VOLÚMEN 14
N°2
AGOSTO 2022

RECHIEM

REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

sochiem

ÍNDICE

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

PROPUESTAS DIDÁCTICAS

sochiem

Sociedad Chilena de Educación Matemática
Revista Chilena de Educación Matemática
ISSN 2452-5448 Versión en línea
Chile

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i2.109

SOBRE LA NUEVA REFORMA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA: INVITACIÓN A UN DEBATE, 3

ON THE NEW REFORM OF MATHEMATICS EDUCATION: INVITATION TO DEBATE, 3

Arturo Mena Lorca
arturo.mena@pucv.cl
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso,
Valparaíso, Chile

RESUMEN

Chile ha avanzado en los diversos aspectos que atañen a la educación de su población, pero hay algunos indicadores de resultados preocupantes. Examinamos aquí nuestra educación matemática en relación con la reforma que experimenta la educación a lo largo del mundo, reforma que, si bien no se anuncia como tal, es fácilmente constatable, y tiene raíces y consecuencias a la vez profundas y determinantes. En Mena-Lorca (2022a, 2022b) hemos reseñado, a muy grandes rasgos, algunos aspectos del pasado y del presente de la educación de la matemática en nuestro país, y destacado la dificultad de alcanzar acuerdos indispensables debido a criterios que se construyen sin considerar en forma suficiente fenómenos de la mayor relevancia. Procuraremos ahora agregar la perspectiva que se obtiene de mirar al futuro: por una parte, lo que ya está comenzando a demandar la enseñanza de diversos aspectos del currículo escolar de matemáticas respondiendo a requerimientos sociales ineludibles, y, por otra, un marco explicativo general de largo aliento. Este último tendría la facultad de desvirtuar algunos nudos que nos mantienen constreñidos, según hemos señalado en Mena-Lorca (2022a, 2022b); sin embargo, se requiere de una acción concertada, proveniente de acuerdos alcanzados tras un debate nacional amplio y explícito.

PALABRAS CLAVE:
Tecnología digital, Pensamiento matemático, Sociedad 5.0, Eras antropológicas.

ABSTRACT

Chile has made progress in the various aspects that concern the education of its population, although there are some worrying indicators of results. Here, we examine our mathematics education concerning the reform that education is undergoing throughout the world. This reform, not announced as such but easily observable, has profound and determining roots and consequences. In Mena-Lorca (2022a, 2022b), we have outlined, in broad terms, some aspects of the past and present of mathematics education in our country. Also, we highlighted the difficulty of reaching essential agreements due to criteria that are constructed without sufficiently considering phenomena of the most significant relevance. Here, we will try to add a perspective obtained by looking to the future: On the one hand, what the teaching of various aspects of the school curriculum of mathematics demands in response to unavoidable social requirements, and, on the other, a long-term general explanatory framework. The latter would have the virtue of untying some knots that have us somewhat trapped, as shown in Mena-Lorca (2022a, 2022b); nevertheless, concerted action, coming from agreements reached after a broad and explicit national debate, is required.

KEYWORDS:
Digital technology, Mathematical thinking, Society 5.0, Anthropological eras.

Recibido: 28 de febrero de 2022 , Aceptado: 30 de mayo de 2022

1. Introducción

En las entregas anteriores de este escrito (Mena-Lorca, 2022a, 2022b), hemos reseñado elementos del pasado y del presente de nuestra realidad educacional, especialmente en matemáticas, como punto de partida para invitar a un debate suficientemente amplio y conocedor que nos permita enfrentar de mejor manera el complejo escenario que tenemos ante nosotros.

Tal invitación podría parecer extemporánea, toda vez que –como parte de un esfuerzo amplio y sostenido que ha promovido y realizado el Ministerio de Educación de Chile, MINEDUC, durante el siglo– recientemente ha culminado la comprensiva modificación curricular que tomó una decena de años. Sin embargo, creemos que es precisamente ese proceso llevado a cabo, unido al desarrollo académico que ha experimentado el país en educación matemática –manifiesto, por ejemplo, en el aumento de los postgrados en la especialidad bien establecidos, y del número de investigadores reconocidos, publicaciones y proyectos, y otros–, lo que nos permite encarar la problemática señalada[1], que no solo refiere al currículo, sino más bien a un ámbito mayor, que incluye la manera diferente en que podemos concebir la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

En esta parte del escrito, procuraremos mirar hacia el futuro, ampliando progresivamente nuestra perspectiva, para así vislumbrar en qué dirección se moverá el vector educacional en matemática, es decir, conjeturar hacia dónde deberíamos dirigir nuestros esfuerzos. Nuestra intención aquí no es, ni podría ser, dilucidar la compleja situación aludida, sino solo reunir algunos elementos de interés para fomentar la discusión.

2. Los nuevos elementos

2.1 Modelización

La modelización matemática ofrece una oportunidad para aprender matemáticas de la misma forma en que, en términos generales, se elabora la matemática; sin embargo, para promover el desarrollo de las competencias que se persigue con aquella, es necesario utilizar datos que los alumnos reconozcan como reales. Agregar STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics) los anima a comprender la naturaleza interdisciplinaria de las matemáticas. La modelización permite el trabajo incluso de estudiantes que no dominan las habilidades operativas, a menudo rezagados en las aulas. Además, modifica la costumbre de trabajar sobre problemas ficticios y ofrece la oportunidad de lograr soluciones reales (Borromeo Ferri et al., 2021).

Por otra parte, consideramos, como muchos, muy relevante el rol de la graficación en este ambiente. El tema es de suyo interesante, pues pone de relieve una tensión explícita con la forma de hacer matemática sin representaciones, que pareció sugerir el proceso de aritmetización del análisis del s. XIX (Dhombres, 1978, e. g.), y que se opondría a la necesidad de usarlas en la enseñanza y aprendizaje de la matemática debido a que sus objetos no son directamente accesibles a los sentidos (Duval, 1995). Se puede mostrar, sin embargo, cómo algunos resultados fueron obstruidos por la falta de representaciones, y otros, obviamente, favorecidos por ellas (Mena-Lorca et al., 2022).

En nuestra experiencia, una buena estrategia, al menos para el nivel universitario, es integrar tablets y teléfonos inteligentes, una plataforma de libre disposición que utilice un software de geometría dinámica y un sistema de cálculo simbólico, más aplicaciones gráficas de propia creación, manipulables vía variación de parámetros mediante sliders. Mientras trabaja, el estudiante tiene varias ventanas abiertas simultáneamente, y encomienda los cálculos gráficos, aritméticos y algebraicos a los softwares (Mena-Lorca et al., 2022).

2.2 Tecnología digital

2.2.1 Dificultad y esperanza

Es bien sabido que la destreza en cómputos matemáticos no parece hoy tan relevante para el ciudadano común, y que, en la práctica no educativa, en general se prefieran los cálculos hechos por máquinas electrónicas, más seguras y confiables.

Ahora bien, dado que, en almacenes, tiendas y otros lugares que atienden público, ya los dependientes no hacen cómputos –salvo, eventualmente, contar– el consabido argumento de que hay que aprender matemática para desempeñarse, por ejemplo, en los negocios, si sigue siendo cierto, no lo es precisamente por la destreza operatoria. Por otra parte, si no se dispone de un instrumento de cálculo, en un radio de unos pocos metros hay alguien que lo tiene, y

[1] Seguramente, se echará de ver la ausencia de otros actores en el pequeño listado; pero es precisamente la falta de integración entre las personas e instituciones concernidas uno de los temas centrales del escrito.

tal situación parece ya asimilada a la análoga (!) de no disponer de papel y lápiz y pedirlo prestado a quienquiera. Más aún, hay ya en la vida diaria muchos cómputos que no se pueden hacer sin auxiliares electrónicos.

El asunto no es trivial, y no se debe suponer que la tecnología resuelva todo problema de aprendizaje, pero, en cualquier caso, ella tiene a su haber la posibilidad de ofrecer –particularmente, a estudiantes socioeconómicamente más desprotegidos– oportunidades de enfrentar problemas matemáticos sin quedar atrapados en sus carencias operatorias. Un problema substantivo, que es necesario considerar.

2.2.2 Nuevas posibilidades

Como sabemos, el computador permite calcular, visualizar, conjeturar y experimentar con mayor facilidad. Sin embargo, para un profesor, puede ser preocupante apartarse del cultivo de destrezas operatorias, y, de hacerlo, debe tomar algunos resguardos: alguna familiaridad con los recursos algebraicos es indispensable, entre otras razones, porque un lenguaje no se aprende sin, en alguna medida, hablarlo; además, como sabemos, algún manejo del lenguaje comporta conocimiento de categorías conceptuales. Naturalmente, un énfasis desmedido en las destrezas operatorias tiende a oscurecer el verdadero propósito del aprendizaje de matemáticas para un individuo común, y suele ir en desmedro de las habilidades centrales que se deben desarrollar. Por lo demás, el argumento de que, sin las destrezas operatorias hasta ahora habituales, el estudiante no sabría por qué las cosas funcionan, si se examina con claridad, no refiere a una circunstancia nueva, sino a lo que ha venido ocurriendo desde hace tiempo.

2.2.3 Comprensión y destrezas

La respuesta a esa suerte de dilema no parece única ni uniforme.

Tomemos, por ejemplo, el conocimiento del sistema decimal. Aprenderlo para descubrir/inventar/nombrar números es un conocimiento fundamental. Seguramente, también lo es aprender a utilizarlo para la adición. Comprender su uso para la substracción parece más problemático (desde ya con aquello de "pedir prestado" que suele utilizarse). En el caso de la multiplicación, un examen de campo muestra que no todos quienes conocen el procedimiento pueden explicar su fundamento, a pesar de su sencillez. Aun entre quienes tienen éxito con la multiplicación, encontrar alguien que pueda explicitar con claridad el porqué del algoritmo de la división, es dudoso. Los afortunados indagadores que reciban explicaciones satisfactorias a la última pregunta muy posiblemente tendrán menos éxito en ubicar a alguien que pueda explicarles claramente el fundamento de la extracción manual de raíces cuadradas de números naturales. Llegados aquí, parece probable que nos digamos que el último caso no es, realmente, necesario, pero es ese precisamente el punto: de esa serie de preguntas, ¿hasta cuál es necesario saber responder? (Ver también Ball y Bass, 2003).

Parecería natural convenir en que las destrezas operatorias, per se, no ayudan a los estudiantes a resolver problemas ni a modelar fenómenos, y que, por otra parte, para los niños más desfavorecidos socioeconómicamente, poner el foco en esas destrezas no solo los discrimina en las calificaciones, sino que además los priva de pensar problemas interesantes, que les permitan desarrollar habilidades que necesitan. Como sea, los computadores actuales ofrecen posibilidades de estudiar fenómenos antes inaccesibles para la mayoría, lo cual facilita que el aprendizaje de la matemática sea, en mayor medida, una herramienta para la exploración y para conocer el mundo.

El tema es delicado y hay que proceder con prudencia, claro está. En todo caso, seguramente convendremos en que ya pasó la época de exámenes o pruebas abundantes en ejercicios de recargada e inútil complejidad, pues las virtudes que ello supuestamente podría deparar son reemplazadas con éxito por otras, en general, más pertinentes para un individuo común. La demanda cognitiva ahora es diferente, y cuanto antes lo incorporemos, siquiera provisionalmente, en nuestras consideraciones, tanto mejor.

El retraso de nuestro sistema. El sistema escolar chileno acusa un retraso en varias direcciones. Una de ellas, nos señala Oteiza en 2015, consiste en que, tras un empeño de todo el siglo de reforma sostenida, con un gran despliegue de pensamiento, recursos y acciones emprendidas, hay aún una brecha notoria entre los resultados obtenidos por los establecimientos públicos y los logrados por instituciones privadas.

Parte importante de nuestras dificultades (ahora, posiblemente, es más fácil consensuarlo), consiste en que, a pesar de los esfuerzos realizados, no todos los estudiantes tienen acceso a las redes de comunicación. Hay que cuidar, además, que las intenciones de paliar el atraso correspondiente en las prácticas de aula no se reduzcan a aperturas pequeñas, tímidas e insuficientes, que terminen haciendo "lo mismo de antes", pero con pequeñas variaciones[2] .

Aquel retraso resulta hoy especialmente doloroso, pues, antes de la pandemia, ya era claro que debíamos haber acelerado en la dirección que nos ofrecían los nuevos escenarios. En adición a los empeños realizados para dotar a los niños de computadoras, faltaba resolver el tema de la conectividad.

Un poderoso cambio cultural. Es obvio que la tecnología ha influido en la cultura y la civilización. El ámbito de la educación no parece ser uno de los que más rápidamente sintoniza con ese cambio.

Un aspecto especialmente significativo es el énfasis que se sigue haciendo en retener información en la memoria, o, más en general, la decisión de qué y cuánto debe ir allí, asunto que requiere de algún criterio difícil de convenir.
Por otra parte, las tecnologías permiten, en educación, transitar desde una cultura de, digamos, almacén o emporio, a una de supermercado: en este último, no hay que esperar a que el dependiente lo detecte a uno como comprador y graciosamente lo atienda; los bienes están al alcance de la mano –o de un clic–; el usuario elige libremente, y encuentra aun cosas que no había pensado en buscar. Similarmente, en cuanto al acceso a la información, en principio, el aprendiz no depende tanto de la voluntad de otro.

Parece ocioso hablar de que teléfonos celulares y computadoras están presentes en muchos aspectos de la vida: no solo están disponibles para que les preguntemos, sino que a menudo se nos adelantan con sugerencias. La discusión sobre su presencia en las aulas parece haber fenecido de causas virales; más aún, si un teléfono móvil puede no solo resolver ecuaciones, integrales, e incluso detallar los respectivos procedimientos, los instrumentos de evaluación no pueden ya seguir ignorándolos. Pensar que en ello hay principalmente una amenaza –y no una tremenda oportunidad (por ejemplo, de abordar problemas reales)– parece difícil de sostener.

Ahora bien, hoy en día hay una red de objetos físicos más numerosos que la población mundial, provistos de sensores integrados, software y otras tecnologías, que se conectan e intercambian datos a través de la red: la "internet de las cosas", IoT (Internet of Things). Esto incluye objetos domésticos cotidianos (aparatos de cocina, vehículos, monitores de bebés) y herramientas industriales de diseño avanzado. Se la considera una de las tecnologías más importantes de la actualidad. Está comenzando a hacer posible la comunicación expedita entre personas, procesos y cosas, sin mayor esfuerzo de las primeras; los sistemas digitales pueden registrar, supervisar y ajustar esa interacción. ¿Es posible concebir que los educadores de todo tipo no consideren la relevancia de este fenómeno, que, evidentemente, está haciendo algún efecto en los usos que damos a nuestro aparato cognitivo?

2.2.4 Estadística

Inclusión en el currículo. Hay conciencia cada vez mayor de la presencia del azar en la vida moderna, y de que muchas y muy importantes decisiones políticas, sociales, económicas y científicas se toman sobre la base de datos estadísticos (Gal, 2000). También lo hay de la necesidad, de las disciplinas y de los países, de convertir datos en información, y de cualquier ciudadano de valorar los datos y comprender la información. Ello deriva en que el currículo escolar debe proporcionar experiencia en la práctica de la estadística y oportunidades para evaluar críticamente los datos de diversas fuentes.

En el caso de Chile, al programa regular de estadística descriptiva en las asignaturas de Matemática, se ha añadido recientemente un curso de inferencia estadística, en el plan diferenciado, y los actuales estándares para la formación inicial de profesores incorporan la inferencia estadística informal –que permite hacer inferencias basadas en datos usando un lenguaje con incertidumbre (Estrella et al., 2021)–. Con ello, la actividad escolar avanza hacia la toma de decisiones.

Más precisamente, se procuraría transitar desde la alfabetización estadística (organizar y representar datos, comprender la probabilidad como medida de incertidumbre y hacer inferencia informal) a la del razonamiento estadístico (abordar información estadística y darle sentido con ideas estadísticas, tomar decisiones desde la comprensión de los procesos estadísticos y ser capaz de interpretar los resultados y llegar a hacer generalizaciones sobre el análisis realizado), y de este al pensamiento estadístico (que implica saber cómo y por qué utilizar un método, medida, diseño o modelo estadístico en particular) (Ben-Zvi y Garfield, 2004a, 2004b; Wild y Pfannkuch, 1999).

Uso de tecnología digital. La complejidad cuantitativa del tratamiento de datos ha requerido de software

[2] Al tenor de las mismas ecuaciones algebraicas de coeficientes enteros, con raíces que se determinan con alguna ayuda electrónica, pero apoyándose en la regla de los signos que usaba Descartes en el s. XVII, *e. g.*

que facilite la accesibilidad de las concepciones estadísticas, al permitir la transformación de representaciones puramente simbólicas en otras que permiten visualizar, comprender y construir modelos (Moore, 1997), desplazando así la atención hacia el razonamiento estadístico y la capacidad de interpretar, evaluar, y aplicar las nociones estadísticas y explorar los roles de los modelos del azar y la probabilidad (Ben-Zvi, 2001; Garfield y Gal, 1999). Ahora se puede avanzar hacia la planificación y anticipación de resultados antes de ejecutar, lo que cambia, a su vez, los principales problemas, dificultades y tareas de la actividad, y la evaluación de los aprendizajes (Ben-Zvi, 2001).

Big Data. Hoy, se está requiriendo cada vez más de big data, es decir, colecciones de datos de tal magnitud que el software y el hardware común no pueden procesarlos. Ellos van a modificar sustantivamente el problema de la educación estadística (González et al., 2020; Manyika et al., 2011). Se necesita, entonces, incorporar en los currículos ideas centrales de big data para la economía digital, abrir oportunidades de experimentar la "práctica de la estadística" con ellos, determinar los procesos de pensamiento estadísticos necesarios y diseñar actividades *ad hoc* (González et al., 2020).

Hasta ahora, el orden natural de la investigación ha sido plantear preguntas, recopilar datos, analizarlos, tomar decisiones. Pero ya hay ejemplos de que puede ocurrir que el análisis de este tipo de datos sugiera preguntas, modificando así el orden acostumbrado (Estrella y Vidal-Szabó, 2017).

2.2.5 Pensamiento computacional

El avance de las tecnologías digitales llevó, hace un tiempo, a pensar que el currículo debía incorporar en alguna medida la programación de computadores. Parecía natural que se comenzara con ello desde la infancia, pero se entendió la inconveniencia de que niños pequeños tuvieran que trabajar con máquinas electrónicas. Por supuesto, el escenario varió grandemente con la proliferación de maneras y lenguajes para programar computadoras. Con el tiempo, fue claro que lo que se precisaba aprender o desarrollar no era propiamente (o solamente) programación, sino pensamiento computacional, que no necesariamente requiere de estar ante un computador (Tedre y Denning, 2016).

En su influyente artículo de 2006, Jeannette Wing precisa que el pensamiento computacional es "conceptualizar, no programar (...) una forma en que piensan los humanos, no las computadoras" (p. 35); luego agrega que se refiere a la formulación de un problema y la expresión de sus soluciones de manera tal que una computadora o una persona pueda realizarlo con eficacia (Wing, 2014). Stephen Wolfram (2016) añade que el pensamiento computacional está relacionado con formular las cosas de manera suficientemente clara y sistemática como para decirle a una computadora que lo haga. Para ello, hay que relevar el diseñar, probar y usar modelos computacionales, lo cual no se basa solo en abstracciones sino también en la capacidad humana para capturar patrones y la dinámica de las acciones en desarrollo (Tedre y Denning, 2016). Según Araya et al. (2020), todo esto conducirá a una columna vertebral más rica y profunda para sustentar el razonamiento.

Por otra parte, el pensamiento computacional también es un requisito para un sector del empleo que crece con rapidez. Es necesario preguntarse, entonces, si todos pueden desarrollar el pensamiento computacional (Morris, 2013), lo que puede parecer imposible. Sin embargo, Wing (2006) ya hablaba del pensamiento computacional como una habilidad que todo ser humano debe poseer, tal como leer, escribir o realizar cálculos aritméticos.

Adicionalmente, el aprendizaje automático está creciendo muy rápido, está transformando un número creciente de industrias, y tendrá un gran impacto en la naturaleza de los trabajos y en el empleo. Ello devendrá en que, en el futuro, ya no se programarán las computadoras, sino que se las entrenará (cf. Villani et al., 2018).

3. Una perspectiva más amplia

Procuraremos ahora de ampliar progresivamente la escala a la cual estamos examinando nuestro tema, en el entendido de que, si bien ello nos apartará, eventualmente, de las materias que acostumbramos a debatir, la perspectiva global que alcancemos nos ayudará a clarificar[3] el complejo fenómeno que venimos examinando.

3.1 Organismos internacionales

Respecto de nuestro tema, parece natural reparar en consideraciones de organismos internacionales que lo estudian, se ocupan del asunto, y hacen propuestas que inciden en nuestras decisiones curriculares y de práctica de aula.

[3] Seguramente, con la mediación de relatos más autorizados.

Incluimos, a continuación, una brevísima y obviamente incompleta reseña, como elemento para vislumbrar hacia dónde parece moverse el vector educacional en matemáticas.

