VOLÚMEN 13
N°2
AGOSTO 2021

RECHIEM

REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

sochiem

ÍNDICE

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

PROPUESTAS DIDÁCTICAS

sochiem

Sociedad Chilena de Educación Matemática
Revista Chilena de Educación Matemática
ISSN 2452-5448 Versión en línea
Chile

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i2.88

REIMAGINAR EL AULA DE MATEMÁTICAS: LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES COMO PRAXIS EMANCIPADORA

REIMAGINING THE MATHEMATICS CLASSROOM: SCHOOL MATHEMATICS AS EMANCIPATORY PRAXIS

Luis Radford
lradford@laurentian.ca
Laurentian University, Sudbury, Canada

RESUMEN

Mi propósito en este artículo es reimaginar el aula de matemáticas. Empiezo reflexionando acerca de la escuela reformada, aquella que, en Occidente, asumió la tarea de educar las nuevas generaciones para enfrentar los problemas de la industrialización hace 100 años y que hoy, está orientada a la producción de sujetos portadores de competencias para avanzar en el proyecto neoliberal de las sociedades de economía de mercado. En la primera parte, abordo algunos elementos que me ayudan a explicar lo que pudo haber salido mal en el proyecto de la escuela reformada occidental; en particular, busco comprender, a través de un análisis histórico-crítico, qué la ha llevado a ser un sitio de producción de sujetos alienados. La pregunta es: ¿Qué es eso que da a la escuela moderna o posmoderna su configuración actual y la mantiene allí, atada? En la segunda parte, comparto algunas ideas que hemos explorado con profesores y estudiantes de nuestras escuelas en un esfuerzo por salir de las garras de la alienación y que nos han llevado a repensar las matemáticas escolares como praxis emancipadora.

PALABRAS CLAVE:
Escuela reformada; alienación; emancipación; teoría de la objetivación; ética.

ABSTRACT

My purpose in this article is to reimagine the mathematics classroom. I begin by reflecting on the reformed school, the one that, 100 years ago in the West, took on the task of teaching new generations how to face the problems of industrialization, and that today is oriented towards the production of subjects with the competencies required to advance the neoliberal projects of market economy societies. In the first part, I address some elements that help me to explain what may have gone wrong with the Western reformed school project. In particular, I seek to understand, through a historical-critical analysis, what has led it to become a site for the production of alienated subjects. The question is: What is it that gives the modern or postmodern school its current configuration and keeps it there, bound? In the second part, I share some ideas that we have explored with teachers and students in our schools in an effort to break out of the grip of alienation and that have led us to rethink school mathematics as an emancipatory praxis.

KEYWORDS:
Reformed school; alienation; emancipation; theory of objectification; ethics.

Recibido: 13 de Junio 2021, Aceptado: 7 de Julio de 2021

1. Introducción[1]

El propósito de este artículo es invitar a reimaginar el aula de matemáticas. El prefijo "re" significa que ya hemos imaginado dicha aula, y sugiere, al mismo tiempo, que hay que hacerlo de nuevo, y hay que hacerlo porque algo nos salió mal. El aula de matemáticas no parece ser lo que queríamos.

El subtítulo del artículo sugiere un rumbo a seguir: matemáticas escolares y praxis emancipadora. La primera parte del subtítulo circunscribe el alcance o el límite de mi argumento: se trata de las *matemáticas escolares* que, aunque no son el título principal, van a tener que ser reimaginadas también. La segunda parte del subtítulo menciona algo diferente: emancipación.

Emancipar es un concepto cuyo significado no es transparente; es un término filosófico con una historia compleja. El Diccionario de la Real Academia Española lo define como la acción de "liberarse de cualquier clase de subordinación o dependencia" (RAE, s. f., definición 2). Ahora bien, en mi invitación a reimaginar el aula de matemáticas, ¿de quién o de qué habría que emancipar esa aula? ¿Estoy acaso diciendo que hay alguien o algo que la sujeta, la oprime, la fuerza, la maltrata y que, al hacerlo, no la deja ser lo que *debería ser?*

Aunque no se menciona de forma clara en la definición de *emancipar*, si miramos con detenimiento, podemos darnos cuenta de que la idea de emancipación se funda en *relaciones* entre unos y otros; se basa en relaciones de poder por medio de las cuales se ejerce eso que oprime y mantiene en su lugar a aquello que es oprimido.

¿Qué es eso que oprime? No es siempre lo mismo. Por ejemplo, tuve oportunidad de participar en la charla que dio Aldo Parra hace algunas semanas en el marco de un ciclo de conferencias virtuales organizada por la *Asociación Aprender en Red*. Allí, Aldo nos habló de una pequeña comunidad indígena del Cauca en Colombia (Parra, 2021); no habló de emancipación directamente, pero eso no quiere decir que el problema de la emancipación no estuviera allí. En esta comunidad indígena caucana, la categoría de "lo que oprime" está configurada por una serie de dispositivos políticos, económicos y militares que la comunidad en cuestión debe enfrentar para mantener su espacio de acción y realización. Aquello que oprime allí es probablemente diferente de eso que ejerce una presión en las escuelas donde yo realizo mi trabajo educativo. En mis escuelas los estudiantes vienen de familias de clase media de una minoría lingüística en el norte de Ontario, en Canadá; son escuelas francófonas. Estas forman parte de lo que se conoce como *escuelas reformadas* (Darling y Nordenbo, 2002; Labaree, 2005; Rohrs y Lenhart, 1995), es decir, aquellas que, en Occidente, asumieron la tarea de educar las nuevas generaciones para enfrentar los problemas de la industrialización hace 100 años y que, hoy, están orientadas a la producción de sujetos portadores de competencias para avanzar en el proyecto neoliberal de las sociedades atadas a una economía de mercado (Giroux, 1997; Gohier y Fabre, 2015).

No obstante, parece que el resultado no nos ha quedado bien: en gran medida, la escuela se ha convertido en sitio de producción de sujetos alienados. De aquí parte mi invitación a *re*imaginar la escuela en general, y el aula de matemáticas en particular. En este intento necesitamos hacer primero un esfuerzo para repensar críticamente el aula contemporánea de matemáticas, especialmente en sus supuestos teóricos e ideológicos. De esta excavación crítica podemos esperar que emerja una comprensión de qué es lo que sujeta y mantiene al aula de matemáticas en su posición actual.

Como mencioné, lo que sujeta a mis escuelas no es necesariamente lo mismo que sujeta a la escuela de la que nos habla Aldo o a las que figuran en las investigaciones de cada uno de ustedes, aunque probablemente compartimos los satélites de vigilancia y las mismas embestidas de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), y la nueva forma de imperialismo que despliega sin cesar. Nuestros contextos son diferentes, pero dado que la emancipación, en su esquema general, es un problema de poder, de relación con un otro, creo que podemos aprender mutuamente de nuestras luchas e intentos emancipadores.

Mi artículo tiene dos partes: en la primera, abordo algunos elementos que me ayudan a explicar lo que pudo haber salido mal en el proyecto de la escuela reformada occidental; en particular, busco comprender qué la ha llevado a ser un sitio de producción de sujetos alienados. La pregunta es: ¿Qué es eso que da a la escuela moderna o posmoderna su configuración actual y la mantiene allí, atada? En la segunda parte, comparto algunas ideas que hemos explorado con profesores y estudiantes de nuestras escuelas en un esfuerzo por pensar las matemáticas escolares como praxis emancipadora. Empecemos.

2. El aula de matemáticas en la historia reciente

¿Qué veríamos si miramos las aulas occidentales de matemáticas en los últimos 50 años? Creo que no es una exageración decir que veríamos un aula halada por dos fuerzas opuestas y cada una va en la dirección de un paradigma educativo diferente: uno centrado en el

[1] *Este texto tiene origen en una conferencia plenaria dictada en las XXIV Jornadas Nacionales de Educación Matemática de Chile que tuvo lugar en abril de 2021. Una versión corta se encuentra en las actas de las jornadas. Como en el texto preparado para las jornadas, he optado por dejar el estilo oral de la presentación.*

profesor y el *saber*, y el otro centrado en el *estudiante*.

El primer paradigma es el de la *transmisión del saber*. Este pone al profesor en un lugar privilegiado y plantea el aprendizaje como la adquisición relativamente pasiva y obediente de contenidos matemáticos por el estudiante. El segundo paradigma es el *constructivista*. Este pone al estudiante en un lugar privilegiado y plantea el aprendizaje como resultado de la actividad del estudiante.

