubro-2011/781-pcm-debate-engenharia-didatica-de-segunda-geracao>
- Almouloud, S. A., e Silva, M. J. F. Da. (2012). Engenharia Didática: evolução e diversidade. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 7(2), 22-52. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p22>
- Alves, F. R. V. (2018). Engenharia Didática de Formação (EDF): sobre o ensino dos números (Generalizado) de Catalan (NGG). *Educação Matemática Pesquisa*, 20(2), 47-83. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i2p47-83>
- Alves, F. R. V. (2019). Visulng the Olýmpic Didactical Situation (ODS): Teaching Mathematics with support of the GeoGebra software. *Acta Didactica Napocencia*, 12(2), 97-116. <https://doi.org/10.24193/adn.12.2.8>
- Alves, F. R. V., e Catarino, P. M. M. C. (2017). Engenharia Didática de Formação (EDF): repercussões para a formação do professor de matemática no Brasil. *Educação Matemática em Revista - RS*, 18(2), 121-137.
- Alves, F. R. V., Sousa, R. C. De, e Fontenele, F. C. F. (2020). Didactical Engineering of the Second Generation: a proposal of the design and a teaching resource with the support of the GeoGebra software in Brazil. *Acta Didactica Napocensia*, 13(2), 142-156. <https://doi.org/10.24193/adn.13.2.10>
- Artigue, M. (1989). Ingenierie Didáctica. *Institute des Recherche des Mathématiques Rennes*, (S6), 124-128.
- Artigue, M. (1995). Ingenierie Didáctica. Em M. Artigue, R. Douady e L. Moreno (Eds.), *Ingenieria Didáctica em Educación Matemática: um esquema para la investigación y la innovación em la enseñanza y las matemáticas* (pp. 36-61). Grupo Editorial Iberoamérica.
- Awila, H. F. De. (2017). *Uma análise da contribuição do Geogebra como recurso interativo para o estudo de área e volumes* [Dissertação de Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria]. Repositório Digital da UFSM.
- Ministério da Educação do Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Educação é a base. Autor.
- Brousseau, G. (1965). *Les Mathématiques du Cours Préparatoire, Fascicule 1*. Dunod. <https://guy-brousseau.com/3144/les-mathematiques-du-cour-preparatoire-1965>.
- Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématique*. (Thèse doctorat, Université Bourdex I). Thèses en ligne (TEL).
- Camilo, A. M. S., Alves, F. R. V., e Fontenele, F. C. F. (2020). A Engenharia Didática articulada à Teoria das Situações Didáticas para o ensino da Geometria Espacial. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16(59), 64-82. <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/127>.
- Chevallard, Y. (1982). *Sur l'ingenierie didactique*. Irem: d'Aix Marseille.
- Costa, A. C., Bermejo, A. P. B., e Moraes, M. S. F. (2009). Análise do Ensino de Geometria. *X Encontro Gaúcho de Educação Matemática*, 1-10.
- Dante, L. R. (2016). *Matemática: Contexto & Aplicações*. Ática.
- Douady, R., e Perrin-Glorian, M. J. (1989). Um processo d'apprentissage du concept d'airesurface plane. *Educational Studies in Mathematics*, 20(4), 387-424. <https://doi.org/10.1007/BF00315608>
- Figueiredo, A. P. N. B., Bellemain, P. M. B., e Teles, R. A. M. (2014). Grandeza Volume: um estudo exploratório sobre como alunos do ensino médio lidam com situações de comparação. *Bolema*, 28(50), 1172-1192. <https://doi.org/10.36397/emteia.v11i2.247850>
- Gonçalves, F. D. S. L., e Cunha, D. S. (2021). O Ensino Remoto Emergencial e o Ensino da Matemática: percepção dos estudantes e professores de matemática durante a pandemia do Novo coronavírus na cidade de Desterro-PB. *EAD em Foco – Revista Científica em Educação a Distância*, 11(1), 1-13. <https://doi.org/10.18264/eadf.v11i1.1505>.
- Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R., e Almeida, N. (2016). *Matemática: ciências e aplicações*. Saraiva.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. (2010). *Provas do ENEM*. Ministério da Educação do Brasil. <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>

Moreira, J. A., e Schlemmer, E. (2020). Por um novo conceito e paradigma de educação digital online. *Revista UFG*, 20, 1-35. <https://doi.org/10.5216/revufg.v20.63438>

Pavanello, M. R. (2001). Geometria: Atuação de professores e aprendizagem nas séries iniciais. Em *anais do I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática, Curitiba*, (pp. 172-183).

Perrin-Glorian, M. J. (2009). L'ingénierie didactique a l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formação des enseignants. Em C. Margolinas et al. (Org.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques, XV^e École d'Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme)*. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (pp. 57-78). La Pensée Sauvage.

Sousa, J. R., Moll, V. F., Gusmão, T. C. R. S., e Roseira, N. A. F. (2021). Contribuições do (Re)Desenho de tarefas para aproximação da matemática com entorno social da escola. *Revista Práxis Educacional*, 15(33), 444-471. <https://doi.org/10.22481/praxisedu.v15i33.5299>.

Sousa, R. C., e Alves, F. R. V. (2021). Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação: um modelo para o ensino remoto de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 17(63), 1-21. <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/448>.

Tempier, F. (2013). *La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource* [Thèse doctoral, Université Paris-Diderot - Paris VII]. Thèses en ligne (TEL).

Vuelma, C. A., Garcia, V. C., e Trevisan, V. (2011). Ensino de áreas e volumes: articulação do mundo físico com os objetos geométricos e suas representações. Em V. C. V. Garcia., E. Z. Búrigo, M. V. A. Basso e M. A. Gravina (Eds.), *Reflexões e pesquisa na formação de professores de matemática* (pp. 197-228). Evangraf UFRGS.

VOLUMEN 14
N°3
DICIEMBRE 2022

R E
C H
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA I E M