3.1.1 UNESCO: la educación y el mundo laboral

El programa Educación 2030 es una respuesta de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2016) a la creciente desconexión entre la educación y el mundo laboral, y su consecuente traducción en pérdidas de oportunidades para muchos y decepción ante la ineficacia de la educación como vehículo de movilidad social ascendente. A la UNESCO le parece necesario, en el nuevo contexto mundial, reconsiderar tanto el nexo entre educación y desarrollo social como la finalidad de la educación y la organización del aprendizaje, y, además, reforzar el vínculo entre educación y empleo.

La nueva fase de la historia de la humanidad se caracteriza por un creciente y rápido desarrollo de la ciencia y la tecnología, que ofrecen a la vez posibilidades utópicas y distópicas. La finalidad esencial de la educación debería ser posibilitar que ese desarrollo beneficie a las personas con equidad, y de manera emancipadora, justa y sostenible.

3.1.2 OECD: la educación como inversión en el futuro

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OECD, 2018) considera que las sociedades y economías de hoy enfrentan grandes retos: crisis financiera internacional, cumplimiento de los objetivos de desarrollo, crecimiento sostenible, cambio climático, envejecimiento de las sociedades, economía del conocimiento. Para responder a estos desafíos, la educación es fundamental: es una inversión en el futuro.

Los conocimientos incrementan la riqueza, el bienestar y la salud de las personas, y las sociedades deben proveer a estas de conocimientos, competencias y herramientas que les permitan ser competitivas y comprometidas en la sociedad. Sin embargo, los sistemas educativos no terminan de ofrecer oportunidades equitativas.

El objetivo de la OECD en el ámbito educativo es conseguir que aquella inversión sea relevante, eficaz y justa; para lograrlo, el factor clave lo constituyen las competencias, destrezas y habilidades. Por ello, coopera en la determinación y desarrollo de las competencias necesarias para mejorar la vida de las personas y sus empleos, generar prosperidad y promover la inclusión social.

Por su parte, según la OCDE, los responsables de la elaboración de políticas deben basarse siempre en la información más completa posible, para entender la forma en que está cambiando la manera de innovar y lo que eso implica para las políticas educativas y de formación.

En su propio programa Education 2030, la OECD (2018) se propone identificar los conocimientos, competencias, actitudes y valores que los alumnos de hoy en día necesitarán adquirir para tener éxito en el futuro.

3.1.3 APEC: inclusividad y empleabilidad

Estrategia general. Desde 2016, el Foro de Cooperación Económica Asia Pacífico (APEC, por sus siglas en inglés) se propuso, como parte de una estrategia para el crecimiento económico sostenible y el bienestar social de los países y economías que la integran, que estos se constituyan en una comunidad educativa fuerte y cohesiva, caracterizada por una educación inclusiva y de calidad, que mejore las competencias, acelere la innovación y aumente la empleabilidad (APEC, 2016).

La APEC considera que las economías y sociedades que la componen son, en la era digital, cada vez más complejas y multidisciplinarias, y que ello hace cada vez más importante fomentar STEM en todos los niveles, pues es de vital importancia para desarrollar, adoptar y adaptar nuevas tecnologías. No olvida, sin embargo, las dificultades que está experimentando un sector amplio de la población para sumarse a estos cambios (APEC, 2020).

InMside. Desde 2007, un grupo de investigadores de países de la APEC, liderados por Masami Isoda, del *Center for Research on International Cooperation in Educational Development* (CRICED) de la Universidad de Tsukuba, en Japón, ha venido desarrollando una serie de proyectos relacionados con el *Estudio de Clases (Lesson Study, jugyo-kenkyu)* en sucesivas versiones, en cada una de las cuales ha participado una veintena de países, incluyendo Chile (CRICED, 2022). En la versión actual, *InMside*, Chile es también un proponente[4].

[4] Roberto Araya, del Centro de Investigación Avanzada en Educación, CIAE, es uno de los tres directores del proyecto.

InMside (APEC, 2018) considera que, actualmente, el conocimiento, los datos y la tecnología desempeñan funciones fundamentales en cualquier aspecto de la vida. Se necesita matemática para el manejo de big data, codificación para la innovación a través de STEM, y toma de decisiones con el apoyo de inteligencia artificial. A su vez, el uso de tecnología en matemáticas provee de herramientas para la exploración matemática, representación y modelización de fenómenos ambientales, naturales y sociales. Ello requerirá de poner al día los planes de estudio de los países participantes.

El proyecto se sitúa en la transición a la Sociedad 5.0[5], la era de big data para la Economía Digital, inextricablemente unidos como claves y esenciales para esa transición, y propone un marco articulado, del cual solo citamos, a continuación, un par de aspectos de interés para el currículo (Araya et al., 2020): el pensamiento computacional y el pensamiento estadístico.

El Pensamiento Computacional, al cual nos referimos al comienzo de este escrito, es, a juicio de los proponentes, indispensable para desarrollar un capital humano creativo adaptado a los desafíos del siglo XXI (Araya et al., 2020; Kano, 2019). El plan de estudios debe hacerse cargo de que la sociedad necesitará progresivamente analizar mayores volúmenes de datos, lo que lo llevará a considerar, junto con su variedad y velocidad, complejos desafíos del análisis de datos, y, aun, plantear nuevos. Para ello, deberían hoy asentarse en cuatro pilares, tres de los cuales son la programación tradicional, la modelización matemática y el aprendizaje automático, que ya se están utilizando; el cuarto consistiría en la integración de esos tres pilares en un sistema autónomo con dispositivos, como la IoT, lo cual genera sistemas con una iniciativa inédita; es una nueva arquitectura para la programación en Inteligencia Artificial, y requiere nuevos conocimientos y habilidades (Araya et al., 2020; cf. Araya et al., 2021).

Refiriéndose a la Estadística, que reseñamos al comienzo, los proponentes piensan que la alfabetización estadística, inferencial y probabilística, seguirá siendo una competencia importante para el éxito académico, profesional y cotidiano. Sin embargo, se espera que las personas puedan identificar necesidades y desafíos que enfrenta toda la sociedad, y proponer escenarios para resolverlos, haciendo uso de tecnologías digitales y big data. La creciente necesidad de extraer información de big data obliga al currículo a no limitarse a pequeños conjuntos de datos, sino que incorporar elementos de la “ciencia de datos”, que recurre a estadística, matemática e informática, y requiere de Inteligencia Artificial y aprendizaje automático. Para ello, se necesita una plataforma digital que posibilite el descubrimiento creativo: que los estudiantes puedan buscar conexiones y relaciones significativas entre los datos disponibles (González et al., 2020).

3.2 La sucesión de “Sociedades”

Hemos procurado dar indicios de la dirección en que eventualmente se orientará el currículo de Matemáticas. Sin embargo, nos parece oportuno incluir en esta reseña un fenómeno que está en el origen de lo que venimos describiendo, y que nos ofrece una mejor perspectiva para aquilatar la urgencia, profundidad, inevitabilidad y aceleración de ese fenómeno.

Ya se está hablando del ecosistema 5.0 o Sociedad Súperinteligente (Council for Science, Technology, and Innovation, 2017). Esa Sociedad 5.0 sería la culminación de etapas anteriores del desarrollo humano. La Sociedad 1.0 habría sido una de cazadores-recolectores; 2.0, la Sociedad Agraria; 3.0, la Sociedad Industrial, y 4.0, la actual Sociedad de la Información. No cabe duda de que las políticas educativas deberían ser sensibles a este tipo de fenómenos. Para ello, deben afrontar el problema de manera informada, clara y decidida. Por ejemplo, si asumimos que estamos en tránsito de una a otra de estas sociedades, debemos preguntarnos cómo proceder, porque es evidente que limitarnos a insistir en los usos de la sociedad precedente es necesariamente un retroceso, ya que el escenario se mueve, y las competencias o habilidades de una pueden perder relevancia en la siguiente –y la manera de avanzar no consiste en entrenarse más en lo que fue valioso en la etapa anterior–.

Cada una de esas sociedades es un invento generado por quienes quizás tuvieron una visión más amplia. Cambiar de una a otra tiene una cualidad profundamente democrática: un avance tecnológico inicialmente produce desigualdad, pero, cuando ya es asimilado por la comunidad, esa desigualdad tendería a desaparecer (cf. Turchin, 2016), para dar paso, en principio, a una mejor condición (cf. Goldin y Katz, 2008). Esta dinámica de transición a menudo se repite en una escala temporal menor, lo que se relaciona con el hecho ya mencionado de que el conocimiento de una generación no es suficiente para resolver los problemas que debe enfrentar la próxima.

[5] Incluiremos alguna referencia, más adelante.

Si la planificación de la educación no considera este tema, difícilmente alcanzará su objetivo. Para decirlo de manera más enfática: ¿Acaso no es el objetivo de toda la educación pasar a una etapa mejor que la actual, personal y colectivamente, y luchar incansablemente para reducir la desigualdad?

3.3 Más allá de la historia

La anterior no es la única perspectiva sobre el tema, naturalmente, pero hay otras que apuntan en la misma dirección.

Los antropólogos han debatido sobre cuáles son las grandes eras o culturas de la humanidad. Un cambio de era conllevaría modificaciones en la adquisición de conocimientos, en el desarrollo del cerebro[6], en las formas de interacción social, en lo que hoy llamamos, precisamente, cultura (Donald, 1991, 1993). De hecho, esas eras aparecen como respuestas a escenarios cada vez más complejos.

Donald (1991, 2007) ha propuesto distinguir cuatro eras (cf. Shaffer y Kaput, 1988):

La cultura episódica está relacionada con la forma en que el *homo sapiens* habría vivido en su condición de primate. La memoria habría almacenado eventos, pero no los representaba ni procesaba.

La cultura mimética, la del *homo erectus*, ya tiene representación, que comparte alguna cualidad con lo representado –una representación icónica (Peirce, 1998)– consciente, autoiniciada, intencional, y que requiere de procesamiento y comunicación.

La aparición del lenguaje inicia la cultura mítica típica del *homo sapiens*. El lenguaje depende del desarrollo de representación y comunicación simbólicas –el signo ahora puede ser arbitrario (Peirce, 1998)–. Qué son las cosas y qué significan se puede elaborar y conservar con mayor precisión.

La cultura teorética aparece con la escritura. La necesidad de registrar hechos y fenómenos complejos (comercio, astronomía, e. g.) conduce a la creación de símbolos externos, de los cuales los matemáticos fueron los primeros. La memoria se exterioriza: se registra fuera de la mente de las personas. El registro escrito mejora la capacidad de relacionar ideas y apoya un mejor pensamiento analítico; el desarrollo de la ciencia está indisolublemente ligado a esos registros; la enseñanza, por tanto, enfatiza las habilidades de cómputo. La función principal de la memoria ya no es almacenar información, sino ayudar en procesos mentales complejos; en matemáticas, esto consiste en transformar una representación simbólica en otra.

Como individuos, acostumbramos a pasar de una de estas etapas a otra (Donald, 1991). Además, parece claro que no siempre se entiende que pasar de una era a la siguiente significa en sí mismo utilizar los nuevos recursos que ofrece esta última; por ejemplo, una vez que aparece la escritura, sobrecargar la memoria con datos o información ya es, en cierto modo explicitable, un anacronismo.

3.4 ¿Una nueva era?

3.4.1 Las tecnologías digitales

Es evidente que, en la actualidad, el fuerte desarrollo de las tecnologías de la información se traduce en modificaciones en la adquisición de conocimientos, en las formas de interacción social, en la externalización del conocimiento y los procesos de cálculo, y, de acuerdo con la caracterización de Donald (2007), si hubiera también cambios en el desarrollo cerebral, estaríamos ante un cambio de era.

Al respecto, vale la pena señalar que la Sociedad 5.0 sugerida anteriormente implica que, en ella, la mente tiene al menos la posibilidad de trabajar de manera diferente, o de enfocarse libremente en asuntos a los cuales había dedicado menos atención, dada la posibilidad de gastar considerablemente menos tiempo en rutinas y más en creatividad, e. g. (Cf. Villani et al., 2018).

Como es obvio, esto último está absolutamente fuera del alcance de este autor; sin embargo, de acuerdo con los antecedentes esbozados, parece razonable considerar la hipótesis de que ya deberíamos realizar modificaciones profundas en nuestra forma de hacer las cosas y, en educación, definitivamente más significativas que las que podríamos estar considerando. Al respecto, no debemos olvidar la resistencia que han manifestado muchos actores educativos a utilizar instrumentos electrónicos de cómputo de muchos tipos[7].

[6] Siempre que nos sea posible, usaremos "mente" en lugar de "cerebro", de modo de no excluir alguna de las acepciones de la *cognición situada*.
[7] Si le parece a usted, intente encontrar testimonios de oposición al uso de calculadoras (en estadística, por ejemplo), computadoras (en cálculo numérico, *e. g.*), teléfonos celulares (y su capacidad de realizar cómputos y explicitar los procesos.

3.4.2 La matemática

Según los datos que incluimos a continuación, y en relación con las tecnologías digitales, el caso de la matemática muestra un aspecto determinante de lo que está sucediendo, y que no habría recibido suficiente atención. En efecto, al exteriorizar tanto el conocimiento de los hechos como su interpretación, la aparición de la escritura los hizo accesibles a quienes aprendieron a leer –saber escribir permitió además dejar el registro externo de otros hechos y otras interpretaciones: un fenómeno de grandes consecuencias democráticas–. Con las computadoras, los procesos que anteriormente solo podían realizar los cerebros humanos (revisión ortográfica, cálculos aritméticos, cálculos gigantes, cálculo simbólico y similares) se externalizan. Al respecto, nos parece que la descripción de Donald (2007), que caracteriza la cultura teórica por su "almacenamiento masivo de memoria externa" (p. 218), que a su vez "se convierte, con mucho, en el factor más importante de la cognición de un individuo" (p. 212), no considera esa externalización de procesos, que está a la vista y que es, obviamente, más determinante y profunda (cf. Shaffer y Kaput, 1988). De hecho, hoy en día, los dispositivos electrónicos no son solo las calculadoras portátiles; la internet funciona como una gran calculadora con innumerables controles (apps) apoyados por grupos variados (científicos y otros), y son un recurso legítimo, necesario y potenciador de aprendizaje.

Tanto la inteligencia artificial (y, en particular, el aprendizaje automático) como la IoT nos obligan a aceptar que ya es un hecho que no solo los procesos informáticos, sino también el análisis (para la toma de decisiones, por ejemplo), y muchos procesos de naturaleza práctica, no siempre están "en manos" de la mente humana. El software interconectado que gestiona la venta y distribución de muchos productos, los vuelos comerciales en asociación tanto con esa distribución como con los desplazamientos de aviones de pasajeros, y similares, son ejemplos inmediatos de ello.

En términos educativos, esto último debe ser considerado con atención, principalmente para enfrentar la noción eventual de que, en la matemática escolar, a la hora de resolver, por ejemplo, un problema, sea necesario tener una claridad prístina en todos los aspectos de cómputo involucrados en la solución.

Sabemos, por supuesto, que la democracia no cae de los árboles, pero sí podemos considerar que hay elementos que, bien usados, la favorecen. Si bien es una dolorosa realidad que no todos quienes necesitan conexión a internet la poseen, ello no implica que no haya allí una oportunidad.

Las máquinas ejercen –o posibilitan ejercer, si se prefiere– un profundo efecto democratizador[8] en diversos aspectos de la cultura.

3.5 Democracia y tecnología

Que la democracia, la educación y la tecnología vayan de la mano no es solo un accidente.

Podemos imaginar, en un pasado remoto, que un brujo, según su inteligencia de su poder, su misión y su visión, decidía cuidadosamente a quién comunicar su conocimiento.

La aparición de la escritura, al almacenar aquella información fuera de las mentes, modifica grandemente la relación entre personas; sin embargo, escribas y sacerdotes se guardan de comunicar todo su saber –todo su poder–. La aparición de la imprenta no cambia en forma sustantiva el mecanismo de esa relación, sino que, al proveer de mayor accesibilidad a los registros externos a las mentes, favorece la democracia –si bien limitada por los costos de producción–.

La internet acelera la accesibilidad y, con ello, irrumpe, como los otros casos, en el sistema educacional: ahora cualquier estudiante puede cotejar y eventualmente corregir la información del profesor, y depende menos de este[9]. Pero es otro el fenómeno más determinante: la tecnología digital no solo externaliza los conocimientos, sino también los procedimientos realizados en las mentes. Es obvio que esto último es en extremo determinante en el caso de la educación matemática, y, con entera seguridad, debemos pensar seriamente por qué un sistema educacional que debería disminuir la desigualdad dé, por el contrario, muestras de aumentarla, y ver cómo aprovechar la circunstancia digital para conseguir aquel propósito superior.

[8] Obviamente, ello sin perjuicio de las dificultades que experimenta la democracia para manifestarse en plenitud.
[9] Por supuesto, esto no se da igual en matemáticas que en otras disciplinas.

4. Colofón

4.1 El pensamiento matemático

Según lo que venimos discutiendo, coincidimos plenamente con Isoda y Katagiri (2014):

> "Cultivar la capacidad de pensar de forma independiente y la capacidad de aprender de forma independiente será el objetivo más importante en esta sociedad basada en el conocimiento, y en el caso de los cursos de matemáticas, el pensamiento matemático será la habilidad básica más necesaria para el pensamiento independiente" (p. 75).

Importa, agregamos, dilucidar hasta qué punto ese objetivo depende de alcanzar completa claridad en cada paso de los cómputos.

Por otra parte, se debe mantener presente que, aun cuando las tareas escolares deben, con frecuencia, poner a la matemática en juego ante situaciones de la realidad cotidiana o de diferentes disciplinas, en muchas ocasiones deben tratar temas puramente matemáticos –si bien, debemos añadir, para el ciudadano común, esto último no necesariamente comporta conocer la matemática al modo de los matemáticos–.

4.2 La pandemia y la escuela

En julio de 2020, refiriéndose a la pandemia global Covid-19, la UNESCO señaló que más de 1.600 millones de estudiantes estuvieron sin clases. En marzo de 2021, agregó: que más de 100 millones de niños no alcanzarán las competencias mínimas de lectura; que en Latinoamérica y el Caribe había 13.3 millones de niños en riesgo de no volver a la escuela; y que un tercio de la población estudiantil mundial no tiene acceso a aprendizaje remoto[10]. Añadió que, en el momento crítico en que estamos, en que la humanidad tiene una posibilidad inédita de participar en la creación conjunta de mejores futuros, la educación no está ayudando suficientemente. Tras dos años de reunir información y testimonios, aboga por, justamente, la necesidad de participación de todas las personas concernidas[11] en debates públicos sobre la educación, de modo de repensar el aprendizaje, y las relaciones de los alumnos con los docentes, el conocimiento y el mundo.

Como sea, tras la pandemia, las escuelas no volverán sin más al estado anterior.

Las reuniones remotas están solo comenzando a intervenir la cultura educacional. En particular, las clases por esa vía mostraron dificultades no previstas; sin embargo, se avanzó de manera también inesperada, y debida a la creatividad y resiliencia tanto de profesores como de alumnos (SEAMEO Secretariat, 2022). Las reticencias, válidas o inevitables, seguramente se morigerarán con más información y una mejor evaluación de costos y beneficios –habrá que hilar más finamente, en particular, con relación a aspiraciones que se tiene pero que no terminan de plasmarse como se desea–.

Por sobre otras consideraciones de menor duración, la pandemia ha mostrado que podemos, y tal vez debemos, abrirnos más decididamente a la posibilidad la educación como fenómeno global (SEAMEO Secretariat, 2022). Ello pone, naturalmente, el acento en la defensa de la identidad local –una vez más, hay pros y contras–.

Los modos de aprendizaje están sufriendo transformaciones; de acuerdo con lo ya expuesto, habrá otras, de mayores proporciones. Al respecto, la conectividad no solo es una prioridad en educación: según la UNESCO (2020), forma parte del derecho a la educación.

4.3 Los profesores

El rol del profesor seguirá cambiando: su estudiante tiene acceso a otras fuentes, otros referentes, puede explorar; por otra parte, necesita de guía, incluso en materias extracurriculares, para convertirse en un pensador independiente. Las nuevas demandas sobre el profesor son mayúsculas. Liu (2022), explicando el enfoque de desarrollo profesional docente de Singapur, señala que aquellas demandas comportan transitar: de observadores a formadores del carácter, de consumidores a creadores de conocimiento, de trasmisores a facilitadores del conocimiento[12], de constructores a arquitectos de un ambiente de

[10] Estas proyecciones no han sido actualizadas, debido a la dificultad adicional de reunir los datos originada, precisamente, por la propia pandemia.
[11] Es decir, en principio, todo el país. De todas maneras, y como suele ocurrir en diferentes foros de relevancia, sería bueno preocuparse de que hubiera un mínimo de inteligencia del tema. (En una discusión pública relacionada con la última propuesta curricular, organizada por la UCE, un representante de un grupo de interés manifestó, también públicamente, que la [tremenda] dificultad producida tenía algo de positivo, pues él se había enterado de que existía la UCE).
[12] "Facilitators of knowledge, not mere transmitters", en el original (42:15). (Se podría reemplazar un par de vocablos).

aprendizaje, de seguidores a líderes de cambios educacionales.