Durante una larga historia de oposiciones, estos dos paradigmas han terminado fusionados en un tercer paradigma que algunos llaman "socioconstructivista" (Jonnaert y Masciotra, 2004) y otros "de indagaciones por el estudiante" *(inquiry based paradigm*; ver, por ejemplo, Ontario Ministry of Education, 2013). Este paradigma fusión nos ofrece una nueva idea del aula de matemáticas en la que el estudiante y el profesor figuran en primera plana. En las aulas inspiradas por este paradigma, se trata de fomentar la *participación activa* del estudiante y su autonomía, por un lado, y, por el otro, de asegurar un espacio al profesor para que pueda *guiar* al estudiante y *facilitar* su aprendizaje[2]. Este paradigma da lugar a una variedad de modelos de enseñanza que podrían ordenarse según la *intensidad* de participación del profesor, desde una participación máxima hasta una mínima. Voy a dar tres ejemplos.

El primero, que llamo de "guía pedagógica máxima", funciona de forma muy similar al de la enseñanza tradicional. El profesor controla la producción y circulación de ideas en el aula (Figura 1, cuadro izquierdo), y solo le permite al estudiante una participación mínima e insignificante, por ejemplo, llamándolo al pizarrón, haciéndole preguntas muy cortas, etc. (Figura 1, cuadro del medio). Es una enseñanza tradicional que añade elementos constructivistas de una manera cosmética.

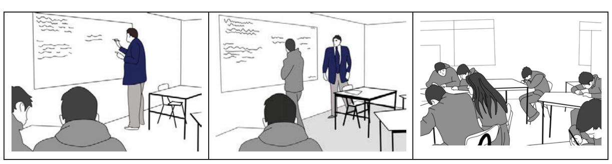


Figura 1. Ejemplo de un aula que opera bajo la "guía pedagógica máxima". Fuente: Elaboración propia.

En el segundo modelo, llamado en Ontario "la enseñanza por modelaje", el profesor "modela" la solución del problema para los estudiantes; es decir, empieza *mostrando* a los estudiantes cómo hacer las cosas (por ejemplo, cómo resolver un problema nuevo). Luego, el profesor desaparece progresivamente y de esta manera deja poco a poco la responsabilidad al estudiante (Gauthier et al., 2013).

Al otro extremo de esta gama de modelos de enseñanza encontramos el de la "guía pedagógica mínima" que proponen Godino y Burgos (2020). Estos autores argumentan que, debido a la complejidad del conocimiento matemático, la autonomía del alumno no puede ser el punto de partida del aprendizaje. Se puede partir del paradigma de la transmisión del conocimiento, con una "guía pedagógica mínima" (p. 96), y luego pasar al paradigma constructivista.

Cada modelo de enseñanza de este paradigma sintético socioconstructivista –o de la indagación– conduce a un aula de matemáticas con dinámicas un poco diferentes. Las diferencias se explican según la manera como se distribuyen los grados de importancia entre los quehaceres del estudiante y los del profesor. Estas aulas se inspiran en varios *supuestos teóricos* que parecen casi indiscutibles; operan en silencio, diríamos casi a escondidas. Entre estos supuestos, están:

a) Primero, el aprendizaje es visto como un atributo del estudiante.
Esto quiere decir que el aprendizaje es un fenómeno que se predica o se dice de un sujeto, de un individuo: Pedro aprendió o no tal cosa. No se dice, por ejemplo, que una clase de 30 alumnos aprendió esto o lo otro. Suena raro ¿no? Suena *impreciso*. Y si esto se dice, rápidamente van a preguntar por Pedro: ¿Aprendió? ¿Cuánto aprendió? Hay un discurso socioeducativo que asigna una *realidad* a la idea del aprendizaje como fenómeno que acontece (o no) a alguien, al *estudiante*.

b) Segundo, un estudiante aprende cuando puede responder a las preguntas que se le hacen de manera *autónoma*.
Esto quiere decir que la autonomía se toma como criterio de aprendizaje. Este es el caso de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2002; para una discusión, ver Radford, 2018). Es por eso que, en los dos últimos ejemplos de modelos de enseñanza que he mencionado, el profesor está allí, pero como si no debiera, algo así como una nota falsa en una pieza musical.

[2] *Una definición ofrecida por el sitio web Thirteen.org (s. f.) es: el paradigma por indagación, en oposición al método tradicional de enseñanza, "está más centrado en el estudiante, con el profesor como facilitador del aprendizaje" (párr. 3). Esta idea aparece también cuando Jonnaert y Masciotra (2007) explican el socioconstructivismo. Estos autores dicen: "La dimensión 'socio' [en el término socioconstructivismo] significa que el profesor facilita las interacciones entre los alumnos" (p. 57). Traducciones propias.*

c) Tercero, se asume que el estudiante piensa "naturalmente" de ciertas maneras[3].
En este contexto, el trabajo del profesor es *guiar* al estudiante. Por ejemplo, en el método de la guía pedagógica mínima, se trata de dar al estudiante esa guía mínima que le hace falta para llegar a los conceptos matemáticos; hay que darle un pequeño empujón, algo así como ese soplo que se le daría a un barquito de papel para que llegue a su destino.

d) Cuarto, se concibe al estudiante como una *entidad psicológica.*
El estudiante es visto como "sujeto cognitivo" (Valero, 2004, p. 39), como si llevara en la cabeza una cajita con ideas y representaciones del mundo. En su tesis doctoral, Maritza Silva señala un pasaje en el que un profesor le dice al estudiante: "Eso es lo que tienes que meterte en la cabecita [...] ¡denominador distinto de cero!, ¡distinto de cero!, ¡distinto de cero! y te lo grabáis ¡distinto de cero!" (2021, p. 119). La metáfora detrás es que hay ideítas que se mueven dentro de la cabeza del estudiante y de allí salen.

Creo que estos supuestos nos dan una idea del aula contemporánea. Por ejemplo, podemos ver que autorizan al profesor y los investigadores a ver al estudiante y a su aprendizaje de ciertas maneras. Así, del lado del profesor, resulta "natural" hacer evaluaciones individuales para dar cuenta del aprendizaje del estudiante. Del lado del investigador, resulta "natural" que este use cuestionarios con problemas matemáticos a los estudiantes para que nos revelen lo que piensan "en la cabecita".

Sin embargo, tenemos que ir un poco más lejos en nuestra discusión de las aulas contemporáneas de matemáticas. Ustedes podrían objetar que mi análisis no ha tomado en cuenta algo muy importante: la *interacción social*, que se ha convertido en un rasgo predominante de la práctica y del discurso científico en educación (Radford, 2011). Es cierto; incluso en el aula de la guía pedagógica máxima, los estudiantes interactúan entre ellos. Es esto lo que muestra el esbozo a la derecha de la Figura 1. El esbozo nos permite ver que hay estudiantes que están solos, pero otros están en parejas, sugiriendo que hay algún intento de fomentar la interacción social. La pregunta entonces es: ¿Cuál es el *sentido* de lo social en la dinámica del aula en las clases "socioconstructivistas"? ¿Cómo conciben lo social los socioconstructivistas? Para responder a estas preguntas tenemos que entender el paso del átomo a la mónada.

3. Del átomo a la mónada

Si desde hace algún tiempo en el discurso con el que se define la educación se habla cada vez más de los estudiantes (en plural) y no del estudiante (en singular), es que hemos pasado del *átomo* a la *mónada*. Esto quiere decir que los estudiantes no son más que un plural, es decir, una *pluralidad* de entidades separadas unas de otras. Cada uno es una mónada-estudiante que piensa con sus *propias* capacidades cognitivas.

En el nuevo caso, el de la mónada, lo que vemos en el aula no es *una* actividad, sino tantas actividades como estudiantes, en que cada estudiante realiza la suya propia. Si hay n estudiantes en la clase, cada estudiante e_i realiza su propia actividad a_i. El aula de matemáticas es la suma $\sum e_i$ de sus mónadas y lo que ocurre en una lección de matemáticas es una colección $\{a_i\}$ de actividades individuales.

Evidentemente, el discurso educativo puede llegar a tomar en cuenta la interacción entre estudiantes, la comunicación e incluso puede hacer referencia a la lección que siguieron los estudiantes con el profesor. Sin embargo, todos estos elementos sociales son vistos de forma instrumental: son considerados *estímulos externos* que ofrece el entorno a la actividad cognitiva del estudiante (se pueden ver detalles y ejemplos en Radford, 2020a).

4. ¿Y cuál es el problema?

En este tipo de aulas que reducen la interacción social a un puro estímulo, la concepción de la interacción es muy pobre, por no decir equivocada. El trabajo de Vygotsky (1987) sobre la "zona de desarrollo próximo" muestra que la interacción con otros, y en particular con el profesor, juega un papel crucial en el aprendizaje.

Esto que estoy diciendo es válido también para los elementos culturales e históricos. En efecto, el problema es que los elementos sociales, culturales e históricos no pueden ser considerados *instrumentalmente* en el aprendizaje de los estudiantes. Esos elementos *no* son estímulos externos que ofrece el entorno a la actividad cognitiva del estudiante, al contrario, son parte de las maneras en que llegamos a pensar el mundo (Valero, 2004, 2010).

[3] *Evidentemente, las teorías en educación matemática no ponen este y los otros supuestos que estoy mencionando de manera explícita. Estos supuestos operan, como he dicho hace un momento, casi a escondidas. Por ejemplo, los autores de un artículo reciente se propusieron identificar los criterios más sobresalientes de clasificación y seriación que utilizan los niños de prescolar (Casadiego et al., 2020). La pregunta es: ¿en qué atributos de los objetos concretos del mundo del niño se detiene con más arraigo su atención? Luego de observar la interacción de los niños con los bloques lógicos, la conclusión es que el color y el tamaño son las características que los niños identifican más rápidamente. Puede verse cómo se asume tácitamente que los niños piensan las formas de su mundo "naturalmente". Es entonces legítimo pensar que los bloques lógicos (y el entorno social del niño) no son portadores de conceptualizaciones culturales. Se asume que todos vemos lo mismo. Más adelante, cuando hablaré de una escuela en Uganda, veremos que esto no es así.*

Klaus Holzkamp (2013), por ejemplo, hace ver que las conceptualizaciones de un individuo, sin ser determinadas por el contexto y las circunstancias, no son arbitrarias; están sujetas a procesos y conceptualizaciones socioculturales que preceden la acción del individuo.

Cabe recordar aquí que el lenguaje opera, entre otras cosas, como portador de una conceptualización cultural. Esto nos recuerda la experiencia que vivió una aspirante a profesora, Krista, que fue a hacer su práctica docente en Uganda. En medio de una lección de geometría, esta estudiante inglesa se encontró con que el lenguaje de la comunidad, el runyankore, no tiene "palabras para triángulo, rectángulo o incluso cuadrado. Hay una palabra, *oriziga*, que significa circular o curvo, pero no se refiere específicamente a un círculo" (Bradford y Brown, 2005, p. 16). Es muy fácil olvidar que el mundo en que vivimos está repleto de conceptualizaciones histórico-culturales que nos abarcan, y que se muestran en la materialidad del mundo, en el lenguaje que usamos y en nuestras acciones. Es muy fácil olvidar también que las maneras de pensar el mundo no son naturales, sino *culturales*. Cuando olvidamos esto, terminamos creyendo que la actividad cognitiva es puramente nuestra, que se origina en *nosotros*, que sale de nuestra cabeza.

Diríamos que, en realidad, la cosa va al revés. Tenemos que darle un giro de 180° a todo esto para entender que la cognición y las ideas que cada uno forma vienen de afuera, y para darnos cuenta de que cada uno de nosotros es lo que el filósofo holandés Benedicto de Spinoza (1989) llamaba un "modo" de la "substancia", es decir –en lenguaje del siglo XXI–, que cada uno es una realidad singular, individual y limitada de la sociedad y que es en esta que encontramos los elementos por medio de los cuales pensamos subjetivamente el mundo.

5. ¿Y cómo es que semejante cosa se nos pasó por alto?

La pregunta es: ¿Y cómo es que semejante cosa haya pasado desapercibida y que hayamos terminado pensando que, para comprender la cognición, el aprendizaje y la dinámica del aula, había que centrar esta dinámica en el estudiante, y añadir al profesor como la guía que podría hacer falta al estudiante en los momentos de desmayo o desfallecimiento?

La respuesta es demasiado compleja para ser tratada aquí en detalle. Voy a limitarme a mencionar que tiene que ver con la concepción del humano que surgió en la Alta Edad Media y el Renacimiento occidental, cuando el incipiente capitalismo artesanal y las nuevas formas de producción económica llevaron a la emergencia de una nueva conciencia social que culmina en lo que Colin Morris (1972) ha llamado "el descubrimiento del individuo". Desde entonces, el Occidente se embarcó en una ruta nueva en la que, a diferencia de otros periodos históricos, el individuo se ubicó poco a poco en el centro del universo.

Se produjo, entonces, el proceso de personalización, según Lipovetsky (2000); es decir, el proceso que "ha promovido y encarnado masivamente un valor fundamental, el de la realización personal" (p.7). La modernidad produjo procedimientos de subjetivación de los que emergió, gloriosa, una visión nueva del humano: el individuo como fundamento. Con esto quiero decir que el individuo se convirtió en su propio fundamento y en el fundamento del mundo. Como dice el filósofo francés Etienne Balibar (2014), "es *solamente a posteriori*, cuando ya se han constituido como individuos [...] que los individuos [de la modernidad] pueden *relacionarse entre sí* de diferentes maneras. Pero estas relaciones son por definición accidentales, no definen su esencia" (p. 213).

En el ámbito de la política, el neoliberalismo encapsula esta idea del individuo como fundamento al considerarlo cimiento social. La filosofía acierta esta misma idea al reclamar que el fundamento del ser está en su libertad de acción (como lo hace la filosofía kantiana). En el ámbito de la psicología, esta idea se afirma en la concepción del sujeto que se forma desde adentro, desde su propia interioridad. Así, por ejemplo, la mente es considerada un atributo del individuo. En el ámbito de la educación, esta idea del humano como fundamento de sí mismo repercute en el concepto de aprendizaje que se concibe como resultado de las ideas que el estudiante se hace él mismo a partir de sus propias acciones y representaciones. En la educación matemática, como nos dice el constructivismo, el estudiante construye su propio saber (von Glasersfeld, 1995).

Política	El cimiento social es el individuo
Filosofía	El fundamento del ser está en su libertad de acción
Psicología	La mente es un atributo del individuo.
Educación	El aprendizaje resulta de las ideas que se va haciendo el estudiante a partir de sus propias acciones.
Educación Matemática	El estudiante construye su propio saber.

Figura 2. El individuo como fundamento.
Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 2 se muestra que cada una de estas esferas *societales* (Radford, 2021a) solo traduce, a su manera y en su propio lenguaje, la forma ideal más general posible del humano como lo conciben la modernidad y la posmodernidad. La concepción que despoja al humano de todas sus determinaciones sociales, históricas y culturales, y lo convierte así en un yo lánguido, vaciado, que solo se lleva a sí mismo en su núcleo más íntimo, lo que los filósofos llaman su *ipseidad*, es decir su mismidad. Pedro aprendió algo en el aula de matemáticas y lo que aprendió tiene que ver con su entorno histórico-cultural solo de manera circunstancial. Lo que Pedro aprendió es *suyo*, es producto de *su* esfuerzo personal y como tal le *pertenece*. ¡Sacó 80% en geometría! El número da realidad objetiva al aprendizaje de Pedro; lo afirma en su soledad ontológica.

Llegamos a un punto en el que podemos dar respuesta a la pregunta que planteamos al inicio, la pregunta de *eso* que da a la escuela moderna y posmoderna occidental su configuración actual y que la mantiene en donde está, oprimida. La respuesta se encuentra en esta figura histórica que podemos llamar la *figura de la ontología moderna*, que toma al individuo como fundamento.

Ahora, creo, podemos entender lo que configura por detrás, a escondidas y en silencio, la dinámica de tantas aulas de matemáticas. Ahora podemos entender cómo y por qué la clase de matemáticas se ha convertido en un sitio de alienación, y que es una de las cosas que salió mal en el proyecto de la escuela reformada.

El alumno y el profesor permanecen ajenos entre sí. Su relación es casi comercial; uno tratando de maximizar sus propios aprendizajes y el otro ayudándolo o guiándolo allí donde se pueda requerir (Radford, 2014). Ambos viven la enseñanza y el aprendizaje como si ese vivir fuese ajeno al amplio contexto histórico y cultural, como si entre profesores y estudiantes no pudiese haber una conexión *real humana* posible.