4.3.1 La formación inicial

De acuerdo con lo expuesto aquí y en Mena-Lorca (2022a, 2022b), la formación inicial de quienes enseñarán Matemáticas, junto con preocuparse de las nuevas demandas y responder a los estándares que el país se ha propuesto, deberá dar elementos para coadyuvar a que sus egresados puedan hacer alguna síntesis de las diversas fuentes que esa formación les ofrece, y considerar otros elementos, de carácter innovador, que el escenario les está demandando.

No todas las instituciones formadoras han atendido el llamado de la OECD (2004) de ocuparse expresamente de ofrecer los elementos que favorezcan la síntesis mencionada en cuanto a la dimensión educacional general y la que corresponde a la disciplina que imparten, si es del caso. Con seguridad, ella no puede conseguirse por completo en las aulas de formación docente, pero el profesor necesita de algo más que el contar con dos vertientes de origen dispar y eventualmente divergentes.

Agregamos aquí un par de consideraciones muy generales, que son producto de nuestra experiencia colectiva y que no pretenden, naturalmente, referirse a clases homogéneas ni disjuntas.

La vertiente matemática. En el caso de la matemática, y a pesar de que investigadores chilenos de esta disciplina se han comprometido con su educación, no se ve, en general, que quienes imparten matemáticas en la formación inicial se interesen en incorporar otras categorías a su hacer, posiblemente porque no las ven relevantes para ese hacer ni como parte de su cometido profesional. Algunas de las razones para ello podrían provenir de no comprender las dificultades que enfrenta el ciudadano común ante conocimientos muy básicos, o de tener una visión restringida del propósito de la matemática en el currículo, o de otras consideraciones de distinto tenor[13].

Dado lo anterior, creemos que se precisa ofrecer elementos que sean significativos para la práctica de aula de esos docentes. A manera de ilustración, podrían mencionarse: la trascendencia de las representaciones para el aprendizaje (Duval, 1995, ya mencionado), junto con la construcción y los procesos discursivos (Kuzniak y Richard, 2014); el delicado y cuidadoso proceso de conversión del conocimiento científico matemático en una materia de enseñanza escolar (Chevallard, 1998); la construcción de matemáticas que hacen las comunidades para sus fines (Cantoral, 2013); los diversos grados de internalización por los que pasa un estudiante frente a un conocimiento matemático y la posibilidad de aprender sin haber comprendido bien un requisito (Arnon et al., 2014)[14]; etcétera.

Adicionalmente, las categorías generales de Shulman (1986) –conocimiento pedagógico, conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico-del-contenido– no solo son muy útiles para adentrarse en el asunto, sino también para estimar de manera clara la relevancia de esos distintos aspectos para las diversas finalidades que tiene la enseñanza. Por lo demás, esas categorías han sido especificadas para el caso de la matemática (Ball et al., 2008) y se han convertido en un modelo detallado y explícito del conocimiento del profesor de matemáticas (Carrillo et al., 2018).

La fuente educacional. A nuestro entender, una persona que se dedica a la educación como área de estudio tiene, por supuesto, pleno derecho a no interesarse por el infinito, y a no ocuparse de la explicitación lógica que su estudio requiere. Más en general, los objetos de estudio de otras disciplinas cuya enseñanza y aprendizaje les incumbe suelen ser, por oposición, directamente accesibles a los sentidos.

De estas dos consideraciones sigue que estrategias útiles en otros dominios pueden no serlo en el caso de la matemática o, dicho de manera más precisa, que podría ocurrir que, por desconocimiento de la matemática, una persona podría no darse cuenta de que un determinado recurso es inapropiado para su enseñanza o aprendizaje.

4.3.2 La formación continua

Cabe también innovar en forma decidida en la estrategia general de desarrollo profesional docente, y construir con mayor decisión a partir del conocimiento que comunidades de profesores pueden compartir y/o generar, en las distintas dimensiones de su desempeño. Esto sería más respetuoso, más realista, y más profesional. Sería también congruente con la insistencia que se hace en que los estudiantes adquieran competencias para el trabajo colaborativo. Adicionalmente, ello es coherente con la recomendación de la UNESCO (2020) de continuar la profesionalización de los docentes como una labor colaborativa en la que se

[13] No contamos aquí como razón el testimonio siguiente, que recogimos en fecha reciente: “Llevo 30 años enseñando de esta manera. ¿Por qué tendría que cambiar?”.

[14] Nos parece necesario reiterar que no pretendemos aquí presentar alguna novedad a la SOCHIEM.

les reconozca como productores de conocimiento. Por otra parte, es una estrategia más abarcadora de personas. En nuestro caso resultaría, incluso, más eficiente: desde hace años se vienen desarrollando en Chile versiones locales del *Estudio de Clases* de origen japonés (Estrella et al., 2018), metodología que, según una evaluación del impacto de 643 cursos de desarrollo profesional docente norteamericanos (Gersten et al., 2014), la cual se realizó de acuerdo con los exigentes criterios de *What Works Clearinghouse* (https://ies.ed.gov/ncee/wwc/), fue uno de los dos programas que resultaron efectivos para profesores de Matemáticas.

4.4 Presencia de la matemática

Para el caso de matemáticas, un gran tema de investigación en aula es, seguramente, el de saber hasta dónde se puede relegar las prácticas rutinarias a los aparatos electrónicos, sin perder la capacidad de analizar y razonar matemáticamente.

El tema general educacional seguramente tiene áreas menos familiares para nuestra comunidad. Sin embargo, cuando estas cuestiones se debatan, es imperativo que participen personas entendidas en la disciplina y en su enseñanza –naturalmente, en cada caso, desde perspectivas eventualmente diversas–. Ello no solo con propósitos de aprendizaje y en resguardo de la integridad de la disciplina, sino también por la claridad que se provee sobre la contribución de la matemática al currículo general.

De esa contribución, se puede señalar: lectura cuidadosa de datos e información, resolución de problemas, modelización, pensamiento estadístico, pensamiento computacional, criterio probabilístico (tan necesario en la pandemia, e. g.); todos ellos son indispensables en el diario vivir y en la evolución de la sociedad, pero, como vimos, no siempre se tienen en cuenta. Temas menos recurrentes, pero claramente vitales, son: el tratamiento elemental de fenómenos complejos tales como terremotos, erupciones volcánicas, incendios de gran magnitud, tsunamis, inundaciones, avalanchas, ante los cuales los niños, por su propio beneficio, deberían plantearse. Un rol adicional juega la finura apropiada de pensamiento que la matemática ofrece, en temas de tal relevancia como distinguir la información verdadera de lo que pretende pasar por tal.

La matemática es una componente esencial en la determinación del vector que debe orientar la educación de nuestro país. También lo es en el establecimiento de la velocidad que tomen nuestros procesos de mejora.

4.5 Un nuevo esfuerzo

La profunda reforma educacional que venimos sugiriendo tiene, a nuestro parecer, un origen aún más recóndito, y su dirección posterior apenas se vislumbra. Como sea, no debe sorprendernos como la anterior. De hecho, no podría: es absolutamente evidente que el país ha avanzado en política educacional, en diversas áreas de la investigación ad hoc, en las prácticas de aula; sin embargo, no dispone aún de un vector compartido que reúna y oriente los esfuerzos y cuya magnitud sea suficiente para la tarea. Según lo reseñado en esta larga Invitación, tal reforma, si bien afectará al currículo –y, de hecho, está ya interviniendo en él–, no se limita solo a esa dimensión de nuestro quehacer, sino que alterará otras, incluyendo, por ejemplo, a nuestra concepción de aprendizaje.

A pesar de la compleja, dolorosa y agobiante circunstancia, se ve necesario un esfuerzo adicional, más integrado y convocante. Es para ello que se necesita aquel gran debate.

Terminamos ofreciendo reiteradas disculpas por el atrevimiento y la insuficiencia, y evocando de manera un tanto vaga una conversación de un cuento antiguo que tal vez venga al caso:

– ¿Tienes harina… tienes sal… hay agua…?
– Sí.
– Entonces, ¿no sería bueno hacer un pan?

Referencias

Araya, R., Isoda, M., y González, O. (2020). A framework for Computational Thinking in preparation for transitioning to a Super Smart Society. J*ournal of Southeast Asian Education, 1*, 1-16.

Araya, R., Isoda, M., y Van der Molen Moris, J. (2021). Developing Computational Thinking Teaching Strategies to Model Pandemics and Containment Measures. *Int. J. Environ. Res. Public Health, 18*, 12520. https://doi.org/10.3390/ijerph182312520

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., y Weller, K., (2014). *APOS theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Ball, D. L., y Bass, H. (2003). Making Mathematics reasonable in school. En J. Kilpatrick, W. G. Martin y D. Schifter (Eds.), *A Research companion to Principals and Standards for School Mathematics* (pp. 27-44). National Council of Teachers of Mathematics.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Ben-Zvi, D. (2001). Technological tools in statistics education. En *Jornades Europees d'Estadística. L'ensenyament i la difusió de l'Estadística* (pp. 207-220). Conselleria d'Economia, Comerç i Indústria. Govern de les Illes Balears.

Ben-Zvi, D., y Garfield, J. (2004a). Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking: Goals, definitions, and challenges. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *Introduction to Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking* (pp. 3-15). Kluwer Academic Publications. https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6_1

Ben-Zvi, D., y Garfield, J. B. (Eds.). (2004b). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking.* Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6

Borromeo Ferri, R., Mena-Lorca, J., y Mena-Lorca, A. (Eds.). (2021). *Fomento de la Educación-STEM y la Modelización Matemática para profesores.* Kassell University Press. https://kobra.uni-kassel.de/handle/123456789/12985

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Gedisa.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Center for Research on International Cooperation in Educational Development. (2022). *The University of Tsukuba-APEC International Cooperative Research.* https://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/index_jp.php

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado.* Aique.

Council for Science, Technology, and Innovation. (2017). *Japan Science and Technology Policy. Realizing Society 5.0.* https://www.japan.go.jp/abenomics/_userdata/abenomics/pdf/society_5.0.pdf

Dhombres, J. (1978). *Nombre, mesure et continu: Épistémologie et histoire.* CEDIC/Fernand Nathan.

Donald, M. (1991). *Origins of the modern mind: Three stages in the evolution of culture and cognition.* Harvard University Press.

Donald, M. (1993). Precis of origins of the modern mind: Three stages in the evolution of culture and cognition. *Behavioral and Brain Sciences 16,* 737-791. https://doi.org/10.1017/S0140525X00032647

Donald, M. (2007). The slow process: A hypothetical cognitive adaptation for distributed cognitive networks. *Journal of Physiology Paris, 101*(4-6), 214-222. https://doi.org/10.1016/j.jphysparis.2007.11.006

Duval, R. (1995). *Semiosis y pensamiento humano.* Universidad del Valle.

Estrella, S., Vergara, A., y González, O. (2021). Developing Data Sense: Making inferences from variability in tsunamis at Primary School. *Statistics Education Research Journal, 20*(2), 16-16.

Estrella, S., y Vidal-Zsabó, P. (2017). Alfabetización estadística a través del estudio de clases: representaciones de datos en primaria. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 78*, 12-17.

Estrella, S., Olfos, R., y Mena-Lorca, A. (2018). Lesson Study in Chile: A very promising but still uncertain path. En M. Quaresma, K. Winslow, S. Clivaz, J. P. da Ponte, A. N. Shuilleabhain y A. Takahashi (Eds.), *Mathematics lesson study around the World: Theoretical and methodological issues* (pp. 105-122). Springer International Publishing.

Foro de Cooperación Económica Asia Pacífico. (2016). *2016 Leaders' Declaration.* https://www.apec.org/Meeting-Papers/Leaders-Declarations/2016/2016_aelm

Foro de Cooperación Económica Asia Pacífico. (2018). *Inclusive Mathematics for Sustainability in a Digital Economy (InMside).* APEC Project Database. https://aimp2.apec.org/sites/PDB/Lists/Proposals/DispForm.aspx?ID=2247

Foro de Cooperación Económica Asia Pacífico. (2020). *COVID-19 Hastens Automation.* APEC Policy Support Unit. https://www.apec.org/Press/News-Releases/2020/0626_Future

Gal, I. (2000). Statistical literacy: Conceptual and instructional issues. En D. Coben, J. O'Donoghue y G. FitzSimons (Eds.), *Perspectives on adults learning Mathematics: Research and practice* (pp. 135-150). Kluwer. https://doi.org/10.1007/0-306-47221-X_8

Garfield, J. B., y Gal, I. (1999). Teaching and assessing statistical reasoning. En L. V. Stiff (Ed.), D*eveloping mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 207-219). National Council of Teachers of Mathematics.

Gersten, R., Taylor, M. J., Keys, T. D., Rolfhus, E., y Newman-Gonchar, R. (2014). *Summary of research on the effectiveness of math professional development approaches.* REL Southeast & National Center for Education, Evaluation and Regional Assistance. Institute of Education Science. US Department of Education.

Goldin, C., y Katz, L. (2008). *The race between Education and Technology.* Harvard University Press. https://doi.org/10.2307/j.ctvjf9x5x

González, O., Isoda, M., y Araya, R. (2020). A New Framework for Statistical Thinking in the Time of Big Data and the Digital Economy. *Journal of Southeast Asian Education, 1,* 59-67.

Isoda, M., y Katagiri, S. (2014). *Pensamiento matemático: cómo desarrollarlo en la sala de clases.* CIAE, Universidad de Chile.

Kano, T. (2019). *Curriculum Reform for Digital Society: Challenges to 4th Industrial Revolution.* http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2019/presentations/7Feb/2/rev-Toshiharu_Kano20190207.pdf

Kuzniak, A., y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(4-1), 5-39. http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a

Liu, W. C. (2022). (Ed). *Singapore's approach to developing teachers: Hindsight, insight, and foresight.* Routledge. https://doi.org/10.4324/9780429433641

Manyika, J., Chui, M., Brown, B., Bughin, J., Dobbs, R., Roxburgh, C., y Hung Byers, A. (2011). *Big Data: The next frontier for innovation, competition, and productivity.* The McKinsey Global Institute.

Mena-Lorca, A. (2022a). Sobre la nueva reforma de la educación matemática: invitación a un debate, 1. *Revista Chilena de Educación Matemática, 14(*1), 4-16. https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i1.107

Mena-Lorca, A. (2022b). Sobre la nueva reforma de la educación matemática: invitación a un debate, 2. *Revista Chilena de Educación Matemática, 14*(1), 17-30. https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i1.108

Mena-Lorca, A. Mena-Lorca, J., y Morales, A. (2022). Contemporary learning in the interaction of the human with data, via technology-mediated graphics: the discourse-representation dialogue in mathematics. En F. Cordero, M. Rosa, D. Orey, y P. Carranza (Eds.), *Mathematical Modelling Programs in Latin America – A collaborative context for social construction of knowledge for educational change* (pp. 347-366). Springer.

Moore, D. S. (1997). New pedagogy and new content: The case of statistics. *International Statistical Review, 65,* 123-165. https://doi.org/10.2307/1403333

Morris, I. (2013). *The measure of Civilization. How social development decides the fate of nations.* Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9781400844760

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (2016). *Educación 2030. Declaración de Incheon y Marco de Acción para la realización del Objetivo de Desarrollo Sostenible 4: Garantizar una educación inclusiva y equitativa de calidad y promover oportunidades de aprendizaje permanente para todos.* https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000245656_spa

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (2020). *COVID-19 Education. How many students are at risk of not returning to school?* July 2020. UNESCO.

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (2021). *Reimaginar juntos nuestros futuros – Un nuevo contrato social para la educación.* UNESCO.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2004). *Revisión de Políticas Nacionales de Educación. Chile.* OECD.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2018). *The future of education and skills. Education 2030.* Secretary-General of the OECD.

Oteiza, F. (2015). Una visión acerca de la educación matemática en Chile: cómo caracterizar su presente, los principales hitos del proceso de llegar allí y cómo pensar el futuro. En X. Martínez y O. Camarena (Eds.), *La educación matemática en el siglo XXI* (pp. 41-66). Instituto Politécnico Nacional.

Peirce, C. S. (1998). *The Essential Peirce. Volume 2. Selected Philosophical Writings (1893-1913).* Indiana University Press.

Shaffer, D. W., y Kaput, J. J. (1988). Mathematics and Virtual Culture: An evolutionary perspective on Technology and Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics, 37,* 97-119. https://doi.org/10.1023/A:1003590914788

SEAMEO Secretariat. (2022, 10 de febrero). *10th SEAMEO-University of Tsukuba Symposium* [Video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=X6Znu8bnIO0

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Tedre, M., y Denning, P. (2016). *The long quest for Computational Thinking.* https://doi.org/10.1145/2999541.2999542

Turchin, P. (2016). *Ultrasociety: How 10,000 years of war made humans the greatest cooperators on Earth.* Beresta Books.

Villani, C., Schoenauer, M., Bonnet, Y., Berthet, C., Cornut, A.-C., Levin, F., y Rondepierre, B. (2018). *Donner un sens à l´Intelligence Artificielle: Pour une stratégie nationale et européenne.* Mission Villani sur l'intelligence artificielle. AI for Humanity. https://www.aiforhumanity.fr/pdfs/MissionVillani_Presse_FR-VF.pdf

Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-248. https://doi.org/10.2307/1403699

Wing, J. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33-35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

Wing, J. (2014). Computational thinking benefits society. *40th Anniversary Blog of Social Issues in Computing.* http://socialissues.cs.toronto.edu/index.html%3Fp=279.html

Wolfram, S. (2016, 7 de septiembre). *How to teach computational thinking.* Wired. https://www.wired.com/2016/09/how-to-teach-computational-thinking/

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i2.104

INTERDISCIPLINA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA – CARACTERÍSTICAS GENUINAS DE LA PRÁCTICA INTERDISCIPLINAR ACADÉMICA

INTERDISCIPLINARITY IN MATHEMATICS EDUCATION – GENUINE FEATURES OF ACADEMIC INTERDISCIPLINARY PRACTICE

Jaime Huincahue
jaime.huincahue.a@gmail.com
Centro de Investigación de Estudios Avanzados del Maule,
Universidad Católica del Maule, Talca, Chile

RESUMEN

Cuando el propósito de la Educación Matemática se vierte hacia el enriquecimiento de la comprensión de la realidad, los esfuerzos por innovar invitan a reconocer a la matemática más allá de su sentido tradicional y abstracto, estableciendo objetivos que crucen límites disciplinares para justamente entender y explicar la realidad del estudiante, y por ello, modelar entornos de interés. Este artículo sitúa como problemática central la búsqueda de componentes que caractericen lo que significa una tarea interdisciplinar cuando el problema requiere de modelos matemáticos para su realización en entornos genuinos. Para ello, se analiza un escenario en donde surgen modelos matemáticos, como es el trabajo interdisciplinar entre modeladores matemáticos y especialistas en otras disciplinas de contexto. Mediante un enfoque cualitativo se analizan seminarios del área durante dos semestres, identificando como resultados la existencia de componentes necesarios para la realización de prácticas académicas interdisciplinares, planteando como discusión la coherente intersección entre tales componentes identificados y las características de las tareas iniciales.

PALABRAS CLAVE:
Modelación matemática, Interdisciplina, Modeladores matemáticos.

ABSTRACT

When the purpose of Mathematics Education is to enrich the understanding of reality, efforts to innovate invite us to recognize mathematics beyond its traditional and abstract sense, establishing objectives that cross disciplinary boundaries to understand and explain the student's reality and, therefore, model environments of interest. This article establece as the central problem the search for components that characterize what an interdisciplinary task means when the problem requires mathematical models for its realization in genuine environments. To this end, a scenario is analyzed in which mathematical models emerge, such as interdisciplinary work between mathematical modellers and specialists in other disciplines in context. Using a qualitative approach, seminars in the area were analyzed over two semesters, identifying as results the existence of components necessary for the realization of interdisciplinary academic practices, and discussing the coherent intersection between such identified components and the characteristics of the initial tasks.

KEYWORDS:
Mathematical modelling, Interdisciplinarity, Mathematical modellers.

Recibido: 14 de febrero de 2022 , Aceptado: 16 de junio de 2022

1. Introducción[1]

La literatura sobre modelación matemática en investigación educativa es extensa. Las comunidades de investigación en el mundo han logrado evidenciar avances y resultados de interés en el aprendizaje del modelar, como así también en sus formas de enseñanza en todos los niveles de escolaridad. Los distintos estados de desarrollo de las líneas de investigación trazadas en la literatura (p. ej. Arrieta y Díaz, 2016; Stillman y Brown, 2019) invitan a difundir resultados de interés y conocer distintas formas de entender la actividad de modelar, pero además, a querer innovar y explorar en problemáticas que puedan atender el contexto social y cultural, y cómo podríamos contribuir a demandas actuales para la gente.

Una forma de orientar tales problemáticas en los niveles obligatorios en Chile es considerar lo que nos propone el actual currículo nacional, destacando que uno de los propósitos de las matemáticas es enriquecer la comprensión de la realidad del estudiante (Ministerio de Educación, 2021). Esta posición curricular muestra una valoración sobre el camino recorrido en modelación matemática en Chile, desde la consideración de una forma más de construir matemáticas, a transformarse en uno de los propósitos transversales de la Educación Matemática en Chile; además, tal posición expresa una concordancia frente a cómo la actividad educativa de las matemáticas adquiere sentido y forma en el mundo.