6. Las matemáticas escolares como praxis emancipadora

¿Cómo podríamos plantear la dinámica del aula de matemáticas para recuperar la dimensión histórico-cultural y concebir el aula como un espacio portador de relaciones sociales y productor de aprendizajes no alienantes?

La investigación sociocultural ha mostrado la tremenda complejidad que subyace en el aula de matemáticas y el aprendizaje, y ha puesto atención (entre otras cosas) en: 1) el lenguaje; 2) las estructuras sociales y simbólicas imbricadas en la escuela; 3) la cultura material (por ejemplo, los artefactos), y 4) las cuestiones de poder y género.

Una parte importante de la investigación sociocultural ha intentado ver el aprendizaje como la participación progresiva del niño en la práctica social o su ingreso en las comunidades de práctica (Lave y Wenger, 1991). Nuestro camino en la teoría de la objetivación (TO) (Radford, 2021a) retoma los cuatro puntos anteriores, pero tematiza el aula y el aprendizaje de manera un poco diferente. La TO no es una teoría constructivista ni conductista ni participacionista; con la discusión acerca de esta tematización un poco diferente quisiera terminar este artículo.

Conviene, primero, disipar un malentendido potencial: cuando digo que no se trata de concentrar la atención en el estudiante, no quiero decir que no hay que ver más al estudiante. Tampoco quiero decir que lo que tenemos que hacer ahora es voltear la mirada hacia el profesor o el saber. Lo que quiero decir es que hay que ver al estudiante y al profesor, pero no con los lentes de la psicología cognitiva individualista que los asume como sujetos *ya dados*, ya constituidos; convendría ver al estudiante y al profesor como sujetos históricos y culturales que se constituyen de forma cotidiana y conjunta en el aula, en el transcurso de la actividad de enseñanza y aprendizaje. En efecto, las aulas de matemáticas no producen solamente saberes, sino también subjetividades (Radford, 2021a). Tomando en cuenta esta idea, la propuesta que ofrece la TO considera al aula de matemáticas como un aula que gira en torno a dos ejes, el del *saber* y el del *ser*. Y es a partir de esos dos ejes que se sugiere conceptualizar el aprendizaje. En otras palabras, el problema del aula de matemáticas ya no es solo acerca de los saberes que el estudiante aprende, sino también acerca del *tipo de sujeto* que nuestras prácticas educativas tienden a fomentar.

Esto que acabo de decir suena terrible cuando lo escuchamos con los oídos constructivistas, puesto que estos operan bajo los preceptos de la libertad y autonomía del individuo. Los constructivistas consideran que el aula es un sitio de realización de los proyectos personales del estudiante. Dado que piensan que el estudiante se forma desde adentro, de acuerdo con su esencia y sus propias potencialidades, el aula no puede ser un sitio que forma al estudiante. Sin embargo, el punto es que no hay educación que no favorezca cierto tipo de saberes y que no promueva la producción de ciertas subjetividades (Popkewitz, 2004). Paulo Freire lo había señalado en su trabajo: "La educación nunca ha sido ni será neutra" (2016, p. 38). La educación siempre será una cuestión política y económica, por lo cual la educación matemática, tanto en su práctica como en su investigación, no puede dejar de hacerse la pregunta sobre el tipo de individuo que se fomenta explícita o implícitamente.

En la teoría de la objetivación, entendemos el proyecto educativo como un proyecto emancipador de las prácticas corrientes que reducen al estudiante a un sujeto cognitivo (como en el paradigma constructivista) o a capital humano (como en el paradigma de la transmisión de saberes), y que, en un caso y en el otro, ofrecen una práctica matemática alienante (Radford, 2014, 2016). Concebimos el objetivo de la educación matemática como un esfuerzo político, social, histórico y cultural dirigido a la creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos que se posicionan críticamente en prácticas matemáticas constituidas histórica y culturalmente, y que reflexionan sobre nuevas posibilidades de acción y pensamiento.

En la TO, el aprendizaje se concibe como un *encuentro* con el saber cultural, cuya característica fundamental es de ser ético y crítico. A partir de estas dimensiones éticas y críticas, el estudiante tiene oportunidad de ubicarse y posicionarse en el plano social del aula de matemáticas y más allá, y de constituirse cotidianamente, con otros, como subjetividad. El punto fundamental es que es en el tipo de *actividad* que los estudiantes y profesores producen en el aula en el cual se encuentra la posibilidad de una práctica emancipadora (Radford, 2020b).

En nuestro caso, esta práctica emancipadora está orientada por las siguientes ideas:

- En primer lugar, se rompe con la separación tradicional entre profesores y estudiantes que pone al estudiante en un lugar de inferioridad y obediencia respecto a la producción y circulación del saber en el aula. Rompe también con la separación constructivista en la que el profesor es visto como un guía que ayuda a los estudiantes a llegar tan lejos como puedan con sus propias cogitaciones.

  En la actividad emancipadora no hay $n+1$ actividades llevadas a cabo simultáneamente en el aula, las n actividades $a_1, a_2, \dots, a_n$ de las mónadas $e_1, e_2, \dots, e_n$ más la actividad de enseñanza a_p del profesor, p . Hay solamente *una* actividad: la enseñanza-aprendizaje en la cual estudiantes y profesores laboran hombro con hombro para producir y hacer circular el saber matemático en el aula.

- En segundo lugar, la actividad emancipadora permite un *encuentro* colectivo con el saber cultural. Aquí, el aprendizaje no es propiedad de un estudiante sino de un colectivo. Recordarán que mencioné que el primer supuesto que informa el aula contemporánea de matemáticas es que el aprendizaje es *propiedad del alumno*. Aquí damos un giro de 180°. Aprendemos juntos, en medio de tensiones, objeciones, etc., pero juntos, *colectivamente*.

- En tercer lugar, la actividad de enseñanza-aprendizaje ofrece condiciones para que ese encuentro colectivo incluya voces y perspectivas diferentes en las que la diferencia es valorada. Pero no se trata de la inclusividad condescendiente y superficial que propone el neoliberalismo. Se trata de un encuentro inclusivo en el que los estudiantes *se involucran e interactúan con las ideas del otro y asumen la responsabilidad de entender esa voz diferente y tomar posición crítica ante ella.*

- Cuarto, la meta del encuentro con el saber mediante procesos colectivos no es hacer que los estudiantes acepten las ideas y significados de las matemáticas dominantes (aquellas ya inscritas en el *currículo*). Es precisamente encontrarlas, examinarlas críticamente, apreciarlas en su fuerza y dimensión estética y teórica, y verlas como expresión de una de las *posibles* racionalidades humanas, sin que, por tanto, tengan que aceptarlas. Me parece que una práctica emancipadora debe reconocer, a la vez, las racionalidades y lo que ofrecen, pero también lo que limitan.

- Quinto, una práctica emancipadora de las matemáticas escolares se realiza a través de la práctica de una ética que valoriza la responsabilidad, el compromiso con el trabajo colectivo y el cuidado del otro (Radford, 2021b).

A título de ejemplo, voy a referirme a una actividad de enseñanza-aprendizaje en una clase de 5o grado (estudiantes de 10 y 11 años)[4]. Para entender la actividad, conviene mencionar que los días anteriores los estudiantes y la profesora resolvieron colectivamente ecuaciones lineales. La resolución de las ecuaciones se hizo con ayuda de material concreto constituido de tarjetas de cartón y sobres de papel que contenían un mismo número desconocido de tarjetas en su interior. Un ejemplo de dichas ecuaciones se muestra en la Figura 3 (cuadro izquierdo).

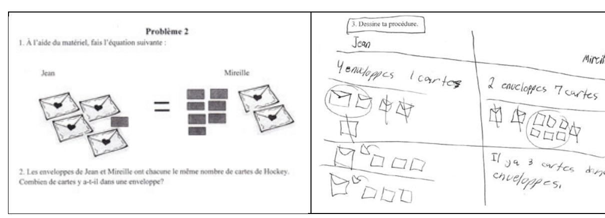


Figura 3. Izquierda: la ecuación dada. Derecha: la resolución de la ecuación.
Fuente: Elaboración propia

El problema consiste en encontrar el número de tarjetas que contiene un sobre, sabiendo que Jean tiene cuatro sobres y una tarjeta, mientras que Mireille tiene dos sobres y siete tarjetas y que el número total de tarjetas de Jean es el mismo que el de Mireille.