Al reflexionar en tal orientación, el papel que juega la realidad en la práctica educativa nos invita a pensar en cómo ciertas situaciones o realidades son propicias para la construcción de conocimiento matemático, como efectivamente sucede en una tarea de modelación. Una manera de observar la realidad es caracterizar un entorno identificable para el saber del estudiante (su realidad), de tal manera que las problemáticas puedan ser comprendidas. Desde el interés de esta investigación, se valoran los escenarios interdisciplinares como una expresión de la realidad y como una fuente fecunda para las prácticas educativas, en donde la matemática puesta en uso refleja una visión distinta a la tradicional y abstracta noción de las ideas y modelos matemáticos, dando un sentido y un significado al saber. De esta manera, los modelos matemáticos subyacentes pueden expresar mayormente su potencial en el diálogo interdisciplinar, permitiendo cambiar la perspectiva de la Educación Matemática hacia la amplitud y profundización de la comprensión del contenido matemático por distintas disciplinas, ampliando las redes de conocimiento y la valoración por parte del estudiante de las ideas matemáticas en entornos significativos para ellos (Borromeo-Ferri, 2019).

Por otra parte, se destaca que no se pretende desvalorizar en ningún sentido a la abstracción como una característica esencial de las matemáticas, ya que el disfrute de las matemáticas puras, abstractas y sin necesidad de un contexto efectivamente existe y habita en parte de los estudiantes. Sin embargo, para pensar en una Educación Matemática para todos, es necesario integrar tanto la visión tradicional de las matemáticas y los usos del conocimiento matemático, de una manera recíproca y horizontal. Esta visión no se trata de un fenómeno de adherencia al discurso matemático escolar (Cordero et al., 2015), sino que de integración respecto a las distintas preferencias que cohabitan en el aula de matemáticas (p. ej. en Huincahue et al. [2021] se muestra la pluralidad de preferencias que suceden en las aulas chilenas). Por ello, el presente escrito es una invitación a un enfoque de usos de los modelos matemáticos mediante situaciones interdisciplinares, en donde el sentido de la matemática no se centra en la abstracción, sino que en la comprensión de la realidad del estudiante. De esta forma, existe una doble postura en lo que se puede entender por aprendizaje de las matemáticas: por una parte, la visión tradicional tiene una valoración importante y debe ser considerada como una matemática para el aprendizaje, y por otra, es necesario dar un enfoque de oposición a la visión tradicional para reconocer otros tipos de usos del conocimiento matemático. De esta manera, el enfoque tradicional y los usos del conocimiento matemático se espera que sucedan integradamente en el aprendizaje del estudiante; ello, con la finalidad de que más estudiantes puedan acceder a la práctica educativa del profesor de Matemáticas y logren construir conocimiento matemático desde distintos escenarios que ofrezcan mayores alternativas de aprendizaje en el aula.

Dicho lo anterior, la investigación desarrollada habita en cómo entender tal funcionalidad del conocimiento matemático, pero desde entornos genuinos en donde se abordan problemas reales e interdisciplinares, cuyas expresiones de solución son vía modelos matemáticos. Tales espacios genuinos son posibles de identificar en las universidades o centros de investigación en Chile.

[1] Este texto tiene origen en la conferencia plenaria dictada en las XXV Jornadas Nacionales de Educación Matemática de Chile, realizada en diciembre de 2021. Una versión corta aparece en las actas de las jornadas (Huincahue, 2021).

Para esta investigación evocaremos entornos entre académicos investigadores que desarrollan proyectos de investigación relacionados a problemáticas territoriales, como son los problemas del riego agrícola y su optimización en épocas de sequía, o la operacionalización del transporte en una ciudad o la predicción de fenómenos ecológicos. Estos problemas poseen una naturaleza orgánicamente interdisciplinar, genuina, en donde los modelos matemáticos ofrecen un razonamiento lógico e hipotético deductivo, que en distintos grupos y comunidades son valoradas para integrarse en su práctica académica. Concordando con Frejd y Bergsten (2018), tales prácticas son la *raison d'être* de la modelación matemática y, por lo tanto, de la educación matemática interdisciplinar. Dicho lo anterior, una pregunta que orienta la presente investigación es: **¿Cómo es la práctica académica en problemas y grupos interdisciplinares que son atendidos con modelos matemáticos?**, y de forma más específica: **¿Cómo se construyen tales modelos matemáticos?** Atender tales preguntas, invitará a describir teóricamente el modelar matemáticamente, además de discutir la relevancia de tal descripción para el estudio de la modelación matemática en educación, centrando en esta área la innovación del presente estudio.

2. Marco conceptual

Usualmente, tratar una educación matemática interdisciplinar acarrea una serie de desafíos educativos para los profesores, como por ejemplo los tipos de tareas, ya sean enmarcadas en tareas con un inicio y un fin en una sesión de clase, o proyectos que se desarrollan en un tiempo prolongado. Existen argumentos para ambos bandos sobre los beneficios o dificultades de implementar proyectos de largo aliento, y uno de ellos que se propone regularmente es la dificultad curricular de ser implementado, argumentando que no hay tiempos para ello. Sin embargo, esta dificultad va en contra de buscar entornos diversos para la atención de los Resultados de Aprendizaje esperados; además, técnicas o metodologías como Aprendizaje Basado en Proyectos (Flores-Fuentes y Juárez-Ruiz, 2017), o actividades del tipo STEAM (Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics [Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Artes y Matemáticas]) (Aravena et al., 2020) poseen como motor esencial aspectos como la reflexión, la metacognición y momentos de *feedback*, tanto del profesor como de otras fuentes externas de conocimiento, lo que implica en muchas ocasiones la continuidad de actividades en periodos de más de una clase. Tales metodologías poseen importantes resultados y, por lo tanto, las propuestas didácticas como proyectos de innovación que pueden durar una o más sesiones de trabajo son entornos propicios para la construcción del saber matemático.

Otro desafío es ser capaz, como profesor de Matemáticas, de dialogar con otras disciplinas y con sus profesores/as representantes en una comunidad educativa, que en ocasiones derivan en escenarios que definen problemas de otra disciplina en donde las matemáticas brindan desarrollo de conocimiento, tanto para las matemáticas como para la resolución del problema en juego. Estos entornos traen consigo desarrollo de alcances matemáticos –que muchas veces son expresados por modelos matemáticos–, en donde los significados ocupan un lugar determinado en la disciplina de contexto y son fuente de estudio el cómo se producen los procesos de transposición del conocimiento matemático (Stillman, 2019) entre la práctica interdisciplinar del aula y la práctica interdisciplinar académica.

2.1 La práctica interdisciplinar en entornos académicos

La principal fuente para comprender cómo sucede la práctica interdisciplinar es justamente a partir de comprender cómo grupos y comunidades enfrentan problemas de tal naturaleza. Personas que trabajan en áreas como la ingeniería, ecología o agronomía y que se vinculan con modeladores matemáticos, son grupos de desarrollo científico y tecnológico que utilizan y/o construyen modelos desde necesidades presentes en sus respectivas áreas, siendo tales escenarios buenos representantes de lo que significa una práctica interdisciplinar. Continuando el lenguaje de la literatura, nombraré a tales personas como modeladores matemáticos académicos, unos con especialidad en las matemáticas, y otros, especialistas en alguna disciplina de contexto.

Desde la postura de Klein (2013), consideraremos que:

> Interdisciplinarity integrates information, data, methods, tools, concepts, or theories from two or more disciplines or bodies of knowledge to address a complex question, problem, topic, or theme. Work may occur individually or in teams, though in the latter case, communication is essential to successful collaboration. (p. 13)

Los equipos interdisciplinarios necesariamente requieren tener relaciones que los unan a partir de una tarea en común, lo que generalmente, equivale a caracterizar y desarrollar un problema u objeto de forma colaborativa. Concordando con Williams et al. (2016), este objeto en común brinda una figura de trabajo recíproco entre las disciplinas, en donde los

procesos de colaboración otorgan una valoración sinérgica a favor del problema u objeto de estudio.
Entender de mejor manera cómo suceden las prácticas interdisciplinares en entornos profesionales, permitirá reconocer implicancias educativas que admitan el continuo rediseño de la matemática escolar, sobre todo cuando actualmente se fomenta en los currículos mundiales los entornos interdisciplinares.

2.2 Modelos matemáticos

Los modelos matemáticos -y no matemáticos- poseen distintos grados de protagonismo en la educación y desde distintas áreas. En las ciencias básicas, es posible identificar programas de investigación centrados en el aprendizaje de modelos y su enseñanza en la educación del profesor desde las ciencias experimentales (Belzen et al., 2019), reconociendo a los modelos como una impresión representacional de una situación o un organismo en cuestión, caracterizando a los modelos no como un fin en sí mismos, sino que como medios para la creación de sentido (Passmore et al., 2014). Esta situación se diferencia del escenario curricular nacional chileno, ya que los modelos matemáticos pueden ser un objetivo en sí mismos.

En general, los modelos matemáticos tienen la intención de hacer dialogar dos sistemas, comúnmente llamados realidad y matemáticas, los que pueden ser estudiados como sistemas a unir o relacionar. La primera opción ha sido la predominante en la literatura y en los currículos a nivel mundial, es decir, reconocerlos de forma separada para identificar componentes de relevancia en el acto de modelar con el fin de comprender a la actividad educativa en sus dificultades y etapas (Blum y Leiß, 2007; Kaiser, 2005; Lesh y Doerr, 2003). Paralelamente, distintos marcos teóricos en Didáctica de la Matemática han visualizado el modelar como la segunda opción, explorando horizontes emanados desde sus propios fenómenos y problemáticas teóricas, como son los Espacios de Trabajo Matemático (Lagrange et al., 2022) o la Teoría Socioepistemológica (Cordero, 2016).

2.3 Modeladores matemáticos en la práctica académica

Cuando no existe una intención educativa, la generación de modelos puede poseer múltiples usos y fuentes, que dependerán de cómo se guía su construcción o manipulación. Para el caso de problemáticas de investigación en entornos académicos, los modelos matemáticos generalmente persiguen comprender algún fenómeno para ser capaz de explicar, describir o predecir alguna situación, en donde el sistema (S) es un entorno, como por ejemplo la ecología, el clima o la biotecnología, reconociendo un conocimiento integrado de muchas disciplinas y dirigido por una pregunta (P), que con afirmaciones matemáticas (M) es posible de responder. Tal escenario descrito invita a considerar la siguiente definición sobre modelo matemático:

> A mathematical model is a triplet (S, P, M) where S is a system, P is a question related to S, and M is a set of mathematical statements $M=\{ \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n \}$ that can be used to answer P. (Velten, 2009, p. 12)

Una forma de describir a las personas que trabajan en modelos matemáticos en la academia es que, usualmente, provienen de diversas especialidades que se vinculan con modelos matemáticos. Para el contexto de este escrito, consideraremos a los modeladores matemáticos como matemáticos que trabajan con modelos; análogamente, los modeladores de la disciplina de contexto son personas que se especializaron en algún área del conocimiento (e. g. Biología, Agronomía, Ingeniería) y que trabajan con modelos. Esta caracterización ya ha sido utilizada en Huincahue y Vilches (2019).

En síntesis, la valoración de este escrito radica en el entender cómo ciertas comunidades cultivan y desarrollan el modelar desde entornos interdisciplinares, además de clarificar cómo, desde una transposición del conocimiento, es posible identificar qué características o componentes sostienen a la práctica interdisciplinar. A partir de esta búsqueda, es que se define y se sitúa la presente investigación, cuyos detalles vienen en la siguiente sección.

3. Metodología

Desde un enfoque cualitativo, los usos del conocimiento matemático en tales escenarios serán revelados mediante el uso del Análisis Temático (Braun y Clarke, 2006), con el fin de reconocer los significados que posee la práctica interdisciplinar en escenarios profesionales de modeladores matemáticos. Este marco metodológico usualmente es utilizado en estudios con características exploratorias o descriptivas, lo que es concordante con las preguntas declaradas en la sección 1.

3.1 Contexto de la investigación

Los participantes fueron académicos y estudiantes del Doctorado en Modelamiento Matemático Aplicado, programa de postgrado acreditado y único en Chile. El estudio solamente consideró dos líneas de investigación que se desarrollan en el programa, denominadas Sistemas Ecológicos (S1) y Sistemas Agrónomos y Silvoagropecuarios (S2), funcionando un seminario correspondiente para cada línea de investigación, el que además es parte de la matriz curricular del programa de doctorado.

Ambos seminarios funcionaron periódicamente todo el año 2021, con una duración promedio de 90 minutos aproximadamente cada sesión. Los participantes de S1 fueron dos modeladores matemáticos, tres modeladores de la disciplina de contexto (especialistas en Ecología Evolucionaria, Neuroetología Cognitiva y Ecología) y un/a estudiante. Las personas que conformaron S2 fueron dos modeladores matemáticos, un modelador de la disciplina de contexto (especialista en Biotecnología) y un/a estudiante; la diferencia numérica de participantes radica en los propósitos que los estudiantes presentan como proyectos de investigación, siendo necesario reunir a investigadores que sean próximos a las propuestas que habitan en las líneas de investigación declaradas. En ambos seminarios fue permitida la participación del investigador responsable del presente estudio como observador, con cámara apagada y pudiendo grabar el audio de cada sesión. Así, se recopiló la grabación de las sesiones de cada uno de los seminarios, junto con documentación clave de las actividades, como son los programas clase a clase y el libro curricular (documento que presenta el programa doctoral, describiendo información clave como el perfil de egreso, desarrollo profesional y académico, descripción de líneas de investigación, estructura curricular, actividades curriculares, progresión de competencias, entre otra información). Las grabaciones han sido transcritas, y todos los datos han sido analizados utilizando el software Atlas.ti. Actualmente, los seminarios siguen activos durante el segundo año, por lo que la investigación se presenta en un estado de avance.

La justificación de analizar este entorno académico recae en su propia singularidad sobre cómo sucede la práctica interdisciplinar, práctica que es autodeclarada en su libro curricular e identificado en Huincahue y Vilches (2019) como un entorno interdisciplinar académico, en donde se estudia el mismo programa de doctorado pero con distintos objetivos y fuentes de recopilación de datos; además, se destaca que en los trabajos de Frejd y Bergsten (2016, 2018) también se realizan estudios sobre entornos de modelamiento pero en escenarios profesionales, es decir, escenarios de esta naturaleza son de suficiente interés por sí mismos para las eventuales implicancias educativas por identificar.

La visión del programa doctoral es atender una problemática de la disciplina de contexto que pueda ser respondido con la construcción y/o uso de modelos matemáticos. Específicamente, el programa tiene especial énfasis en el abordaje de problemáticas con modelos dinámicos; algunas técnicas que son implementadas tienen que ver con ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, ecuaciones en diferencias o ecuaciones diferenciales impulsivas, exigiendo al proceso de análisis de datos una mirada matemática para entender y comprender los diálogos híbridos. En este sentido, el problema es quién dirige y demanda naturalmente la matemática acorde a atender, priorizando en todo momento el problema y buscando la matemática y el modelo matemático que mejor responde al problema.

3.2 Procedimiento

El diseño de análisis inicia, según la descripción esquematizada en Braun y Clarke (2006), por seis fases: 1) familiarización con los datos, 2) generación de códigos iniciales, 3) búsqueda de temas, 4) revisión de temas, 5) definición y nombramiento de temas, y 6) producción del reporte. La primera consistió en la lectura de toda la información, para plantear un primer entendimiento de los conceptos claves de la medida en ambos escenarios. En la segunda fase se realizó una codificación descriptiva, la cual permitió reconocer ciertos códigos de naturaleza más general, generando así potenciales temas. En la fase 3 se llevó a cabo un refinamiento del proceso de codificación, a partir de la búsqueda de patrones asociados a los objetos teóricos que se pretenden caracterizar en la construcción matemática. La fase 4 reunió los análisis de todas las asociaciones de códigos entre dos investigadores en paralelo, para después consensuar códigos discordantes. En este sentido, la fase 4 contempla una revisión entre las fases 1 y 2 para generar una primera versión del mapa temático. La fase 5 es centrada principalmente en el refinamiento del mapa temático, en donde se han generado las definiciones de temas para que el mapa temático represente fielmente a los datos. Finalmente, una expresión de la fase 6 es este escrito.

4. Resultados

El proceso de codificación fue orientado hacia la identificación de características que contribuyan a la construcción de modelos matemáticos. Desde una visión inductiva, la emergencia de características evidenciadas en los datos ha permitido establecer características que permitieron llevar a cabo la construcción y refinamiento de los modelos matemáticos que atienden las problemáticas de interés para cada seminario. En el transcurso del análisis, un foco de interés fue también determinar cuándo la práctica interdisciplinar falla, es decir, qué características obstaculizan el desarrollo de la práctica interdisciplinar en los escenarios descritos anteriormente, sirviendo como una fuente de información interesante para responder a la pregunta de investigación propuesta.

Los hallazgos encontrados en las sesiones de seminario han sido contrastados con los documentos claves de la investigación, como son los programas de clase y el libro curricular, ambos documentos han resultado esenciales para la triangulación de la información identificada. A continuación, se describen los cuatro temas principales que ha determinado el análisis, a partir de 74 códigos refinados en el procedimiento del análisis temático; posteriormente, se ha preferido identificar a ambas transcripciones de los seminarios como una gran base de datos, principalmente por su similitud en la práctica interdisciplinar, lo que ha implicado eliminar códigos repetidos y tomar decisiones sobre la unión de códigos similares, o bien, la creación de códigos a partir de otros dos. Este segundo proceso de refinamiento ha llevado a definir 41 códigos que expresan cómo es la práctica académica en problemas interdisciplinares que son atendidos por modelos matemáticos, además de indagar en el proceso de construcción y su uso. El listado definitivo de códigos se encuentra en la Tabla 1.

Tabla 1

Códigos resultantes del análisis del libro curricular y de los Seminario de Sistemas Ecológicos (S1) y Seminario de Sistemas Agrónomos y Silvoagropecuarios (S2)

Fuentes de información	**Códigos**
Libro curricular y plan clase a clase	Preparación disciplina de contexto, modelo mat – análisis, modelo mat – simulación computacional, modelo mat – características, modelo mat – usos, modelador mat – práctica, modelador mat – habilidades, modelador mat – conocimiento, modelamiento mat. – características, modelamiento mat –caracExtrCtxo, modelamiento mat – caracExtrMat, modelamiento mat – entornos, modelamiento mat – interdisciplina, modelamiento mat – presencia, modelamiento mat. – proceso, modelamiento mat. – validación.
S1 y S2	Necesidad, objeto de estudio, proceso, estrategias de validación, valoración de modelos, trabajo en equipos, rol modelador matemático, rol modelador disciplina, rol estudiante, capacidad de trabajo, egos en el trabajo interdisciplinar, validación computacional, validación simplificación, validación mod. tradicionales, interpretación, retribución DiscCntxto-debilidades, retribución DiscCntxto-fortalezas, comunicación recíproca, esfuerzo comunicativo, matemática como metodología, efectos interdisciplinares-matemática, efectos interdisciplinares-disciplina de contexto, adecuación de los problemas, cruces disciplinares, valoración de otra disciplina.

Nota. Elaboración propia.

4.1 Reconocimiento de un problema

Ambos seminarios autodefinieron un primer objetivo: identificar un problema que sea de interés, de tal manera de que el/la estudiante elija qué problema desarrollará durante su proceso de formación doctoral. Esto significó que el problema debía ser de interés científico para la disciplina de contexto (Ecología y Biotecnología), implicando un gran esfuerzo en identificar un estado de arte para cada problema para validad la valoración científica, de tal manera que la problemática de contexto (y su solución) se transforme en un resultado científicamente de interés. En ese sentido, la problemática es puramente interdisciplinar (en el sentido de Klein, 2013), ya que, al tener claridad frente a la problemática, es posible dilucidar que no es posible ser atendida con una disciplina por sí sola; se requiere de ambos conocimientos para que pueda ser respondido el problema.

> (…) la matemática actúa en la metodología del problema, y por eso es importante determinar muy bien qué ha sido publicado y lo que no, para determinar finalmente el problema, tu proyecto. (profesor a estudiante de S2)

En este extracto, el profesor da un cause hacia la forma en cómo la matemática se vincula con el problema, otorgando una característica que debe considerar el estudiante para concretar la problemática a definir. Esta instrucción es concordante con el libro curricular del programa, invitando a identificar de forma muy precisa la problemática a llevar a cabo.

4.2 El querer entender – La intelección en el desarrollo interdisciplinar

La acción de todas las personas involucradas en cada seminario posee un horizonte: el querer y tener la intención de entender el problema y su desarrollo. Esta acción es reflejada en los recíprocos e interesantes interrogatorios entre los modeladores de la disciplina de contexto y los modeladores matemáticos; todos, en conjunto con el/la estudiante, planteaban la intención de querer entender muy bien el problema y cómo era el raciocinio de la otra disciplina:

> (…) bueno, hay muchas cosas que todavía tengo que… bueno, leer mucho con respecto a lo del polímero, o sea, las cosas todavía no me quedan tan claras, qué bueno que son más definiciones, cosas que tengo que aprenderme. (estudiante de S2)

De esta forma, la acción intelectiva es de relevancia para el desarrollo de la práctica interdisciplinar, reconociendo distinciones en las formas de desarrollo de cada una de ellas. A modo de ejemplo, cada especialista tuvo que aprender sobre cómo eran los procesos metodológicos de la otra disciplina, ya que en una de ellas son esencialmente empíricos, mientras que en la otra poseen un carácter esencialmente hipotético-deductivo.

4.3 Relaciones entre disciplinas

Las formas de orientación de la problemática sitúan inherentemente a las disciplinas, mostrando que las matemáticas quedan al servicio del problema. No existe un conocimiento matemático previo que pretenda ser utilizado antes de entender la problemática; luego de una profunda comprensión de esta, se escoge a un área de las matemáticas para que sea atendida la situación mediante la construcción de modelos matemáticos, ya sean discretos, híbridos o continuos. De esta manera, las relaciones entre las disciplinas invitan a pensar que ninguna de ellas adquiere el protagonismo, sino que el problema es el protagonista de la práctica interdisciplinar, y cada una de las disciplinas aporta para la construcción de modelos matemáticos: la matemática desde una visión esperada, y la disciplina de contexto como un ente validador de las hipótesis que acarrea un modelo matemático.

> Cuando la formalidad del modelo es de tipo matemática, entonces el derivar consecuencias es un análisis o proceso deductivo estrictamente lógico. Las conclusiones formales (matemáticas) tienen validez en dicho plano, es decir, como juicios inferidos desde proposiciones de partida (hipótesis relacionales) supuestamente verdaderas. ¿Son verdaderos estos juicios como conclusiones de la realidad?, esto es, efectos concretos del fenómeno planteado. Aquí la única respuesta posible es: depende, y ¿de qué depende?, pues bien, de la calidad de las hipótesis instaladas al construir del modelo. (Libro curricular, p. 6)

En el libro curricular efectivamente se asignan valoraciones hacia las matemáticas y la realidad (expresada por la línea de contexto) según la problemática, esto quiere decir que las relaciones entre las disciplinas para el correcto funcionamiento de su práctica interdisciplinar académica requieren de un monitoreo de características de relevancia, como lo son los supuestos (o hipótesis) que sostienen la pertinencia de los parámetros que permitan la coherencia de los resultados esperados. En este sentido, las relaciones que suceden entre las disciplinas son de cuidado para la correcta orientación, tanto de la problemática como de su solución.

4.4 Prototipos de modelos

La forma de entender el problema y validar y ajustar las hipótesis vinculadas a los modelos matemáticos es mediante la generación de modelos matemáticos muy simples para atender el problema, con el fin de analizar comportamientos y coherencias en cuanto a la predicción que entregan los modelos, y lo esperado según los estudios empíricos que son sustentados por la disciplina de contexto. Esta característica invita a generar prototipo de modelos, en donde se analizan cuestiones “secundarias” frente a la problemática principal, pero se transforman en la base de toma de decisiones para la construcción de modelos matemáticos.

> (…) anula los valores de costo y transferencia [variables que son parte del modelo], para corroborar si primeramente el modelo funciona en ambientes sin competición. Entonces, para la próxima semana debes traer la simulación del comportamiento solo en un estado y ver si se condice con los resultados biológicos, ¿me explico?, para saber si está funcionando esa parte. (Indicación del profesor hacia el estudiante en S1)

En síntesis, el resultado principal de la investigación es el reconocimiento de 4 componentes esenciales que propician el trabajo interdisciplinar en modeladores matemáticos académicos. Estos componentes han sido descritos e identificados en ambos seminarios, logrando identificar rasgos que permitirán obtener ideas educativas en el marco del proceso de transposición del conocimiento.

5. Discusión

Los primeros resultados evidenciados muestran ciertas características que, desde un enfoque educativo, contribuyen a cómo entender y construir tareas en dominios interdisciplinares. A partir de estos, se puede interpretar que las tareas interdisciplinares requieren una clara orientación en la problemática de interés, ya que usualmente un problema interdisciplinar no tiene un camino predefinido para ser resuelto, por ello, es necesario que exista una pregunta precisa que oriente al problema y al trabajo esperado por los estudiantes, información que es concordante con lo documentado en las investigaciones de Frejd y Bergsten (2016, 2018). Esta pregunta debe poseer un alto sentido de entendimiento para el estudiante, ya que se espera de ellos, que tengan la intención de entender y resolver el problema (intelección). Esta situación ha sido ya documentada en Huincahue y Vilches (2019), validando aún más que esta característica es muy necesaria para una efectiva práctica interdisciplinar. En este caso, la valoración primaria de la tarea no debería recaer en la matemática o en la disciplina de contexto, sino que en la resolución misma del problema presentado. Esta situación es frecuentemente valorada en estudios más cercanos a la realidad del estudiante, como por ejemplo la educación matemática financiera (Cabrera-Baquedano et al., aceptado).

Finalmente, se destaca la importancia de que exista una progresión en los resultados esperados, por ello, la pregunta que oriente las tareas o proyectos en interdisciplina debería ser presentada de una forma progresiva según su respectiva complejidad, con un claro y delineado horizonte. Tomar una decisión de esta naturaleza permitirá ir validando los resultados que sostendrán la respuesta o explicación del problema, ayudando a tener un mayor grado de confianza al reconocer avances en la tarea y, por lo tanto, reforzando la idea de intelección. Este resultado, también, muestra concordancia con los estudios de Wake (2015) respecto a las formas de construcción de modelos matemáticos, al hacer alusión a la permanente construcción y deconstrucción de modelos, para su comprensión y progresión hacia su propósito.

Estos resultados y la relación con tareas exitosas de modelación que se enmarcan en desarrollos interdisciplinares, son resultados de interés para la educación del profesor de Matemáticas, pero insuficientes, ya que es necesario entregar más insumos de tareas de educación interdisciplinaria que puedan atender aspectos curriculares e integradores en la educación obligatoria nacional, capaces de desafiar a las comunidades educativas en definir espacios de comunicación formal en las escuelas entre profesores de distintas disciplinas, con el objetivo de que una disciplina surja en la clase de la otra, y viceversa. De esta manera, también existiría una valoración que puede ser más natural en el aula, una valoración asociada a un problema que puede ser claramente percibido y entendido por el/la estudiante.

Reconocimiento

Esta investigación ha sido financiada por el proyecto Fondecyt de Iniciación 2020, N 11201103 “Modelación, interdisciplina y la reciprocidad entre la matemática y el cotidiano – constructos teóricos y prácticos para el fortalecimiento de la formación del profesor”.

Referencias

Aravena, M., Rodríguez, M., y Barría, L. (2020). Caracterización de las habilidades STEM en procesos de etnomodelado con alumnos/as trabajadores/as migrantes haitianos/as de la ciudad de Talca. *Estudios Pedagógicos, XLVI*(2), 397–419. https://doi.org/10.4067/S0718-07052020000200397

Arrieta, J., y Díaz, L. (2016). *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación – Matemática Educativa.* Gedisa.

Belzen, A., Krüger, D., y Driel, J. (Eds.). (2019). *Towards a Competence-Based View on Models and Modeling in Science Education.* Springer.

Blum, W., y Leiß, D. (2007). How do teachers deal with modeling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical modeling (ICTMA 12): education, engineering and economics* (pp. 222–231). Horwood. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Borromeo-Ferri, R. (2019). Educación interdisciplinaria en la escuela – ejemplos y experiencias. *UCMaule,* (57), 25-37. https://doi.org/10.29035/ucmaule.57.25

Braun, V., y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3,* 77–101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Cabrera-Baquedano, A., Huincahue, J., y Gaete-Peralta, C. (aceptado). Tránsitos al ajustar modelos matemáticos interdisciplinares: el caso de la alfabetización financiera. *Uniciencia.*

Cordero, F. (2016). Modelación, funcionalidad y multidisciplinariedad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta, y L. Díaz (Coords.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación – Matemática Educativa* (pp. 59-88). Gedisa.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H., y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad.* Gedisa.

Flores-Fuentes, G., y Juárez-Ruiz, E. (2017). Aprendizaje basado en proyectos para el desarrollo de competencias matemáticas en bachillerato. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 19*(3), 71–91. https://doi.org/10.24320/redie.2017.19.3.721

Frejd, P., y Bergsten, C. (2016). Mathematical modelling as a professional task. *Educational Studies in Mathematics, 91,* 11–35. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9654-7

Frejd, P., y Bergsten, C. (2018). Professional modellers' conceptions of the notion of mathematical modelling: ideas for education. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 50*(1), 117–127. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0928-2

Huincahue, J. (2021). Interdisciplina en Educación Matemática y su razón de ser. En D. M. Gómez, C. Cornejo, y M. V. Martínez (Eds.), *Actas de las XXV Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 36-43). Universidad de O'Higgins.

Huincahue, J y Vilches, K. (2019). Interdisciplinarity, mathematical modelling and Poincare's work: comparing conceptions about knowledge construction. *Journal of Physics: Conference series, 1160*, 012009.

Huincahue, J., Borromeo-Ferri, R., Reyes-Santander, P., y Garrido-Véliz, V. (2021). Mathematical Thinking Styles – the advantage of analytic thinkers when learning mathematics. *Education Sciences, 11*(6), 289. https://doi.org/10.3390/educsci11060289

Huincahue, J., y Vilches, K. (2019). Interdisciplinarity, mathematical modelling and Poincare's work: comparing conceptions about knowledge construction. *Journal of Physics: Conference series, 1160*, 012009. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1160/1/012009

Kaiser, G. (2005). Mathematical modelling in school. Examples and experiences. En H. W. Henn, y G. Kaiser (Eds.), *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation. Festband für Werner Blum* (pp. 99-108). Franzbecker.

Klein, J. T. (2013). Communication and collaboration in interdisciplinary research. En M. O'Rourke, S. Crowley, S. D. Eigenbrode, y J. D. Wulfhorst (Eds.), *Enhancing Communication & Collaboration in Crossdisciplinary Research* (pp. 11-30). Sage.

Lagrange, J-B., Huincahue, J., y Psycharis, G. (2022). Modeling in education: new perspectives opened by the theory of mathematical working spaces. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, y P. Richard (Eds.), *Mathematical work in educational context - The perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 247–266), Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_11

Lesh, R., y Doerr, H. (Eds.). (2003). *Beyond constructivism – Models and modeling perspective on mathematics problem solving, learning and teaching.* Lawrence Erlbaum. https://doi.org/10.4324/9781410607713

Ministerio de Educación. (2021). *Matemática. Currículum Nacional*. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Educacion-General/Matematica/

Passmore, C., Svoboda Gouvea, J., y Giere, R. (2014). Models in science and in learning science. En M. Matthews (Ed.), *International handbook of research in history, philosophy and science teaching* (pp. 1171–1202). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7654-8_36

Stillman, G. (2019). Preface. En G. A. Stillman, y J. P. Brown (Eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education* (pp. v–vii). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4

Stillman, G., y Brown, J. (2019). *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4

Velten, K. (2009). *Mathematical modeling and simulation. Introduction for scientists and engineers.* WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA. https://doi.org/10.1002/9783527627608

Wake, G. (2015). Preparing for workplace numeracy: A modeling perspective. *ZDM Mathematics Education, 47*(4), 675–689. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0704-5

Williams, J., Roth, W-M., Swanson, D., Doig, B., Groves, S., Omuvwie, M., Borromeo-Ferri, R., y Mousoulides, N. (2016). *Interdisciplinary Mathematics Education A State of the Art.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42267-1_1

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

PROPUESTAS DIDÁCTICAS

https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i2.102

APRENDIZAJE DE NÚMEROS RACIONALES A PARTIR DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

LEARNING OF RATIONAL NUMBERS THROUGH SEMIOTICS REPRESENTATIONS

Dafne Aguilar Terrones
dafne.aguilar@alumno.buap.mx
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

José Gabriel Sánchez Ruiz
josegsr@unam.mx
Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México

Gladys Denisse Salgado Suárez
gladys.salgado@udlap.mx
Universidad de las Américas Puebla, Puebla, México

RESUMEN

A pesar de los grandes esfuerzos en tiempo y dedicación para lograr los aprendizajes esperados del currículo escolar, los números racionales siguen siendo un tema de alta complejidad para los estudiantes de bachillerato porque apenas si llegan a la comprensión de los conceptos más básicos y elementales. A partir de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Raymond Duval, se diseñaron e implementaron tres estrategias de enseñanza basadas en distintas representaciones semióticas con los planteamientos de la Ingeniería Didáctica para favorecer el aprendizaje de los números racionales en estudiantes de primer año de bachillerato. Además, se diseñó y aplicó una misma actividad que sirvió como pretest y postest para comparar resultados y podernos dar cuenta de si la estrategia didáctica ayudó a la adquisición del concepto de número racional. A partir de los resultados obtenidos, pudimos concluir que las actividades sirvieron para incrementar el aprendizaje del concepto de número racional.

PALABRAS CLAVE:
Números racionales, Representaciones semióticas, Ingeniería didáctica, Estrategia didáctica.

ABSTRACT

Despite the great efforts in time and dedication to achieve the expected learnings contained in the school curriculum, rational numbers continue to be a highly complex subject for high school students because they barely understand the most basic and elementary concepts. Based on Raymond Duval's Theory of Semiotic Representation Records (TRRS), three teaching strategies based on different semiotic representations were designed and implemented with Didactic Engineering approaches to favor the learning of rational numbers in first year high school students. In addition, the same activity was designed and applied, which served as pretest and posttest to compare results and to be able to realize if the didactic strategy helped the acquisition of the concept of rational number. From the results obtained, we were able to conclude that the activities served to increase the learning of the concept of rational number.

KEYWORDS:
Rational Numbers, Semiotic Representations, Didactic Engineering, Didactic Strategy.

Recibido: 9 de febrero de 2022 , Aceptado: 16 de junio de 2022

1. Problemática

Dentro de las matemáticas, los números racionales constituyen un campo numérico de gran importancia, tanto desde el punto de vista matemático, como por su utilidad en el procesamiento e interpretación de situaciones de la vida cotidiana (Obando, 2003).

Existe una vasta cantidad de ejemplos que muestran las dificultades, por ejemplo: la fracción se piensa como dos números naturales separados por una "rayita" (vínculo) y no como una relación cuantitativa entre la parte y el todo; o el error común de los alumnos al sumar varias fracciones sumando numeradores y denominadores respectivamente. Existen otras que se mencionan en la Tabla 1.

Tabla 1

Dificultades estudiantiles con respecto a números racionales

Tipo de dificultad	Dificultad específica	Autor y año
Conceptos erróneos	1. La fracción se piensa como dos números naturales separados por una "rayita". 2. Conceptualizar fracciones impropias: ¿por qué el numerador es mayor que el denominador? 3. Identificar de entre un grupo de números reales, cuáles son racionales. 4. Establecer relación de orden entre números fraccionarios y representarlos en la recta numérica. 5. Entender que hay un número infinito de números entre dos fracciones o decimales.	1, 2: Obando (2003). 3, 4: Cabañas (2004). 5: McMullen et al. (2018).
Carente dominio de propiedades	1. En la suma de fracciones, sumar numeradores y denominadores entre sí, es decir, uso del modelo lineal aditivo como algoritmo. 2. Aplicar mal las propiedades de la suma y la multiplicación, así como la ley de los signos y potenciación, en problemas y operaciones aritméticas. 3. Diferencia de los números racionales con respecto a números naturales.	1: Obando (2003); Cabañas (2004). 2: Cabañas (2004). 3: Geary et al. (2017); González-Forte et al. (2019); Smith (1995); Van Dooren et al. (2015).
Dificultad por sus múltiples representaciones	1. No aceptan la congruencia geométrica en las partes para garantizar su igualdad, es decir, dificultad en identificar en modelos las partes de un todo (gráficos, pictográfico, geométrico). 2. Transformar números decimales a fracciones-	1: Obando (2003); Cabañas (2004). 2: Cabañas (2004).
Lenguaje matemático	1. No identifican el uso del paréntesis como algoritmo de la multiplicación. 2. Dificultad en la traducción del lenguaje matemático al común.	1, 2: Cabañas (2004).

Nota. Elaboración propia.

A partir de esto surge el siguiente *Objetivo Genera*l:

Implementar estrategias didácticas siguiendo el currículo escolar para la enseñanza de los números racionales, fomentando la evocación y transformación de imágenes mentales y haciendo uso de distintas representaciones semióticas para disminuir las dificultades presentes en los estudiantes de primero de bachillerato.

2. Marco teórico

2.1 Semiosis y pensamiento humano

El enfoque semiótico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas nació a raíz de la dificultad sobre la compresión y la necesidad de recurrir a otros tipos de representación que constituyen al lenguaje de la matemática (Cervantes et al., 2017). La Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (TRRS) fue creada por Raymond Duval.

Esta teoría sostiene que no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación. Los registros de representación semiótica constituyen los grados de libertad de los que puede disponer un sujeto para objetivarse él mismo una idea aún confusa, para explorar las informaciones o, simplemente, para comunicarlas a un interlocutor (Duval, 2017). Dichas representaciones se expresan a través de cuatro registros: lenguaje natural (representación oral, escrita), numérica (entera, fraccionaria, decimal), figural o gráfica (lineales, planas o espaciales) y alfanumérica (algebraicas) (Díaz-Godino et al., 2015).

El interés fundamental para los investigadores en didáctica de la matemática es la adquisición del concepto matemático por parte del alumno, lo que se denomina noética; ahora bien, no hay noética sin semiótica, es la semiótica la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noética (Oviedo et al., 2012). Los sistemas semióticos deben permitir cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación (Figura 1) (Duval, 2017): En primer lugar, la formación consiste en constituir una marca que sea identificable como una representación de alguna cosa en un sistema determinado. Después, el tratamiento consiste en transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias del sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. Finalmente, la conversión también es una transformación de las representaciones producidas en un sistema de representaciones hacia otro sistema, de manera tal que estas últimas permitan explicar otras significaciones relativas a aquello que es representado. La relación entre semiosis y noesis concierne únicamente a los sistemas que permiten estas tres actividades cognitivas de representación y no a todos los sistemas semióticos.

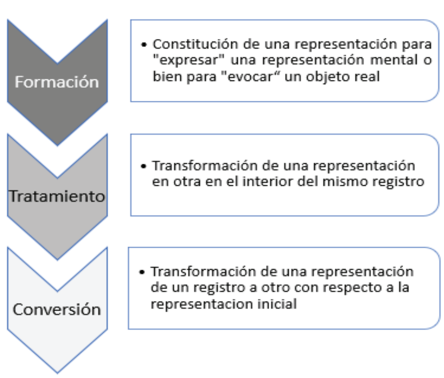


Figura 1. Actividades cognitivas de representación inherentes a la semiosis. Nota. Elaboración propia.

El pasaje de una representación a otra mediante la conversión se hace de manera espontánea cuando ambas representaciones son congruentes, es decir, cuando se cumplen los siguientes tres criterios y, al no cumplirse alguno, no se genera congruencia (Duval, 2017):

- Correspondencia semántica entre las unidades significantes que se asocian de un registro a otro.
- Univocidad semántica, la cual consiste en que a cada unidad significante del registro de salida le corresponde una única unidad significante en el registro de llegada.
- Conservar el orden, se refiere a una correspondencia entre registros, al organizar las unidades significantes.

3. Metodología

Los informantes fueron un grupo conformado por catorce estudiantes de primer año de bachillerato, pertenecientes a la escuela Woodcock The British School, ubicada en la junta auxiliar de Momoxpan en el municipio de San Pedro Cholula. El análisis de la investigación fue de tipo cuantitativo. La validación de pretest y postest, así como la validación de las actividades, se realizó mediante el juicio de expertos. A consecuencia de la pandemia previamente vivida, la aplicación de las actividades 1, 2 y 5 se realizaron mediante formularios virtuales con respuesta de selección múltiple. Las actividades 3 y 4 se realizaron en el salón de clases virtual mediante la cuantificación de respuestas correctas por parte de los estudiantes, así como la fluidez en el desarrollo de las actividades. La secuencia didáctica se diseñó a partir de la Ingeniería Didáctica.

3.1 Ingeniería Didáctica

La Ingeniería Didáctica surgió a principios de la década de 1980 y se ha desarrollado continuamente desde entonces. De acuerdo con Artigue (2014), en la comunidad educativa denota principalmente una metodología de investigación basada en el diseño controlado, la experimentación de secuencias de enseñanza y la adopción de un modo interno de validación basado en la comparación entre los análisis a priori y a posteriori de estos. Sin embargo, desde su aparición, la expresión "ingeniería didáctica" también se ha utilizado para denotar actividades de desarrollo, refiriéndose al diseño y construcción de recursos educativos basados en resultados de investigación, así como al trabajo de los ingenieros didácticos (Artigue, 2014).

3.2 Fases de la Ingeniería Didáctica

Según Artigue et al. (1995), este proceso consta de cuatro fases. A continuación, se explican las fases con base en el trabajo de Pérez (2020).

3.2.1 Fase 1. Análisis preliminar

El objetivo es identificar y describir los obstáculos epistemológicos, didácticos y/o cognitivos que se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Este análisis está constituido por un conjunto de análisis en relación con el objeto matemático, como la enseñanza tradicional, las concepciones del alumno y las dificultades u obstáculos que determinan su evolución. Así mismo, en esta fase se describe el grupo de alumnos con los cuales se experimentará la propuesta didáctica, tal como la edad, género y conocimientos previos sobre el tema.