El cuadro de la derecha de la Figura 3 muestra la solución propuesta por una estudiante, quien empieza por quitar una tarjeta de cada lado de la ecuación,

[4] *Una presentación más detallada de este ejemplo se encuentra en Radford (2021c).*

luego dos sobres de cada lado de la ecuación, con lo que deduce que dos sobres tienen seis tarjetas. Enseguida, divide por dos y determina que hay tres tarjetas en cada sobre.

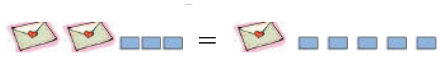
En la actividad que quiero mencionar la clase fue dividida en pequeños grupos de dos a cuatro miembros. Los estudiantes fueron invitados a efectuar la siguiente tarea en un trabajo colectivo:

> Van a escribir un texto que explique los pasos que hay que seguir para resolver una ecuación como las que vimos anteriormente. El texto está dirigido a un alumno de 5º grado de otra escuela, y no se sabe si este alumno sabe resolver ecuaciones.
>
> Su explicación debe ser clara, justa y convincente:
> a. Claro: ¿se entiende lo que se dice en el texto?
> b. Justo: ¿es la respuesta correcta?
> c. Convincente: ¿son realmente convincentes los argumentos del texto?

A diferencia de los problemas anteriores (como el que se muestra en la Figura 3), en esta tarea se trata de explicar, en términos generales, las etapas a seguir para resolver una ecuación *cualquiera*.

En el grupo de José, Elisa, Celeste y Carina, la discusión se dio alrededor de aquello que el texto debía incluir. Este grupo produjo el texto que se muestra en la Figura 4, cuadro izquierdo. Luego, alentados por la profesora, este grupo intercambió su texto con el texto de otro grupo (el grupo de Walton y David). El intercambio tenía el fin de aprender juntos de lo que los otros hicieron y de posicionarse críticamente frente al texto de los otros. El texto de Walton y David aparece en el cuadro del medio de la Figura 4. A la derecha vemos a los estudiantes del grupo de Elisa estudiar con atención el texto del grupo de Walton y David.

El grupo de Elisa se sorprende de ver que la hoja del otro grupo tiene pocas etapas. Celeste dice: “Solo tienen cuatro pasos; ¡creo que podría ser un poco más largo...!”. Elisa dice: “No entiendo”. Este grupo observa que, en lugar de considerar una ecuación cualquiera, el texto de Walton y David considera una ecuación *particular*:



José, que se siente a gusto con un texto ilustrado con un ejemplo, añade: “¡Dieron un ejemplo! Si la persona [el estudiante de 5º grado] lee el ejemplo, comprenderá el sentido”.

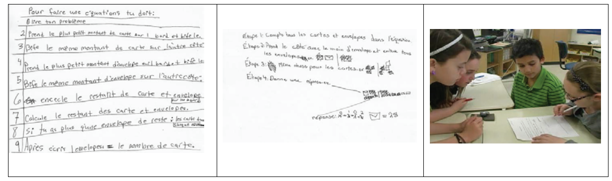


Figura 4. Izquierda: el texto de José, Elisa, Celeste y Carina. Al centro: el texto del grupo de Walton y David.
Fuente: Archivo del autor.

Los estudiantes deciden escribir una crítica tomando turnos. Una de las críticas tiene que ver con la etapa 2 propuesta por Walton y David. Esta etapa dice: “Toma el lado [de la ecuación] con menos sobres y quita todos los sobres”. El primer grupo argumenta que debieron decir que ese mismo número de sobres debe también ser quitado del otro lado de la ecuación. La Figura 5 (cuadro izquierdo) muestra las anotaciones hechas al texto de Walton y David.

Figura 5. Izquierda: el texto de Walton y David con anotaciones críticas. Centro y derecha: el encuentro de los dos grupos que se dio más tarde.
Fuente: Archivo del autor.

Después de haber concluido su análisis crítico de manera independiente, los grupos se encontraron frente a frente (Figura 5, centro y derecha).

- Walton (el cuarto de izquierda a derecha): “quitamos 3 tarjetas aquí” (señala el pasaje en su hoja. Ver Figura 5, cuadro del medio).
- Carina (la primera de izquierda a derecha): “tú debías haber dicho ‘y también 3 tarjetas del otro [lado]’” (Figura 5, cuadro de la derecha).

Como vemos, el examen crítico del texto del otro grupo, así como la discusión entre los grupos, es la ocasión para aprender más *juntos*. El aprendizaje no es considerado propiedad de un estudiante, es producto de un proceso colectivo. En el curso de este proceso, las matemáticas se desvelan a la conciencia de los estudiantes, no como un simple saber externo y formal, sino como *una posibilidad cultural* que se *materializa o encarna* en un contenido conceptual concreto polifacético (sea pensado como generalidad expresada de forma singular, es decir en un ejemplo concreto, como proponen Walton y David, o como generalidad en *sí*, como propone el grupo de Elisa que evita tomar un ejemplo concreto). En esta aula de matemáticas, la actividad es tal que:

1. En ella, el aprendizaje aparece como proceso colectivo: no se trata de varias actividades a_1, a_2, a_3, …singulares, sino de una sola actividad, A.
2. Permite un encuentro colectivo con el saber cultural.
3. Ofrece la posibilidad de entrar en contacto con otras voces y perspectivas, no en aras de un beneficio personal sino de la creación de una *obra* (una idea) *común*. Se trata de un encuentro con otras voces y perspectivas mediante el cual estudiantes y profesores se implican en comparaciones, distinciones y tomas de posición respecto al saber, generan en el camino nuevas ideas y, a su vez, se constituyen como subjetividades.
4. Permite un encuentro crítico con el saber cultural.
5. Reposa en la práctica de una ética de orientación comunitaria en la que los estudiantes asumen responsabilidad hacia otros, se comprometen con el trabajo colectivo y el cuidado del otro.

7. Síntesis

La idea de este artículo es abrir una reflexión en torno al aula de matemáticas, un intento de reimaginarla. Evidentemente, no es la primera vez que educadores se enfrentan con esta tarea; imaginar el aula escolar en general y la de matemáticas en particular fue la tarea que se dieron los pedagogos y administradores de la educación de principios del siglo pasado (Labaree, 2005), cuando se enfrentaron al problema de educar a las nuevas generaciones y a las dificultades para encarrilar a las sociedades de la época hacia la vía de la industrialización. Es aquí donde aparece la versión moderna del paradigma de transmisión de saberes y su idea de la enseñanza magistral que, a diferencia de otras versiones históricas anteriores, tiene ahora que educar en masa. Al mismo tiempo aparece, en un movimiento opuesto, el paradigma de la *escuela centrada en el estudiante* (Rugg y Shumaker, 1969), el cual es el origen del constructivismo contemporáneo. Vimos que esos dos paradigmas educativos –uno centrado en el profesor y el saber, el otro en el estudiante– se han fusionado en un nuevo paradigma (el paradigma socioconstructivista o de indagaciones por el estudiante) que intenta poner al profesor y al estudiante al frente de la escena. Pero el "y" que une al profesor y al estudiante se convierte en un gran problema ya que, amparado en los preceptos de la libertad y la autonomía del estudiante –y de hecho en una concepción humanista del individuo que data del Siglo de las Luces, es decir, del siglo XVIII– no puede concebir al profesor más que como guía (Radford, 2014). Una solución es pensar el conectivo "y" *sincrónicamente*, como proponen el método de modelaje o el método de la "guía pedagógica mínima" de Godino y Burgos (2020), en el cual el foco de atención es primero el profesor y, luego, el estudiante.

En la primera parte de mi presentación sugerí algunos supuestos que asume el aula de matemáticas socioconstructivista –entre ellos, el de pensar el aula en términos individualistas– que reducen la actividad cognitiva a representaciones subjetivas y el aprendizaje a un fenómeno individual. Luego emprendí una breve excavación histórico-crítica para intentar entender aquello que nos condujo a concebir el aula en esos términos. La breve excavación histórico-crítica que emprendí sugiere que la concepción del aula contemporánea (en su estructura, dinámica y naturaleza) no ha sido accidental o fortuita. Es parte de un proceso histórico de las sociedades occidentales de naturaleza económica y política (Popkewitz y Rizvi, 2009); un proceso de refinamiento progresivo y agresivo de las relaciones que definen al individuo; un proceso no solo de individuación, sino de individualización que los filósofos, sociólogos y antropólogos llaman *individualismo* (Lipovetsky, 2000; Taylor, 2003). Vimos que la respuesta a la pregunta que planteamos al inicio, sobre eso que configura la escuela moderna y posmoderna occidental en la actualidad y que la mantiene donde está, oprimida, se encuentra en esta figura histórica, que llamé la *figura de la ontología moderna*, que toma al individuo como fundamento de *sí* y de *su* mundo. La Figura 2 nos muestra cómo las diferentes esferas *societales* (la política, la filosofía, la psicología y la educación) traducen y expresan en su propio lenguaje esta figura. Dentro de este contexto, no debería sorprendernos que la respuesta a la pregunta encuentre una realidad efectiva en la materialización cotidiana de esta figura ontológica que caracteriza las sociedades capitalistas contemporáneas.