3.2.2 Fase 2. Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas

Esta fase tiene dos objetivos: el primero, concerniente al diseño de las actividades o sesiones de la propuesta didáctica, y el segundo, pertinente al análisis a priori, en el cual se deben considerar los resultados que se esperan de los alumnos, las intervenciones del profesor, y prever y analizar las dificultades que podrían enfrentar durante la resolución de las actividades.

3.2.3 Fase 3. Experimentación

Se refiere a la puesta en marcha de las actividades diseñadas, a la experimentación misma, en la cual se da la interacción propuesta por el profesor del alumno con el medio. Así mismo en esta fase se establece el contrato didáctico y se llevan a cabo los registros de las observaciones realizadas.

3.2.4 Fase 4. Análisis a posteriori y validación

Esta fase está constituida por el conjunto de datos recogidos durante la experimentación, tal como lo son las producciones de los alumnos hechas dentro o fuera de las sesiones, así como los resultados obtenidos por instrumentos externos a la propuesta didáctica. En tanto a la validación, Artigue et al. (1995) mencionan "que la confrontación de los análisis a priori y a posteriori, fundamentan en esencia la validación de las hipótesis formuladas" (p. 48). Esto se da en la comparación entre los comportamientos esperados y los que realmente sucedieron durante la experimentación.

4. Diseño de actividades

Las actividades se planearon y diseñaron a partir del enfoque de la Ingeniería Didáctica para crear una secuencia didáctica que consistió en un conjunto de cinco actividades, de las cuales la primera fungió como análisis preliminar y la quinta como análisis a posteriori y validación de la investigación.

4.1 Actividad 1 vs 5: Conocimientos previos vs Conocimientos adquiridos

Esta actividad se diseñó con el fin de comparar los conocimientos previos versus los conocimientos adquiridos en los informantes (ver Anexo 1). Cada reactivo se creó a partir de dos vertientes: la tabla de dificultades recopiladas de la literatura y de los conocimientos esperados que marca el currículo escolar de primero de bachillerato. Los temas por evaluar fueron:

- Identificación de números racionales dentro de un grupo de números reales.
- Operaciones con fracciones que cuentan con distintos e iguales denominadores.
- Conversión de fracciones mixtas a fracciones impropias y viceversa.
- Aplicación correcta de las propiedades de números racionales.
- Resolución de problemas con fracciones.
- Simplificación de fracciones y fracciones equivalentes[1]

4.2 Actividad 2: Simplificación y equivalencia de fracciones

Esta actividad se diseñó para ayudar a comprender al informante las relaciones que se generan entre dos números racionales mediante fracciones con igual numerador y denominador utilizando operaciones aritméticas de multiplicación o división entre sí, con el fin de obtener múltiplos o submúltiplos del número racional analizado (ver Anexo 2).

La actividad se trató de un juego que se dividió en dos etapas. La primera etapa consistió en relacionar ejercicios de simplificación de fracciones y fracciones equivalentes, y la segunda en el reforzamiento de la actividad anterior, teniendo el mismo objetivo, pero

[1] Este tema no se ve de manera independiente en el currículo escolar, simplemente se encuentra inmerso en los demás.

el tipo de respuesta fue dicotómica. El enfoque que se utilizó en el diseño de la actividad 2 de manera completa, es decir, incluyendo las dos etapas, fue basado en la TRRS.

A partir de los cuatro tipos de representación semiótica, cada ronda del juego de la primera etapa fue diseñada con una representación distinta fomentando la trasformación de los números racionales mediante tratamientos. Y como ronda final, es decir, en la quinta ronda, se presentaron los cuatro lenguajes para fomentar el uso de las transformaciones mediante la conversión.

La etapa dos de la actividad se diseñó a partir de los cuatro sistemas de representación semiótica, los cuales generan 16 posibles transformaciones entre conversiones de un sistema a otro y tratamientos dentro de cada sistema (Figura 2).

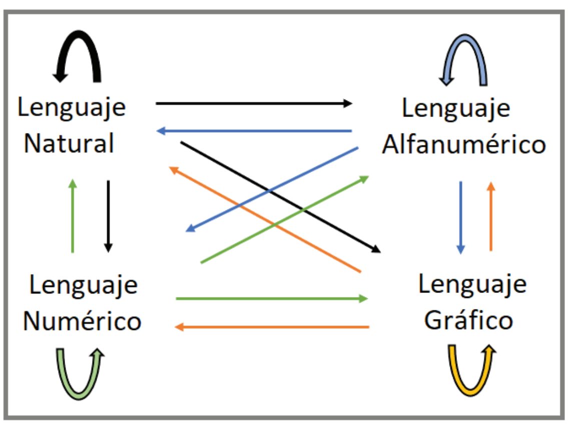


Figura 2. Tratamientos y conversiones entre distintos RRS.
Nota. Elaboración propia.

El orden de los ítems fue propuesto de tal manera que estuvieran representados los cuatro reactivos juntos pertenecientes a cada representación semiótica. Los primeros cuatro ítems muestran el lenguaje natural, los siguientes cuatro, el lenguaje alfanumérico, después, el lenguaje gráfico y finalmente, los últimos cuatro, el lenguaje numérico.

4.3 Actividad 3: Propiedades de los números racionales

Esta actividad fue diseñada como un juego con el objetivo de mejorar la comprensión de las propiedades de los números racionales en el estudiante a partir de los distintos registros de representación semiótica (ver Anexo 3). Para desarrollarse, requirió del uso de siete propiedades de los números racionales, las cuales fueron explicadas mediante el uso de las fracciones que aparecen en cada carta. En el diseño, cada carta requirió de conversiones y tratamientos entre números racionales.

Finalmente, se les presentó a los sujetos de estudio el resto de las propiedades, las cuales no fueron utilizadas en el juego, para plantearles la siguiente pregunta: ¿Por qué no fueron incluidas estas propiedades? Esto, con el fin de que ellos reforzaran su razonamiento sobre la aplicación de las propiedades.

4.4 Actividad 4: Situación en contexto

Esta actividad fue diseñada a partir del enfoque que tiene el currículo escolar SEP de primero de bachillerato (ver Anexo 4). Dicho currículo plantea “situaciones en contexto”, las cuales consisten en mostrar problemáticas reales que existen en el país, fundamentadas con estadísticas actuales, haciendo hincapié en que son los medios de comunicación quienes construyen y divulgan esa información entre la sociedad.

Por tal motivo, se decidió crear una situación en contexto relacionada con la pandemia a partir del virus SARS-Cov-2, con el fin de concientizar sobre la problemática que significa enfermarse. Se les planteó a los sujetos que analizaran los quehaceres del hogar que diariamente realizan versus los que harían si alguien en su hogar se enfermara. Esta situación fue desarrollada en una tabla de frecuencias mediante los números racionales. Cabe señalar que en esta actividad las frecuencias no reciben este nombre, aunque por definición lo son, porque al ser los números racionales el primer tema del currículo escolar en primero de bachillerato, aún no se cuenta con el conocimiento de las medidas de tendencia central, debido a que ese tema se ve posteriormente dentro del mismo semestre.

Esta actividad se diseñó con el fin de evocar la imaginación mental para lograr identificar los quehaceres realizados por los sujetos diariamente en su hogar y posteriormente contabilizarlos mediante transformaciones hacia elementos numéricos. Dichas transiciones requirieron de distintos registros de representación semiótica para lograrlo. A partir del lenguaje natural, el cual fue dado en la situación en contexto, los sujetos tuvieron que convertir esos quehaceres en lenguaje numérico y finalmente desarrollar la tabulación mediante el lenguaje gráfico.

5. Análisis de resultados

5.1 Actividad 2: Simplificación y equivalencia de fracciones

Los resultados se muestran mediante las Figuras 5, 6, 7, 8 y 9, en donde cada una de ellas describe los porcentajes obtenidos por cada una de las rondas.

5.1.1 Primera etapa del juego

En la primera ronda del juego, más del 75% de los sujetos de estudio lograron relacionar las parejas de cartas. De acuerdo con la Tabla 1, no presentaron dificultad en conceptualizar fracciones impropias. Sin embargo, en la relación correcta de cartas, las cuales fueron uno con tres, los porcentajes correctos fueron los menores y se atribuye a que presentaron dificultad en encontrar la fracción equivalente mediante números menores tanto en el numerador como en el denominador. Esta dificultad no se encontró de manera común en la literatura (Figura 3).

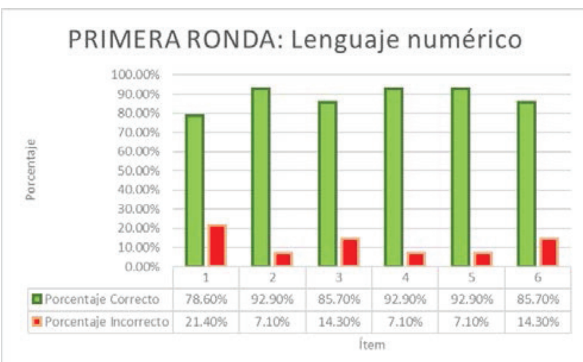


Figura 3. Porcentajes correctos e incorrectos sobre el lenguaje numérico
Nota. Elaboración propia.

La segunda ronda se desarrolló en el lenguaje verbal, en la cual disminuyeron los porcentajes correctos en todos y cada uno de los ítems con respecto a la ronda anterior (Figura 4). Esto se atribuye a que los sujetos de estudio presentaron dificultad para evocar imágenes mentales de los números racionales en el lenguaje verbal y transformarlos al lenguaje matemático. En la Tabla 1 se menciona esta dificultad de manera inversa. De acuerdo con ello, observamos que este conflicto cognitivo no es muy común en estudiantes de bachillerato.

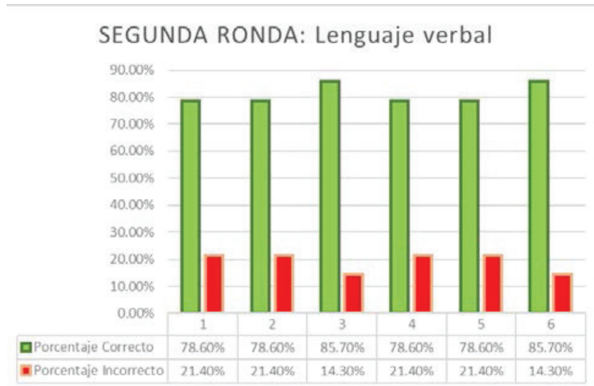


Figura 4. Porcentajes correctos e incorrectos sobre el lenguaje verbal
Nota. Elaboración propia.

En la tercera ronda se obtuvieron los mayores porcentajes de respuestas correctas de toda la primera etapa del juego (Figura 5). Los porcentajes correctos se atribuyen a la habilidad para transformar imágenes mentales. Es preciso señalar que en la literatura se reportó como dificultad común que los estudiantes no aceptan la congruencia geométrica en las partes para garantizar su igualdad, lo que no lleva a puntualizar que para nuestros sujetos de estudio esta dificultad no está presente de manera porcentualmente representativa.

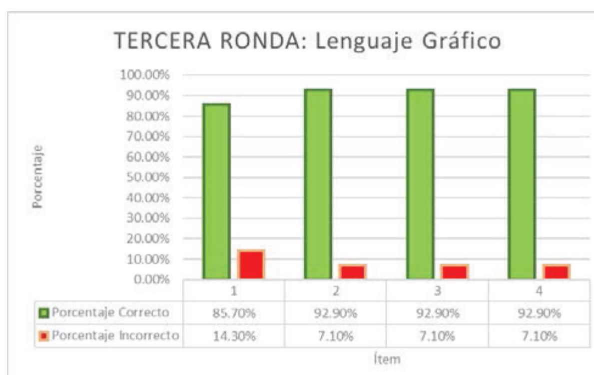


Figura 5. Porcentajes correctos e incorrectos sobre el lenguaje gráfico
Nota. Elaboración propia.

El lenguaje algebraico presentó la mayor dificultad en la resolución (Figura 6) y se puede atribuir a la carencia del dominio de propiedades entre las de los números racionales con respecto a los números naturales y así poder aplicarlas en los despejes de las ecuaciones de primer grado. Podemos observar que estas dificultades de los sujetos de estudio se encuentran mencionadas en la Tabla 1.

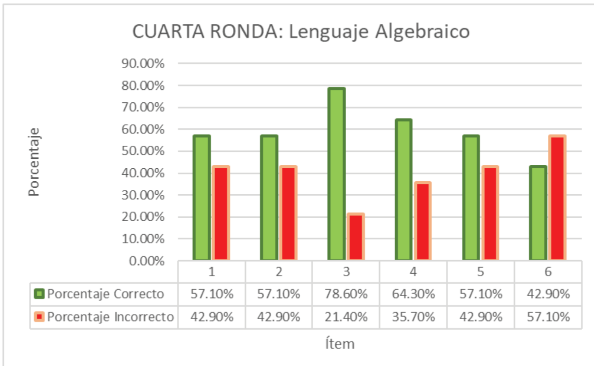


Figura 6 .Porcentajes correctos e incorrectos sobre el lenguaje algebraico. Nota. Elaboración propia.

La quinta ronda consistió en mezclar los cinco tipos de representación semiótica. En la Figura 7 se observa que en el ítem número tres, los sujetos de estudio no presentaron dificultad con la conversión del lenguaje verbal al lenguaje numérico (ítem cuatro) o viceversa. Eso se atribuye a que los números racionales plasmados en tales cartas utilizan magnitudes pequeñas. Sin embargo, en el ítem cuatro, el cual es la relación correcta con el ítem tres, el porcentaje fue el menor de toda la ronda, por lo cual queda la indagatoria sobre hacia qué conversión en registro de representación existe la dificultad en la transformación.

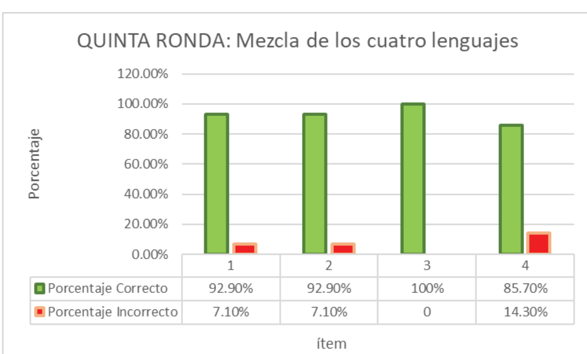


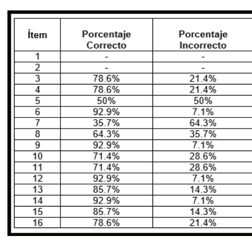
Figura 7. Porcentajes correctos e incorrectos sobre los cuatro RRS. Nota. Elaboración propia.

5.1.2 Segunda etapa del juego

Se presentan los resultados obtenidos en la etapa dos. A partir del planteamiento de 16 ítems mostrados en los cuatro lenguajes, es decir, cuatro ítems por cada una de las representaciones semióticas en los cuales se requirieron tratamientos y conversiones entre registros, se observa lo siguiente: los ítems uno y dos no se muestran porque son los ejemplos resueltos.

Los ítems con porcentajes menores al 70% (cinco, siete y ocho) pertenecen a preguntas dadas en el lenguaje algebraico, con lo que se observa el carente dominio de propiedades para diferenciar a los números racionales con respecto de los naturales (Tabla 1).

El sexto ítem también se encuentra expresado en el lenguaje algebraico y la solución mostrada se encuentra en el lenguaje gráfico. Como se observa, obtuvo un porcentaje alto, por lo que podemos concluir que la conversión al registro gráfico no les generó dificultades. El noveno ítem sufrió una conversión del lenguaje gráfico al lenguaje numérico y también obtuvo un porcentaje alto en respuestas correctas, lo que se atribuye a que los estudiantes no presentan dificultad en esta conversión entre registros. El ítem 12 y su solución se encuentra expresado en el lenguaje gráfico, obteniendo un 92%, lo cual se atribuye a que los estudiantes presentan habilidad de tratamiento de imágenes dentro del mismo registro de representación. El ítem 14 se encuentra dado en el lenguaje numérico con solución en el lenguaje verbal y se atribuye el porcentaje alto de respuestas correctas a que la fracción dada cuenta con magnitudes pequeñas (Figura 8).



Ítem	Porcentaje Correcto	Porcentaje Incorrecto
1	-	-
2	-	-
3	78.6%	21.4%
4	78.6%	21.4%
5	50%	50%
6	92.9%	7.1%
7	35.7%	64.3%
8	64.3%	35.7%
9	92.9%	7.1%
10	71.4%	28.6%
11	71.4%	28.6%
12	92.9%	7.1%
13	85.7%	14.3%
14	92.9%	7.1%
15	85.7%	14.3%
16	78.6%	21.4%

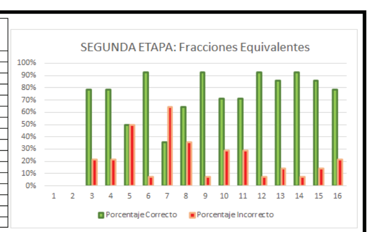


Figura 8 . Porcentajes obtenidos en la segunda etapa del juego Nota. Elaboración propia.

Los ítems anteriormente mostrados se clasificaron de acuerdo con el porcentaje de respuestas correctas. Además, se muestra en qué registro se encuentra cada intervalo, como se aprecia en la Tabla 2.

Tabla 2 . Clasificación del aprendizaje obtenido

Porcentaje de respuestas correctas	**Clasificación de acuerdo con el aprendizaje obtenido**	**Registro de representación del ítem**
0-50%	Carente	Lenguaje algebraico
51-70%	Bajo	Lenguaje algebraico
71-90%	Regular	Lenguaje verbal, Lenguaje gráfico, Lenguaje numérico
91-100%	Bueno	Lenguaje gráfico, Lenguaje numérico

Nota. Elaboración propia.

De las dos etapas aplicadas, con 39 ítems, solo tres de ellos obtuvieron un porcentaje igual o menor al 50% en respuestas correctas.

5.2 Actividad 3: Propiedades de los números racionales

Esta actividad se desarrolló en grupos. Se formaron tres equipos, de los cuales tanto el equipo 1 como el 2 se crearon con cinco estudiantes cada uno y el equipo 3 con cuatro estudiantes. Cada equipo desarrolló el juego, donde se evaluaron los criterios de acuerdo con una lista de cotejo.

5.2.1 Resultados del equipo 1

Este equipo estuvo integrado por cinco sujetos de estudio. Los criterios evaluados se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. Adquisición del concepto de número racional del equipo 1

Categoría	**Criterios de evaluación**	**Incorrecto (0)**	**Correcto (1)**
Comprensión correcta de los conceptos matemáticos	1. Definición correcta de fracción		✓
	2. Definición correcta de fracción impropia	✗	
	3. Identificación de números racionales		✓
	4. Identificación de relación de orden	✗	
Dominio de propiedades	1. Adición de fracciones	✗	
	2. Aplicación correcta de las propiedades de la multiplicación, así como de la ley de los signos y potenciación		✓
	3. Diferenciación de los números racionales con respecto a números naturales		✓
Comprensión por múltiples representaciones	1. Comprensión en la congruencia geométrica	✗	
Lenguaje matemático	1. Uso del paréntesis como algoritmo de la multiplicación		✓
	2. Traducción del lenguaje matemático al común	✗	
TOTAL:			**5**

Nota. Elaboración propia.

Este equipo presentó muchas dificultades para desarrollar la actividad. Aunque la participación de los informantes fue de manera aleatoria, cada uno de ellos tomaba mucho tiempo para contestar y, en varias ocasiones, ninguno quería participar, por lo que se asignó un orden para que ellos contestaran. El desarrollo de la actividad no fue fluido y todo el equipo tenía que participar para generar oraciones cortas y mal expresadas. A partir de la Tabla 1, se observó que los sujetos de estudio mostraron tener conceptos erróneos sobre las fracciones impropias, también presentaron dificultad para representar los números racionales en la recta numérica, así como errores en la traducción del lenguaje matemático al común. Tampoco lograron identificar en representaciones gráficas las partes de un todo. Finalmente, la adición de fracciones mostró un carente dominio de propiedades.

5.2.2 Resultados del equipo 2

Este equipo se conformó por cinco estudiantes. Los criterios evaluados se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4. Adquisición del concepto de número racional del equipo 2

Categoría	**Criterios de evaluación**	**Incorrecto (0)**	**Correcto (1)**
Comprensión correcta de los conceptos matemáticos	1. Definición correcta de fracción 2. Definición correcta de fracción impropia 3. Identificación de números racionales 4. Identificación de relación de orden		✓ ✓ ✓ ✓
Dominio de propiedades	1. Adición de fracciones 2. Aplicación correcta de las propiedades de la multiplicación, así como de la ley de los signos y potenciación 3. Diferenciación de los números racionales con respecto a números naturales		✓ ✓ ✓
Comprensión por múltiples representaciones	1. Comprensión en la congruencia geométrica		
Lenguaje matemático	1. Uso del paréntesis como algoritmo de la multiplicación 2. Traducción del lenguaje matemático al común		✓ ✓
TOTAL:			**10**

Nota. Elaboración propia.