En la última parte, mencioné algunas ideas que han surgido de mi investigación con profesores y estudiantes, y que iluminan nuestro quehacer pedagógico en la búsqueda de medios que puedan delinear una praxis escolar diferente. Esas ideas aparecen en el ejemplo que di de una actividad de enseñanza-aprendizaje en una clase de 5o grado. Aunque muy breve, este nos permite ilustrar los principios que sugerimos anteriormente de lo que podría ser las matemáticas escolares como praxis emancipadora. El aprendizaje es comprendido como un *encuentro colectivo* con saberes culturales que se desvela a la conciencia de los estudiantes por medio de la actividad de enseñanza-aprendizaje. Se trata de un encuentro cuya meta no es que los estudiantes acepten una manera de pensar las matemáticas. Se trata, por el contrario, de un encuentro que ofrece la posibilidad de entrar en contacto con otras voces y perspectivas, no para mejorar la perspectiva subjetiva, como en el caso de la clase de mónadas mencionada, que operan guiadas por el beneficio personal. Se trata de un contacto histórico-cultural con otras voces a través de las cuales los individuos se constituyen continuamente *con otros*.

No hay que confundir esto que sugiero con lo que podría ser el ejercicio de una democracia lánguida de expresión de subjetividades esencialmente independientes. Al contrario, afirmo la idea de un aula emancipada que funciona como un espacio de producción de saberes y subjetividades en el que estudiantes y profesores producen matemáticas de forma conjunta. Allí se expresan y se producen relaciones sociales; aprenden unos de los otros a posicionarse socialmente, a oír, refutar, objetar, criticar, apreciar y ver que hay muchas maneras de pensar matemáticamente; de esta manera, salen de su nicho solipsista para constituirse en subjetividades culturales, críticas y éticas. A diferencia de las actividades alienantes que encierran al sujeto en sí mismo, las actividades como las que ilustra nuestro breve ejemplo de 5o grado ofrecen pautas para la realización de un trabajo conjunto en el que los estudiantes y el profesor pueden reconocerse en las ideas que circulan en el aula, mientras que encuentran una exterioridad conceptual cultural refractada de varias maneras en los razonamientos que ellos movilizan.

No es pues solo la praxis de la matemática escolar la que tenemos que poner en tela de juicio sino también nuestras concepciones de las matemáticas mismas. Hay que pensarlas, creo, de otra manera, no como un saber externo y formal, sino como un saber dotado de una lógica histórica y dinámica cuyo contenido se da a la vida concreta del aula bajo la mediación de la actividad humana sensible, la labor conjunta de profesores y estudiantes. Esta mediación no es un ejercicio formal del pensamiento ni sujeción del individuo, sino mediación que desemboca en una lógica polivalente, en determinación de un proceso real que contiene ya las condiciones de su propia objetividad relativa. Su normatividad racional se plantea como posible referencia de enriquecimiento colectivo. Evidentemente, es imposible abordar con la profundidad que se requiere el tema de lo que podría ser las matemáticas escolares como praxis emancipadora. Espero, sin embargo, que este corto artículo sugiera nuevas pistas de acción y reflexión.

Reconocimientos

Este artículo es resultado de un programa de investigación subvencionado por the Social Sciences and Humanities Research Council of Canada / Le Conseil de Recherches en Sciences Humaines du Canada (SSHRC/CRSH).

Referencias

Balibar, É. (2014). *La philosophie de Marx*. La Découverte. https://doi.org/10.3917/dec.balib.2014.01

Bradford, K., y Brown, T. (2005). Ceci n'est pas un "circle". *For the Learning of Mathematics, 25*(1), 16-19.

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer.

Casadiego, A., Avendaño, K., Chávarro, G., Avendaño, G., Guevara, L., y Avendaño, A. (2020). Criterios de clasificación en niños de preescolar utilizando los bloques lógicos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 23*(3), 311-330. https://doi.org/10.12802/relime.20.2332

Darling, J., y Nordenbo, S. (2002). Progressivism. En N. Blake, P. Smeyers, R. Smith, y P. Standish (Eds.), *The philosophy of education* (pp. 288-308). Blackwell. https://doi.org/10.1002/9780470996294.ch17

Freire, P. (2016). *Pedagogia da solidariedade.* Paz & Terra. https://doi.org/10.4324/9781315422817

Gauthier, C., Bissonnette, S., y Richard, M. (2013). *Enseignement explicite et la réussite des élèves. La gestion des apprentissages.* Éditions du Renouveau Pédagogique Inc.

Giroux, H. (1997). *Los profesores como intelectuales.* Paidós.

Godino, J., y Burgos, M. (2020). ¿Cómo enseñar las matemáticas y ciencias experimentales? Resolviendo el dilema entre transmisión e indagación. *Revista Paradigma, 41*, 80-106. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p80-106.id872

Gohier, C., y Fabre, M. (2015). *Les valeurs éducatives au risque du néo-libéralisme.* Mont-Saint-Aignan: Presses universitaires de Rouen et du Havre. https://doi.org/10.4000/books.purh.1582

Holzkamp, K. (2013). *Psychology from the standpoint of the subject.* Palgrave Macmillan.

Jonnaert, P., y Masciotra, D. (2004). *Constructivisme. Choix contemporains.* Presses de l'Université du Québéc. https://doi.org/10.2307/j.ctv18ph31k

Jonnaert, P., y Masciotra, D. (2007). Socioconstructivisme et logique de compétences pour les programmes d'études. En L. Lafortune, E. Moussadak, y P. Jonnaert (Dir.), *Observer les réformes en éducation* (pp. 53-75). Presses de l'Université du Québec.

Labaree, D. (2005). Progressivism, Schools and Schools of Education: An American Romance. *Paedagogica Historica, 41*(1-2), 275-288. https://doi.org/10.1080/0030923042000335583

Lave, J., y Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511815355

Lipovetsky, G. (2000). *La era del vacío. Ensayos sobre el individualismo contemporáneo.* Editorial Anagrama.

Morris, C. (1972). The discovery of the individual, 1050-1200. Harper & Row.

Ontario Ministry of Education. (2013). *Inquiry-based learning.* Queen's Printer for Ontario. http://www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/inspire/research/CBS_inquirybased.pdf.

Parra, A. (2021, 16 de abril). *Una educación matemática propia es posible: ¿pregunta o afirmación?* [Conferencia]. Seminario de la Asociación Aprender en Red, Venezuela. https://www.youtube.com/watch?v=A7c0UiYZC9g.

Popkewitz, T. (2004). The alchemy of the mathematics curriculum: Inscriptions and the fabrication of the child. *American educational research journal, 41*(1), 3-34. https://doi.org/10.3102/00028312041001003

Popkewitz, T., y Rizvi, F. (2009). *Globalization and the study of education.* Wiley-Blackwell.

Radford, L. (2011). Classroom interaction: Why is it good, really? *Educational Studies in Mathematics, 76,* 101-115. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9271-4

Radford, L. (2014). On teachers and students: An ethical cultural-historical perspective. En P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 1, pp. 1-20). PME.

Radford, L. (2016). On alienation in the mathematics classroom. *International Journal of Educational Research, 79,* 258-266. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2016.04.001

Radford, L. (2018). On theories in mathematics education and their conceptual differences. En B. Sirakov, P. de Souza, y M. Viana (Eds.), *Proceedings of the international congress of mathematicians.* (Vol. 4, pp. 4055-4074). World Scientific Publishing Co.

Radford, L. (2020a). Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. En S. Takeco Gobara, y L. Radford (Eds.), *Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática* (pp. 15-42). Livraria da Física. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n16.p27-42.id306

Radford, L. (2020b). ¿Cómo sería una actividad de enseñanza-aprendizaje que busca ser emancipadora? La labor conjunta en la teoría de la objetivación. *Revista Colombiana de Matemática Educativa, RECME, Número especial de la Teoría de la Objetivación, 5*(2), 15-31. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n16.p27-42.id306

Radford, L. (2021a). *The theory of objectification. A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning.* Leiden & Boston: Brill/Sense. https://doi.org/10.1163/9789004459663

Radford, L. (2021b). La ética en la teoría de la objetivación. En L. Radford, y M. Silva Acuña (Eds.), *Ética: Entre educación y filosofía* (pp. 107-141). Universidad de los Andes.

Radford, L. (2021c). La enseñanza-aprendizaje del álgebra en la teoría de la objetivación. En L. Radford, y V. Moretti (Eds.), *Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais: Diálogos e Complementaridades entre a Teoria da Objetivação e a Teoria Histórico-Cultural.* Livraria da Fisica.

Real Academia Española. (s. f.). *Emancipar*. En Diccionario de la lengua española. https://dle.rae.es/emancipar

Rohrs, H., y Lenhart, V. (1995). *Progressive Education Across the Continents: A Handbook*.: Peter Lang.

Rugg, H., y Shumaker, A. (1969). *The child-centered school.* World Book Company.

Silva, M. (2021). *Modelo pedagógico para los docentes de matemática que dictan clases en carreras de la salud en universidades privadas no selectivas de la Región Metropolitana* [tesis de doctorado inédita no publicada], Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación.

Spinoza, B. (1989). *Ethics Including the Improvement of the Understanding.* (R. Elwes, Trad.). Prometheus.

Taylor, C. (2003). *The ethics of authenticity.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Thirteen.org. (s. f). *Concept to classroom. How does it differ from the traditional approach?* https://www.thirteen.org/edonline/concept2class/inquiry/index_sub1.html

Valero, P. (2004). Postmodernism as an attitude of critique to dominant mathematics education research. En M. Walshaw (Ed.), *Mathematics education within the postmodern* (pp. 35-54). Information Age Publishing.

Von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning.* The Falmer Press.

Vygotsky, L. S. (1987). *The Collected Works of L. S. Vygotsky* (Vol. 1). Plenum.

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i2.52

SIGNIFICADOS DE LA PROPORCIONALIDAD PROMOVIDOS POR PROFESORES MEXICANOS EN SEGUNDO GRADO DE LA ESCUELA SECUNDARIA

MEANINGS OF PROPORTIONALITY PROMOTED IN SECOND GRADE OF SECONDARY SCHOOL BY MEXICAN TEACHERS

Karla Paola Luque Álvarez
karla.luquea@hotmail.com
Universidad de Sonora, Sonora, México

Silvia Elena Ibarra Olmos
silvia.ibarra@unison.mx
Universidad de Sonora, Sonora, México

RESUMEN

En este documento se presentan los resultados de una investigación cuyo objetivo principal fue describir el grado de representatividad de los significados de referencia, pretendido e implementado, sobre el tema de proporcionalidad, con respecto a un conjunto de significados parciales que funcionan como referencia global. La investigación se llevó a cabo tomando en consideración la propuesta curricular de matemáticas para segundo grado de la secundaria mexicana (13 años), y está fundamentada teóricamente en algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Metodológicamente se usó el estudio de casos. Los resultados de la investigación indican que los significados implementados por los profesores observados son poco representativos con respecto al significado de referencia, teniendo el riesgo de que existan repercusiones para sus alumnos en otros temas ligados con la proporcionalidad.

PALABRAS CLAVE:
Significado referencial; significado pretendido; significado implementado; proporcionalidad; escuela secundaria.

ABSTRACT

We present research results whose main objective was to describe the representativeness grade of the meaning of reference, intended and implemented on proportionality, regarding a global reference meaning. The investigation was carried out, considering what the second-grade curriculum of the Mexican secondary school (13 years old), proposes for the mentioned topic; it was theoretically based on some elements of the Ontosemiotic Approach of Mathematical Cognition and Instruction. Methodologically, it was a study of cases. The research results indicate that the observed teachers' meanings are not very representative concerning the reference meanings, with the risk that there are repercussions for their students in other subjects related to proportionality.

KEYWORDS:
Referential meaning; intended meaning; implemented meaning; proportionality; secondary school.

Recibido: 18 de Enero 2021, Aceptado: 12 de Mayo de 2021

1. Introducción

La proporcionalidad es uno de los principales temas en la educación matemática de los distintos niveles escolares en México, pues se estudia desde los inicios de la escuela básica (3-15 años), hasta el nivel superior (18-22 años), y es considerada una de las bases para el estudio de diversos temas matemáticos tales como los porcentajes, reproducciones a escala y variación lineal, además de ser una noción fundamental en áreas como la física, la química y las artes, por mencionar algunas.

Su importancia en la formación matemática de los individuos ha sido estudiada desde diferentes perspectivas, entre ellas las dificultades que presentan profesores para su enseñanza. En este sentido, Block (2001) identifica que, en un estudio con profesores de primaria, el 71% del grupo considera como una condición suficiente para que una relación sea de proporcionalidad, el hecho de que "cuando una cantidad aumenta, la otra también aumenta" (p. 677); además, menciona que poco más del 50% considera correcta la afirmación "dos números son proporcionales si uno es múltiplo del otro, por ejemplo, 12 y 4" (p. 677), es decir, hay confusión entre los términos "proporcional" y "múltiplo". Por otro lado, Balderas et al. (2014) identificaron que profesores de secundaria, a pesar de que suelen resolver correctamente gran parte de las situaciones que se les plantean, cuando justifican la existencia de una relación de proporcionalidad suelen presentar argumentaciones y caracterizaciones insuficientes e incompletas de dicha relación.

Por su parte, Rivas et al. (2012) señalan las dificultades manifestadas por futuros profesores de bachillerato, quienes centran su atención en la aplicación de técnicas como la regla de tres, sin lograr desarrollar un razonamiento proporcional involucrado en las situaciones-problema que les fueron planteadas.

Por otro lado, algunas investigaciones como Mochón (2012), Fernández et al. (2012) y Torres y Deulofeu (2018) manifiestan que, al igual que en algunos futuros profesores, los estudiantes presentan diversas dificultades al resolver tareas de proporcionalidad, al enfocarse principalmente en la aplicación de técnicas para resolver los problemas, mismas que son empleadas de manera incorrecta debido a la ausencia de razonamiento proporcional por parte de los estudiantes. Posiblemente estas dificultades se presentan a partir de que los mismos profesores en formación, o los profesores en servicio, no comprenden la noción de proporcionalidad.

Con respecto al estudio de la proporcionalidad, Mochón (2012) manifiesta que se le debe dedicar un tiempo considerable al tema, debido a la importancia de este y a las diversas dificultades que presentan los profesores participantes en el estudio que él reporta, dificultades que el autor considera que pueden afectar a los futuros estudiantes de estos maestros.

Con estos antecedentes, en los cuales se manifiestan la importancia del estudio de la proporcionalidad, las dificultades reportadas en la literatura y, además, la importancia de que los futuros docentes que laborarán en el nivel básico tengan una sólida formación en el tema, se planteó una investigación dirigida a profesores, cuyo objetivo principal fue *describir el grado de representatividad de los significados de referencia, pretendido e implementado, sobre el tema de proporcionalidad, con respecto a un conjunto de significados parciales que funcionan como referencia global,* esto es, contrastar elementos curriculares, de planeación y ejecución del proceso de estudio para el tema (de parte de profesores mexicanos de Matemáticas de segundo grado de secundaria) versus elementos provenientes de los sistemas de prácticas matemáticas que son susceptibles de desarrollarse con el estudio del tema mencionado.

2. Elementos teóricos

La investigación se sustentó teóricamente con algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino et al., 2009), específicamente la Teoría de los Significados Sistémicos (Godino y Font, 2008). Se retomaron los Significados Pragmáticos (Godino et al., 2017) para la proporcionalidad, mismos que están escritos a partir de los niveles de algebrización de la actividad matemática escolar (Godino et al., 2014). Estos significados pragmáticos fueron elegidos en tanto que son apropiados para el logro del objetivo planteado.

2.1 Teoría de los Significados Sistémicos

Cuando se estudia matemáticas, más que conocer las prácticas que se realizan en la resolución de un problema en particular, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) que manifiestan los sujetos en su actuación ante diversos tipos de situaciones-problema. En el EOS (Godino et al., 2009), el significado de un objeto matemático se concibe como "el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas" (p. 5). Como se señaló, esta investigación tiene como uno de sus basamentos teóricos más importantes a la Teoría de los Significados Sistémicos.