Este equipo desarrolló la actividad de manera fluida, sin errores y con un orden aleatorio en participaciones. Todos y cada uno de los integrantes sabía qué responder y cuándo hacerlo, aunque la participación fue aleatoria. No presentaron dificultades para realizarla.

5.2.3 Resultados del equipo 3

Este equipo se conformó por cuatro sujetos de estudio. Los criterios evaluados se muestran a continuación (Tabla 5).

Tabla 5. Adquisición del concepto de número racional del equipo 3

Categoría	**Criterios de evaluación**	**Incorrecto (0)**	**Correcto (1)**
Comprensión correcta de los conceptos matemáticos	1. Definición correcta de fracción 2. Definición correcta de fracción impropia 3. Identificación de números racionales 4. Identificación de relación de orden		✓ ✓ ✓ ✓
Dominio de propiedades	1. Adición de fracciones 2. Aplicación correcta de las propiedades de la multiplicación, así como de la ley de los signos y potenciación 3. Diferenciación de los números racionales con respecto a números naturales		✓ ✓ ✓
Comprensión por múltiples representaciones	1. Comprensión en la congruencia geométrica		
Lenguaje matemático	1. Uso del paréntesis como algoritmo de la multiplicación 2. Traducción del lenguaje matemático al común		✓ ✓
TOTAL:			**10**

Nota. Elaboración propia.

El equipo 3 tardó más tiempo en desarrollar la actividad. Sin embargo, lo hizo de manera clara y coherente. Cada uno de sus integrantes entendió en qué consistía la actividad (Tabla 4).

5.3 Actividad 4: Situación en contexto

Esta actividad fue evaluada de manera grupal, es decir, los 14 sujetos de estudio participaron en ella, con el fin de crear una analogía de cómo plantea el currículo escolar las situaciones en contexto. Se generó una lista de cotejo (Tabla 6), la cual es similar a la de la actividad anterior, pero se descartaron algunas categorías que no son necesarias evaluar para el desarrollo de la actividad. Los resultados fueron los siguientes:

Tabla 6. Resultados de la evaluación grupal de la situación en contexto

Categoría	**Criterios de evaluación**	**Incorrecto (0)**	**Correcto (1)**
Comprensión correcta de los conceptos matemáticos	1. Identificación de números racionales 2. Adición de fracciones		✓ ✓
Dominio de propiedades	1. Aplicación correcta de las propiedades de la multiplicación, así como de la ley de los signos y potenciación 2. Diferenciación de los números racionales con respecto a números naturales		✓ ✓
Lenguaje matemático	1. Traducción del lenguaje matemático al común		✓
TOTAL:			**5**

Nota. Elaboración propia.

Al mostrar fluidez en el desarrollo de la actividad, el grupo obtuvo un puntaje de cinco unidades. Cabe señalar que la participación de cada estudiante se realizó de manera aleatoria.

A partir de la secuencia didáctica desarrollada (Actividades 2, 3 y 4), se aplicó el postest para realizar un análisis comparativo de los resultados con el pretest. Esto se muestra a continuación.

5.4 Actividad 1 vs. Actividad 5: Conocimientos previos vs. Conocimientos adquiridos

Se presenta el análisis de cada uno de los ítems.

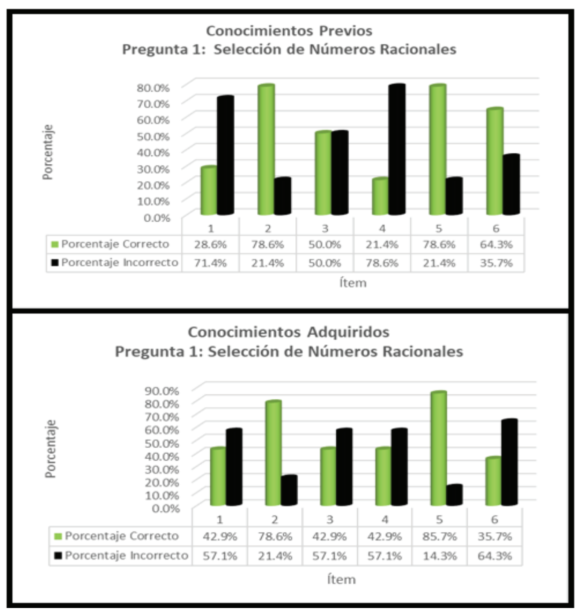


Figura 9. Comparación de resultados entre pretest y postest del primer ítem. Nota. Elaboración propia.

En la Figura 9 se observa que los porcentajes de respuestas correctas de tres ítems aumentaron y el de un ítem quedó igual. Sin embargo, el porcentaje de los ítems 3 y 6 disminuyeron por lo que se atribuye a una confusión en la lectura de la imagen, esto, debido a que en la actividad 2 se representaron solo algunas partes de la fracción en color y el resto en blanco. Sin embargo, en la actividad 3 todas las partes de la fracción estaban a color, es decir, se ocuparon dos tonos para representar la imagen.

Para el caso del sexto ítem, la disminución del porcentaje se atribuye a la diferente manera de expresar a las fracciones mixtas durante el desarrollo de la secuencia didáctica porque se representaron como $6\frac{1}{2}$ ó 6 ½, lo que pudo haber originado una confusión en la lectura numérica.

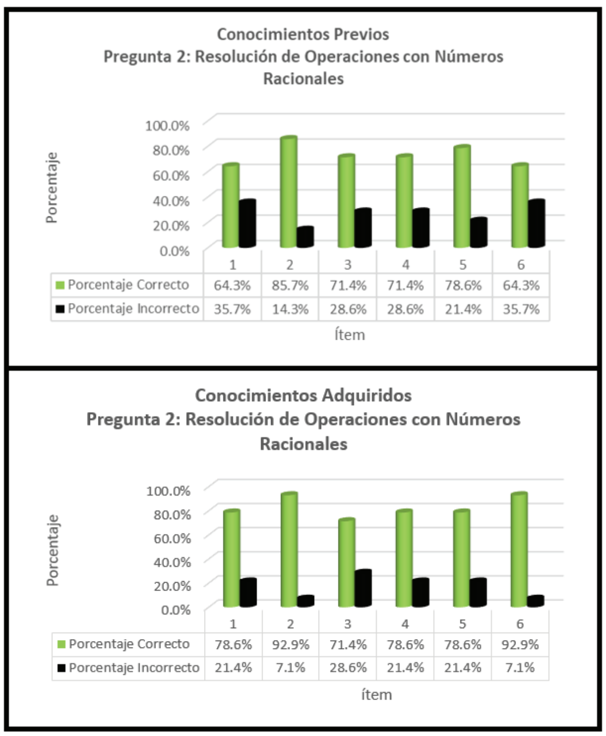


Figura 10. Comparación de resultados entre pretest y postest del segundo ítem. Nota. Elaboración propia.

La Figura 10 muestra los resultados de operar con distintos números racionales. En cuatro de seis ítems, el porcentaje de respuestas correctas aumentó y en los ítems 3 y 5 el porcentaje fue el mismo; en ambos casos (ítems 3 y 5) fueron los únicos en los cuales las fracciones *tenían diferente denominador*. Los informantes cuentan con carencia en el dominio de propiedades en la multiplicación y división. Además, se confirma la dificultad (Tabla 1) de aplicar mal las propiedades para la multiplicación de fracciones.

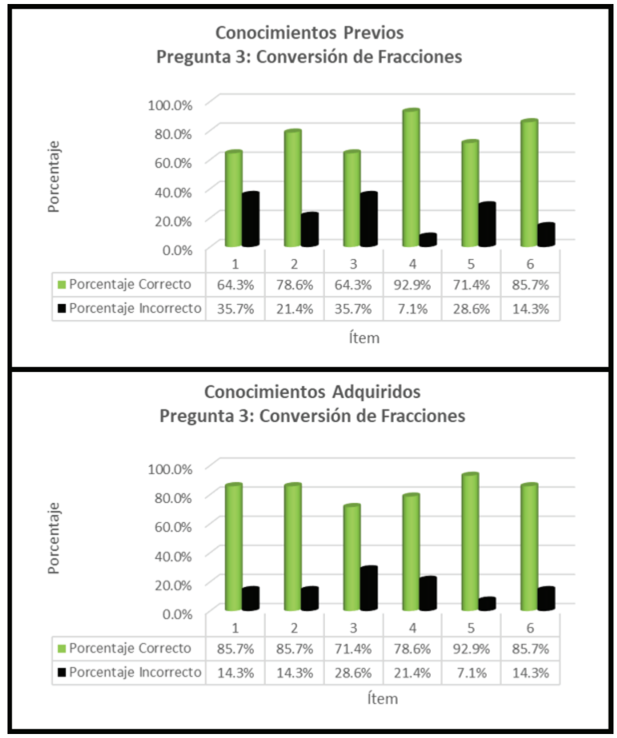


Figura 11. Comparación de resultados entre pretest y postest del tercer ítem. Nota. Elaboración propia.

La Figura 11 muestra un aumento en el porcentaje de respuestas correctas en cuatro de los seis ítems, en el sexto ítem el porcentaje es el mismo y en el cuarto ítem el resultado de respuestas correctas disminuyó en 14.3 puntos porcentuales. Esto se atribuye a que aún se presentan dificultades para trabajar con fracciones impropias.

Cabe señalar que todas las respuestas en los incisos presentaron un patrón procedimental por cada tres ítems, es decir, se diseñaron los reactivos de tal manera que, para cada pregunta, las posibles respuestas en distintos incisos tuvieran los mismos procedimientos de resolución, aunque fueran correctos o incorrectos.

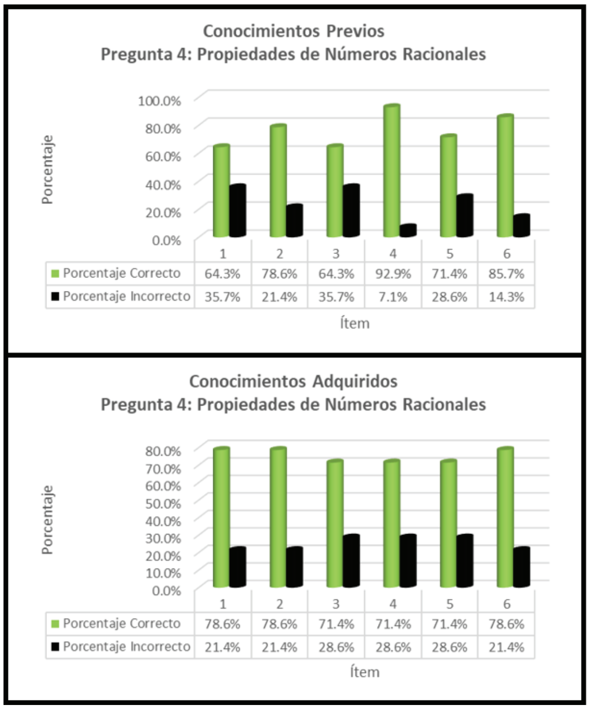


Figura 12. Comparación de resultados entre pretest y postest del cuarto ítem. Nota. Elaboración propia.

Los ítems 4 y 6 tuvieron un decaimiento porcentual, lo que nos lleva a inferir que los sujetos de estudio tuvieron confusión con la multiplicación entre recíprocos y con respecto al algoritmo del paréntesis como multiplicación, lo que es una dificultad que hallamos previamente en la literatura para el desarrollo de este proyecto.

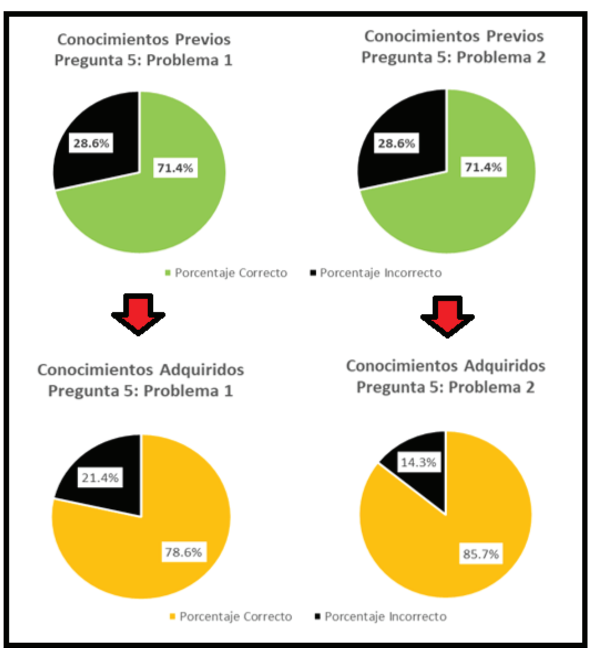


Figura 13. Comparación de resultados de los problemas 1 y 2 dados en el quinto ítem. Nota. Elaboración propia.

La Figura 13 representa la comparación de los resultados obtenidos a partir de dos problemas. Más de la mitad de los estudiantes logró analizar e interpretar numéricamente la situación planteada. Se observó que dentro del currículo escolar en el apartado de aprendizajes esperados es de gran importancia que el estudiante pueda resolver problemas de aplicación con el concepto de número racional.

6. Conclusiones

Si bien es de suma importancia trabajar con los cuatro registros de representación semiótica dentro del aula para lograr alcanzar la mayor adquisición de conocimiento con el concepto de número racional, es fundamental trabajar en el fortalecimiento del álgebra porque fue el registro que más dificultades presentó.
Cabe señalar que el registro que mayores porcentajes de respuestas correctas obtuvo fue el gráfico y en las secuencias didácticas que marca el currículo escolar no existen actividades que fomenten el uso del lenguaje gráfico para el concepto de número racional en primero de bachillerato. De acuerdo con la Tabla 1 de dificultades, se considera haber minimizado los errores en: suma de fracciones, problemas, congruencias geométricas y dificultad del lenguaje matemático al común.

Es preciso seguir fortaleciendo las propiedades de números racionales en multiplicación principalmente porque los estudiantes siguen presentando dificultad con el tema ya que también existe la vertiente de la mala interpretación del paréntesis como algoritmo de la multiplicación.

En futuras investigaciones se propone el diseño de actividades que sean anexadas a la secuencia didáctica en donde se haga hincapié en el uso del lenguaje gráfico.

Referencias

Artigue, M. (2014). Didactic Engineering in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 159-162). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_44

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamericano.

Cabañas, M. G. (2004). *Situaciones didácticas en la comprensión del concepto de número racional en alumnos de nivel medio superior.* Reportes de Investigaciones Terminadas, 181-187.

Cervantes, J. A., Ordoñez, J. S., García, M. D. S., y Hernández-Moreno, A. (2017). *Teoría de registros de representaciones semiótica.* Universidad Autónoma de Guerrero. https://www.researchgate.net/publication/315814323_TEORIA_DE_REGISTROS_DE_REPRESENTACIONES_SEMIOTICA/citations

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., y Contreras, Á. (2015). Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático. *ResearchGate: Departamneto de Didáctica de la Matemática, 1-21.*

Geary, D., Berch, D., Ochsendorf, R., & Mann, K. (2017). *Acquisition of complex arithme- tic skills and higher-order mathematics concepts.* https://acortar.link/kBgOhz

González-Forte, J. M., Fernández-Verdú, C., & Llinares, S. (2019). El fenómeno natural number bias: un estudio sobre los razonamientos de los estudiantes en la multiplicación de números racionales. *Quadrante, 28*(2), 32–52.

DGE, *Dirección General de Epidemiología.* (2020). [Archivo de video]. https://coronavirus.gob.mx/informacion-accesible/

Duval, R. (2017). *Semiosis y Pensamiento Humano, Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales* (2.a ed.). Programa Editorial Universidad del Valle.

McMullen, J., Van Hoof, J., Degrande, T., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2018). Profiles of rational number knowledge in Finnish and Flemish students – A multigroup latent class analysis. *Learning and Individual Differences, 66,* 70–77. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2018.02.005

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA, 8*(2), 157–182.

Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., y Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Aula Universitaria, 13,* 29-36. https://doi.org/10.14409/au.v1i13.4112

Pérez, M. (2020). *La transición del lenguaje numérico al algebraico en secundaria. Una Propuesta Didáctica* [Tesis de Maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. Repositorio Institucional- Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Smith, J. P. (1995). Competent Reasoning With Rational Numbers. *Cognition and Instruction,* 13(1), 3–50. https://doi.org/10.1207/s1532690xci1301_1

Van Dooren, W., Lehtinen, E., y Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction,* 37, 1–4. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.01.001

Anexo 1

ACTIVIDAD 1 vs 5:
Conocimientos previos vs Conocimientos adquiridos
Objetivo: Resolver operaciones con números racionales.
Instrucciones: Cada una de las preguntas debe ser resuelta con procedimientos o explicaciones completas, según sea el caso.

1. Marca con una (✓) el número que sea racional y con una (X) el que no lo sea, de la siguiente serie de números.

treinta doceavos	4^2		0.333 ...	(x)(1)	$6\frac{1}{7}$

2. Resuelve las siguientes operaciones y selecciona la respuesta correcta.

$a)\ \frac{2}{3}+\frac{7}{3}=$	*3*	$d)\frac{13}{4}\ \div -\frac{5}{4}=$	*2*
	14/9		*-65/16*
	2/7		*-13/5*
	9/6		*1*
$b)-\frac{1}{8}+\ \frac{4}{5}=$	*27/40*	$\text{e})\frac{6}{2}\ \div\ \frac{2}{5}=$	*17/5*
	- 1/10		*6/5*
	- 5/32		*15/2*
	3/13		*8/7*
$c)(\frac{6}{9})\ (-\frac{2}{11})=$	*16/33*	$\text{f})(\frac{1}{7})\ (\frac{5}{7})\ =$	*6/7*
	-4/33		*5/49*
	-11/3		*1/5*
	4/20		*6/14*

3. Realiza la conversión de las siguientes seis fracciones. Tres de fracciones mixtas a fracciones impropias y viceversa. Posteriormente, selecciona la respuesta correcta y subráyala.

1) $3\frac{1}{2}$	2) $1\frac{11}{7}$	3) $8\frac{9}{5}$	4) $\frac{5}{4}$	5) $\frac{19}{6}$	6) $\frac{8}{3}$
a) 4/2	a) 18/7	a) 49/5	a) $1\frac{5}{4}$	a) $1\frac{9}{6}$	a) $2\frac{2}{3}$
b) 7/2	b) 12/7	b) 13/5	b) $4\frac{1}{5}$	b) $6\frac{1}{9}$	b) $3\frac{1}{8}$
c) 5/2	c) 8/7	c) 17/5	c) $1\frac{1}{4}$	c) $3\frac{1}{6}$	c) $1\frac{8}{3}$

4. Responde verdadero o falso según corresponda en cada una de las siguientes expresiones.

Expresión	**Verdadero o falso**	**Expresión**	**Verdadero o falso**
a) $\frac{4}{7} + \frac{5}{9} = \frac{28+45}{63} = \frac{73}{63}$		d) $\left(\frac{11}{9}\right)\left(\frac{9}{11}\right) = 9$	
b) $\frac{3}{5} + \frac{10}{4} = \frac{10}{4} + \frac{3}{5}$		En este inciso, responde considerando si la expresión es igual a las dos opciones señaladas con el punto. e) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{1}{6} =$ • $\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) + \frac{1}{6}$ • $\frac{2}{3} + \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{6}\right)$	
c) $\left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{18}{28}$		f) $\frac{3}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) = 0$	

5. Resuelve los siguientes problemas.

a) Jorge trabaja en un taller de carpintería todas las tardes después del colegio para apoyar con el gasto familiar. Él talla cinco colibríes a la semana trabajando de lunes a viernes. En los dos primeros días ha tallado 5/2 y en el tercer día 3/6 del total. ¿Cuántos colibríes debe tallar Jorge en el tiempo restante para cubrir con la cuota semanal?

b) Para el cumpleaños de María, su mamá decidió hornear un pastel para cuarenta comensales, de los cuales solo comieron diez. ¿Qué fracción del pastel no fue repartida?

Anexo 2

ACTIVIDAD 2
Simplificación y Equivalencia de Fracciones

Instrucciones: La actividad se trata de un juego que se divide en dos etapas. La primera etapa tiene cinco rondas, las cuales consisten en relacionar dos fracciones entre sí dentro de un conjunto de cartas con distintas representaciones (lenguaje natural, numérico, gráfico y alfanumérico). Además, se requiere del uso de la figura que contiene multiplicaciones y divisiones de distintas fracciones con numeradores y denominadores iguales.
La actividad comienza cuando el primer jugador selecciona alguna carta de la primera ronda y, con ayuda de alguna fracción que se encuentre dentro de la figura, opera esa carta con la seleccionada inicialmente. La operación se multiplica o divide (según sea el caso) numerador por numerador y denominador por denominador. El resultado obtenido de esa operación debe estar contenido dentro del conjunto de cartas de esa primera ronda. El procedimiento se repite en cada una de las rondas restantes.
Observación:

- Las cartas que indican una división, NO se refieren al procedimiento de división de fracciones.
- <u>Cada jugador debe argumentar el procedimiento que utilizó para calcular la respuesta.</u>

$x\ \frac{2}{2}$	$x\ \frac{3}{3}$	$x\ \frac{4}{4}$	$x\ \frac{5}{5}$	$x\ \frac{6}{6}$	$x\ \frac{7}{7}$	$x\ \frac{8}{8}$	$x\ \frac{9}{9}$
$\div\ \frac{2}{2}$	$\div\ \frac{3}{3}$	$\div\ \frac{4}{4}$	$\div\ \frac{5}{5}$	$\div\ \frac{6}{6}$	$\div\ \frac{7}{7}$	$\div\ \frac{8}{8}$	$\div\ \frac{9}{9}$

Se muestra un ejemplo antes de comenzar el juego.

Ejemplo

"En esta ronda, las cartas son las siguientes. ¿Cuáles relacionarías y por qué?"

$\frac{45}{105}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{21}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{147}{49}$	$\frac{3}{7}$

La carta igual a $\frac{12}{16}$ se relaciona con la carta igual a $\frac{3}{4}$ porque a partir de la operación "$\div\ \frac{4}{4}$" mostrada en la tabla anterior se divide numerador entre numerador y denominador entre denominador, es decir, 12 entre 4 y 16 entre 4. Sin embargo, se pueden relacionar estas dos fracciones de manera contraria, es decir, la carta igual a $\frac{3}{4}$ se relaciona con la carta igual a $\frac{12}{16}$ porque a partir de la operación "$x\ \frac{4}{4}$" se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador.

Por otro lado, la carta igual a $\frac{21}{7}$ se relaciona con la carta igual a $\frac{147}{49}$ porque a partir de la operación " $x\frac{7}{7}$ ", se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador. Esa misma relación se puede obtener de manera contraria, porque la carta igual a $\frac{147}{49}$ se divide por la carta " $\div\frac{7}{7}$ " y da como resultado $\frac{21}{7}$.

También puede existir el caso en el que se necesita la aplicación de dos o más cartas propuestas de la tabla para generar una sola relación entre cartas de una misma ronda, por ejemplo, la carta igual a $\frac{45}{105}$ se relaciona con la carta igual a $\frac{3}{7}$ porque a partir de la operación " $\div\frac{5}{5}$" se obtiene la fracción igual a $\frac{9}{21}$ y, aun así, puede generar otra relación mediante la carta igual a " $\div\frac{3}{3}$ ". Finalmente, esa misma relación se puede obtener de manera contraria porque la carta igual a $\frac{3}{7}$ se puede multiplicar por la carta " $x\frac{3}{3}$ " y, posteriormente, multiplicar por la carta "$x\frac{5}{5}$ ", teniendo como resultado $\frac{45}{105}$.

$$\frac{12}{16} \div \frac{4}{4} = \frac{3}{4} \qquad \frac{3}{4}\, x\, \frac{4}{4} = \frac{12}{16} \qquad \frac{21}{7}\, x\, \frac{7}{7} = \frac{147}{49} \qquad \frac{147}{49} \div \frac{7}{7} = \frac{21}{7}$$

$$\frac{45}{105} \div \frac{5}{5} = \frac{9}{21} \div \frac{3}{3} = \frac{3}{7} \qquad \frac{3}{7}\, x\, \frac{3}{3} = \frac{9}{21}\, x\, \frac{5}{5} = \frac{45}{105}$$

¡Que comience el juego!:
Primera etapa

Primera ronda
En esta ronda, las cartas son las siguientes. ¿Cuáles relacionarías?

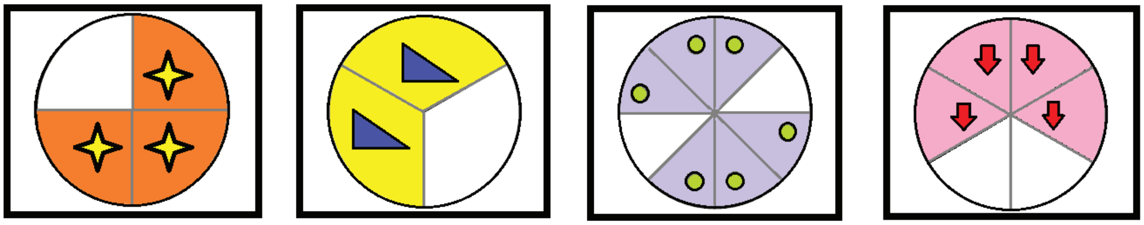
$$\boxed{\frac{12}{54}} \quad \boxed{\frac{8}{24}} \quad \boxed{\frac{6}{27}} \quad \boxed{\frac{9}{6}} \quad \boxed{\frac{2}{6}} \quad \boxed{\frac{3}{2}}$$

Segunda ronda
En esta ronda, las cartas son las siguientes. ¿Cuáles relacionarías?

un medio	un octavo	cuatro octavos	tres quintos	seis décimos	dos dieciseisavos

Tercera ronda

En esta ronda, las cartas son las siguientes. ¿Cuáles relacionarías?



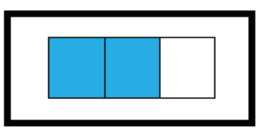
Cuarta ronda

En esta ronda, las cartas son las siguientes. ¿Cuáles relacionarías?

$x = \frac{6}{2}$	$3x = \frac{1}{2}$	$4x = 12$	$x = \frac{6}{4}$	$x = \frac{2}{12}$	$2x = 3$

Quinta ronda

En esta ronda, las cartas son las siguientes. ¿Cuáles relacionarías?

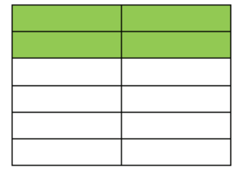
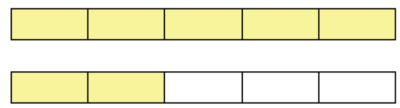
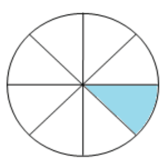
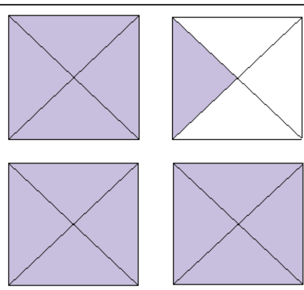


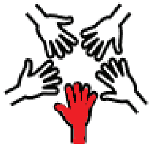
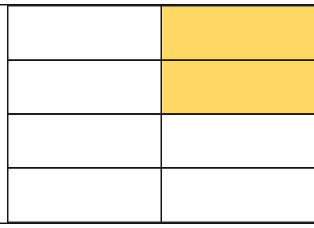
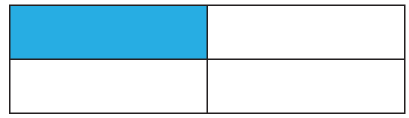
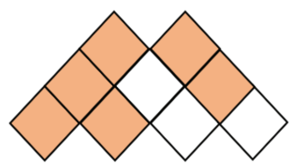
$6x = 4$	un séptimo	$\frac{3}{21}$

Segunda etapa

Indicaciones: En la columna llamada "ES EQUIVALENTE" escribe (SÍ) si consideras que las fracciones son equivalentes, o (NO) si consideras que no lo son. Observa los dos primeros ejemplos.

	¿Esta expresión…	**ES EQUIVALENTE**	**…a esta?**
1	Un medio	NO	Tres octavos
2		SÍ	$\frac{10}{25}$

	Dos quintos		
3	Un tercio		
4	Once novenos		$x = \frac{9}{11}$
5	$3a + 2 = a - 7$		$a = -\frac{18}{4}$
6	$y = \frac{18}{15}$		
7	$4w = 1$		$\frac{2}{16}$
8	$3x + 7 + x = x - 4$		Menos treinta y tres novenos
9			$\frac{1}{9}$
10			$24m = 24$

11			Seis treintavos
12			
13	$\frac{5}{7}$		$\frac{7}{5}$
14	$\frac{15}{2}$		treinta y dos cuartos
15	$\frac{24}{6}$		$2f + 5 = 4f - 7$
16	$\frac{2}{3}$		

Anexo 3

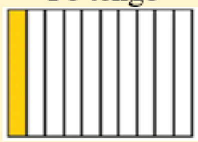
ACTIVIDAD 3
Propiedades de los números racionales

Objetivo: Aplicar las propiedades de números racionales para resolver operaciones, a partir de distintas representaciones.

Instrucciones: Se le proporciona a cada estudiante un conjunto de cartas previamente enviadas, que conforman al juego: "Yo tengo - ¿Quién tiene?". Las cartas no presentan orden alguno y todos los alumnos cuentan con la misma cantidad. Cada tarjeta está dividida en dos partes. La parte superior menciona la frase: "Yo tengo" y la parte inferior: "¿Quién tiene?", ambas partes están acompañadas de un número racional mostrado en cualquier tipo de representación (lenguaje natural, gráfico, alfanumérico o numérico). El juego puede iniciar con cualquier carta. El juego comienza cuando el primer jugador realiza la afirmación que se encuentra en la parte superior de la carta "Yo tengo", junto con el número racional propuesto. Posteriormente, el mismo jugador realiza la pregunta que se encuentra en la parte inferior de la carta "¿Quién tiene?", junto con el resultado de las operaciones o equivalencias propuestas. La continuidad del juego se genera cuando el segundo jugador responde a la pregunta del primer jugador con: "Yo tengo" y el procedimiento se repite con cada una de las cartas, generando una continuidad entre ellas. El juego termina hasta que aparece la carta: "¡Yo tengo 0!".

Observaciones:
- Todos los resultados deberán ser calculados hasta su fracción irreducible. En el caso de encontrarse una fracción reducible en la actividad, debe ser simplificada antes de operarse.
- En las cartas donde aparezcan imágenes, se debe tomar en cuenta el área coloreada.
- Cualquier jugador puede responder a cada pregunta, no hay un orden en turnos para los jugadores. En el caso de que un jugador no conozca la respuesta, entonces otro jugador deberá responderla. Sin embargo, cada carta la debe responder un jugador diferente.
- No todas las cartas se utilizan en el juego*.
- <u>Cada jugador debe argumentar el procedimiento que utilizó para calcular la respuesta.</u>

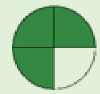
Yo tengo



¿Quién tiene esa cantidad más $(\frac{1}{3} + \frac{1}{2})$?

Yo tengo
$30x = 28$

¿Quién tiene esa cantidad por



?

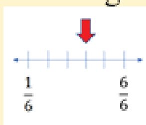
Yo tengo
siete décimos

¿Quién tiene esa cantidad por $(\frac{1}{3} * \frac{4}{2})$?

Yo tengo
$\frac{7}{15}$

¿Quién tiene esa cantidad más tres quinceavos ?

Yo tengo

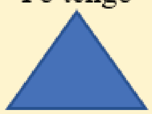


¿Quién tiene esa cantidad por $(\frac{1}{7} + 2\frac{1}{4})$?

Yo tengo
sesenta y siete cuarenta y dozavos

¿Quién tiene esa cantidad por $(\frac{42}{67})$?

Yo tengo



¿Quién tiene esa cantidad menos dos medios ?

¡Yo tengo 0!

*Las siguientes dos cartas solo aumentan complejidad al juego, es decir, NO se utilizan.

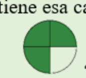
Yo tengo
$\frac{5}{4}$

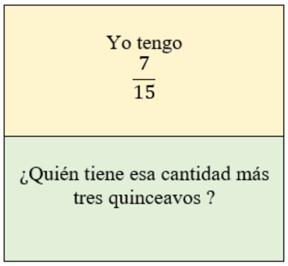
¿Quién tiene esa cantidad más x = 3/6 ?

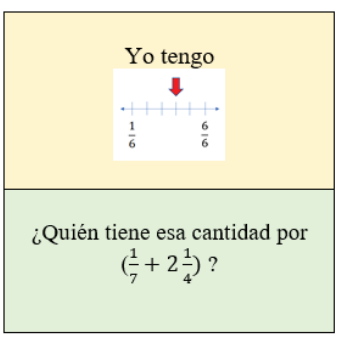
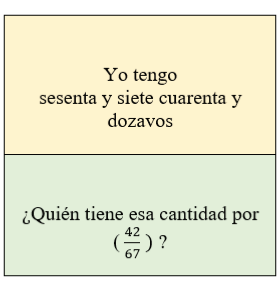
Yo tengo

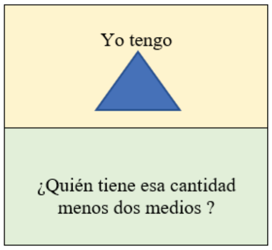
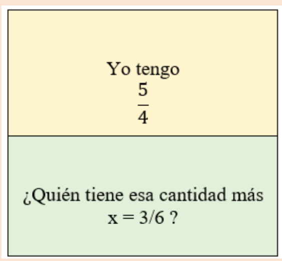
¿Quién tiene esa cantidad por 2/4 ?

El juego previamente efectuado requirió la aplicación de las propiedades de números racionales para poder ser jugado. El uso de las propiedades se realizó de la siguiente manera:

Carta	Propiedad	Argumentación
Yo tengo  ¿Quién tiene esa cantidad más $(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})$?	Asociativa para la suma	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f} \begin{cases} =\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f} \\ =\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right) \end{cases}$ Esta propiedad agrupa dos fracciones, y el resultado de la suma entre ellas es sumado a la tercera. Hay dos formas de hacerlo: $\frac{1}{10}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2} \begin{cases} =\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2} \\ =\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) \end{cases}$
Yo tengo 30x = 28 ¿Quién tiene esa cantidad por  ?	Definición de producto en los números racionales	$\frac{a}{b}*\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ Esta propiedad multiplica numeradores entre sí y denominadores entre sí. $\frac{14}{15}*\frac{3}{4}=\frac{42}{60}$ *Nota:* En la actividad, el resultado fue simplificado a 7/10.
Yo tengo siete décimos ¿Quién tiene esa cantidad por $(\frac{1}{3}*\frac{4}{2})$?	Asociativa para la multiplicación	$\frac{a}{b}*\frac{c}{d}*\frac{e}{f} \begin{cases} =\left(\frac{a}{b}*\frac{c}{d}\right)*\frac{e}{f} \\ =\frac{a}{b}*(\frac{c}{d}*\frac{e}{f}) \end{cases}$ Esta propiedad agrupa dos fracciones, y el resultado de la multiplicación entre ellas se multiplica con la tercera. Hay dos formas de hacerlo: $\frac{7}{10}*\frac{1}{3}*\frac{4}{2} \begin{cases} =\left(\frac{7}{10}*\frac{1}{3}\right)*\frac{4}{2} \\ =\frac{7}{10}*(\frac{1}{3}*\frac{4}{2}) \end{cases}$ *Nota:* En la actividad, la fracción 4/2 fue simplificada a 2 antes de operarse.

	Definición de suma para números racionales	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ Esta propiedad multiplica denominadores entre sí. Además, realiza productos cruzados para obtener los numeradores, es decir, multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción y multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción. $\frac{7}{15}+\frac{3}{15}=\frac{105+45}{225}=\frac{150}{225}=\frac{30}{45}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ Por otro lado, al contar con fracciones que tienen el mismo denominador, se suman los numeradores entre sí y se reescribe el mismo denominador. $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}\rightarrow\frac{7}{15}+\frac{3}{15}=\frac{7+3}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$ Con esto se observa que puedes obtener el mismo resultado por cualquiera de los dos procedimientos.

Carta	Propiedad	Argumentación
	Distributiva	$\frac{a}{b}*\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{ac}{bd}+\frac{ae}{bf}$ Esta propiedad multiplica la primera fracción tanto por la segunda como por la tercera, y el resultado de ambas es sumado entre sí. $\frac{2}{3}*\left(\frac{1}{7}+\frac{9}{4}\right)=\frac{2*1}{3*7}+\frac{2*9}{3*4}$ *Nota:* En la actividad, en la recta numérica la fracción 4/6 fue simplificada a 2/3 antes de operarse.
	Inverso multiplicativo	$\frac{a}{b}*\frac{b}{a}=\frac{ab}{ba}=1$ Con esta propiedad, se multiplican numeradores y denominadores entre sí. La fracción resultante se simplifica y el resultado genera la unidad, es decir, el número uno. $\frac{67}{42}*\frac{42}{67}=\frac{67*42}{42*67}=1$

	Inverso aditivo	$\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$ Esta propiedad suma fracciones con igual numerador y denominador, pero con signos contrarios. El resultado producido es igual a cero. $\frac{2}{2} + \left(-\frac{2}{2}\right) = 0$ *Nota:* En la actividad, el entero se convirtió a 2/2. Además, esta fracción, así como -2/2, pudo simplificarse a 1 antes de operarse.
 (No se utilizan en el juego)*	Definición de suma para números racionales	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ Esta propiedad multiplica denominadores entre sí. Posteriormente se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda y, a su vez, se multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda. Cada uno de los resultados es sumado entre sí. $\frac{5}{4} + \frac{3}{6} = \frac{(5*6) + (4*3)}{24}$ *Nota:* En la actividad, la fracción 3/6 fue simplificada a 1/2.

Carta	Propiedad	Argumentación
 (No se utilizan en el juego)*	Definición de producto en los números racionales	$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ Esta propiedad multiplica numeradores entre sí y denominadores entre sí. $\frac{1}{7} * \frac{2}{4} = \frac{2}{28}$ *Nota:* En la actividad, la fracción 2/4, así como el resultado de 2/28, pudo simplificarse.

Propiedades de números racionales	**Suma simbólicamente (b, d f ≠ 0)**	**Ejemplo**	**Multiplicación simbólicamente (b, d f ≠ 0)**	**Ejemplo**
Conmutativa	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$	$\frac{5}{3}+\frac{2}{8}=\frac{2}{8}+\frac{5}{3}$	$\frac{a}{b}*\frac{c}{d}=\frac{c}{d}*\frac{a}{b}$	$\frac{1}{3}*\frac{7}{5}=\frac{7}{5}*\frac{1}{3}$
Elemento neutro	$\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}$	$\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$	$\frac{a}{b}*1=\frac{a}{b}$	$\frac{3}{4}*1=\frac{3}{4}$

Anexo 4

ACTIVIDAD 4
Situación en contexto

Objetivo: Considerar números racionales para analizar y cuestionar críticamente diversos fenómenos.

Instrucciones: A partir de la situación en contexto presentada, realiza lo que se pide.

SANA DISTANCIA

Dionicio, el papá de una estudiante de bachillerato, tiene diabetes e hipertensión. Además, es un reconocido matemático que analiza la probabilidad y estadística de diferentes eventos. Él leía con detenimiento la siguiente noticia: “El SARS-Cov-2 es un virus que apareció en China y después se extendió a todos los continentes del mundo provocando una pandemia”. Consternado por la covid-19 (enfermedad originada en el año 2019 y producida a causa de este virus) le explica a su hija la importancia de contar con una sana distancia. Además, le muestra algunas estadísticas obtenidas el 25 febrero del 2021, sobre las consecuencias que ha dejado esta enfermedad. De acuerdo con la Dirección General de Epidemiología (DGE, 2020) hay 2,060,908 casos confirmados y 182,815 defunciones, producto de distintas enfermedades como:

Hipertensión (45.32%), Diabetes (37.54%), Obesidad (22.22%) y Tabaquismo (7.63%).

Por tal motivo, quiere concientizar a Perla, su hija, sobre las consecuencias de esta enfermedad, realizando una tabla que muestra el incremento de las actividades que tendría que realizar diariamente si alguien en su hogar enfermara.

Actividad	*Actividades realizadas por Perla*	*Actividades si alguien en mi hogar enfermara*
1. Limpiar recámara	✓	✓
2. Alimentar mascotas	✓	✓
3. Sacar la basura	✓	✓
4. Cocinar para todos en el hogar	---	✓
5. Limpiar toda la casa	---	---
6. Lavar los trastes	---	✓
7. Comprar la despensa en el supermercado/mercado	---	---
Total	3	5

Nota: Dionicio, el padre de Perla, no registró todas las actividades realizadas diariamente en el hogar. Además, no solo ella las realizará.

1. En plenaria, contesta lo que se pide:
- ¿Tienes algún familiar que presente alguna de estas enfermedades?

2. Realiza lo que se pide:

- Calcula numéricamente las actividades realizadas diariamente en el hogar.
- Realiza dos tablas, en las cuales representes el número de respuestas, las variables acumuladas, los porcentajes de cada respuesta, etc. El docente facilitará dichas tablas.

3. En plenaria, responde:
- ¿Tú vida adquiriría más responsabilidades si alguien en el hogar enfermara por covid-19?

Se adjuntan las tablas.

Número de actividades realizadas diariamente en el hogar	*Número de respuestas*	*Número de respuestas que pertenecen al total*	*Acumulado del número de respuestas del total*	*Parte decimal del entero de datos*	*Acumulado de la parte decimal del entero de datos*	*Porcentaje del número de respuestas*	*Acumulado del porcentaje del número de respuestas*
De 1 a 5							
De 6 a 10							
De 11 a 15							
De 16 a 20							

Número de actividades realizadas diariamente en el hogar MÁS las actividades añadidas	*Número de respuestas*	*Número de respuestas que pertenecen al total*	*Acumulado del número de respuestas del total*	*Parte decimal del entero de datos*	*Acumulado de la parte decimal del entero de datos*	*Porcentaje del número de respuestas*	*Acumulado del porcentaje del número de respuestas*
De 1 a 5							
De 6 a 10							
De 11 a 15							
De 16 a 20							

VOLÚMEN 14
N°2
AGOSTO 2022

RECH IEM

REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

sochiem