En particular, al ser un trabajo de investigación cuyos sujetos de investigación son profesores de Matemáticas de secundaria, se está interesado únicamente en los significados institucionales, para lo cual se tendrán en cuenta los siguientes tipos:

- Referencial (o de referencia, también conocido como pretendido por el currículo): se refiere al sistema de prácticas que se utilizan como referencia para elaborar el significado pretendido.

En una institución de enseñanza concreta, este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático.

• Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.

• Implementado: en un proceso de estudio específico, es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente (Godino y Font, 2008).

En esta ocasión, los significados pragmáticos de la proporcionalidad formarán parte de lo que en el EOS se conoce como significado holístico, dichos significados están descritos a partir de los niveles de algebrización de la actividad matemática escolar, los cuales se presentan a continuación.

2.2 Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar

Una parte fundamental para el desarrollo de este trabajo son los niveles de algebrización de la actividad matemática escolar (Godino et al., 2014), en donde se establecen niveles de algebrización de acuerdo con las características de las prácticas realizadas para resolver tareas matemáticas. Se proponen dos niveles de algebrización elementales a los que se denominan "protoalgebraicos", al considerarlos como primarios, primitivos o incipientes. Se propone además un tercer nivel en el que la actividad matemática se puede considerar como propiamente algebraica.

Es importante tener presente que estos niveles son asignados, no a la tarea misma, sino a las prácticas matemáticas que realizan los individuos para resolverla, por lo que depende de la forma en que la tarea es resuelta para que la actividad sea ubicada en un nivel o en otro. Por otro lado, si las variables involucradas en la tarea sufren algunos cambios, estos pueden dar lugar a nuevas prácticas matemáticas que pudieran ubicarse en el mismo nivel o en algún otro.

Para poder establecer estos niveles, Godino et al. (2014) indican que "un proceso de generalización da como resultado un tipo de objeto matemático, al cual se le denomina objeto intensivo, es decir, la regla que genera la clase, el tipo o generalidad implicada" (p. 205). Por otro lado, mediante el proceso inverso o de particularización se obtienen objetos a los cuales se les denomina extensivos, es decir, objetos particulares. "Una colección finita simplemente enumerada no se debe considerar como un intensivo hasta el momento en el que el sujeto muestra el criterio o la regla que se aplica para delimitar los elementos constituyentes del conjunto" (p. 205).

Además de la regla o generalidad que da lugar al conjunto original, existe un proceso de unitarización en donde la nueva entidad unitaria debe hacerse ostensiva o materializada mediante un nombre, ícono, gesto o un símbolo. Godino et al. (2014) además mencionan que los criterios básicos para definir los niveles de algebrización son los siguientes:

Generalización: Generación o inferencia de intensivos.

Unitarización: Reconocimiento explícito de intensivos como entidades unitarias.

Formalización y ostensión: Nombramiento mediante expresiones simbólico-literales.

Transformación: Utilización de los objetos intensivos en procesos de cálculo y en nuevas generalizaciones. (p. 8)

2.3 Los significados pragmáticos de la proporcionalidad

Los significados pragmáticos de la proporcionalidad directa fueron categorizados a partir de los niveles de algebrización (Godino et al., 2014), mismos que se describen a partir de los tipos de sistemas de prácticas que se realizan al resolver una tarea de proporcionalidad. A continuación, se enuncian cada uno de ellos y se muestran adaptaciones de ejemplos (Godino et al., 2017).

2.3.1 Significado informal/cualitativo

Como ejemplo del sistema de prácticas desarrolladas en la resolución de un problema, desde el punto de vista del significado informal/cualitativo se presenta el siguiente:

Si María quiere comprar más galletas de las que compra normalmente para darle a su hija para llevar a la escuela, María tendrá que gastar:

(a) Más dinero de lo que gastaba antes; (b) Menos dinero de lo que gastaba antes; (c) Hará exactamente el mismo gasto.

El sistema de prácticas promovidas en este caso permite tener un primer acercamiento al planteamiento de la situación-problema, donde las respuestas esperadas permitirán identificar de manera general las relaciones entre las variables que intervienen. A su vez, esto proporcionará ideas sobre cómo proceder al resolver una situación-problema y a estimar el resultado final, además de que puede ser de utilidad para identificar si se está ante una relación de proporcionalidad directa o inversa o si no hay proporcionalidad.

2.3.2 Significado aritmético

Como primer significado pragmático los autores establecen el significado aritmético, argumentando que este se caracteriza por la aplicación de procedimientos de cálculos aritméticos (multiplicación, división). Se toma como ejemplo la siguiente situación problema: Un kilogramo de queso cuesta $75, ¿cuánto hay que pagar si se quieren comprar 2.5 kilogramos de queso? La situación se resuelve a partir de operaciones aritméticas en las que, sabiendo que 2 kg son el doble de 1 kg, habría que considerar que por 2 kg de queso se debe pagar el doble que lo que se pagaría por 1 kg, por lo que 2 kg cuestan $150. Pero, 0.5 kg es la mitad de 1 kg, por lo que habría que pagar la mitad, es decir, 0.5 kg cuestan $37.5. Al sumar se tiene que 2.5 kg cuestan $187.5.

El sistema de prácticas que aquí se presenta tiene un carácter discursivo-descriptivo de la situación problema, además de normativo y operativo. En esta solución intervienen únicamente valores numéricos y se aplican operaciones aritméticas sobre dichos valores, es decir, no intervienen objetos ni procesos algebraicos, por lo que la actividad realizada, según Godino et al. (2014), se considera de Nivel 0 de algebrización.

El significado protoalgebraico está centrado en la aplicación de la noción de proporción y la resolución de una ecuación de la forma $Ax = B$, como, por ejemplo, en la siguiente secuencia de prácticas: Un kilogramo de queso cuesta $75, ¿cuánto hay que pagar si se quieren comprar 2.5 kilogramos de queso?

Se supone que, si se compra el doble, triple, etc. de producto, se deberá pagar el doble, triple, etc. de precio. Por lo que la relación que se establece entre las cantidades del producto comprado y el precio pagado es de proporcionalidad directa. En una relación de proporcionalidad directa se tiene que las razones de las cantidades que se corresponden son iguales:

$\frac{1}{75} = \frac{2.5}{x}$ siendo x el costo de 2.5 kg de queso.

En toda proporción se cumple la igualdad del producto en cruz de los términos,

$$1 \times x = 2.5 \times 75$$

Luego, $x = 187.5$. Por tanto, el precio del queso debe ser $187.5.

2.3.4 Significado algebraico-funcional

El significado algebraico-funcional se caracteriza por la aplicación de la noción de la función lineal y de técnicas de resolución basadas en las propiedades de dichas funciones:

$f(a+b) = f(a) + f(b), f(ka) = k\,f(a)$

donde f representa una función, a y b son elementos pertenecientes a un espacio vectorial y $k \in \mathbb{R}$ representa un parámetro. Una de estas técnicas se aplica a continuación:

Se supone que, si se compra el doble, triple, etc. de producto, se deberá pagar el doble, triple, etc. de precio. Además, lo que se pague por dos cantidades distintas de queso, será lo mismo que comprar un paquete con la misma cantidad –en peso– de queso. Por tanto, la correspondencia que se establece entre el conjunto de las cantidades del producto (Q) y el conjunto de los precios pagados (P), $f\colon Q \to P$, es lineal. En toda función lineal f, se cumple que, la imagen de la suma de cantidades es la suma de las imágenes, $f(a+b) = f(a) + f(b)$, y la imagen del producto de una cantidad por un número real es el producto de la cantidad imagen por dicho número, $f(ka) = k\,f(a)$.

El coeficiente k de la función lineal es el coeficiente de proporcionalidad en el caso de las relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes (tanto por uno). Aplicando dichas propiedades al caso, se tiene: $f(1kg) = 75$; $2.5\,f(1kg) = 2.5 \times 75$; $f(2.5kg) = 187.5$

[Dos kilogramos y medio de queso cuestan 187.5 pesos].

Se puede observar que el modelo matemático de estas funciones se puede representar por una función de la forma $y = k \times x$, donde k es la constante de proporcionalidad, x la variable independiente e y la variable dependiente. Aunque se habla de una función lineal, al poder k tomar cualquier valor, lo que se tiene en realidad es una familia de funciones lineales, con parámetro k, lo cual según Godino et al. (2014) es un primer acercamiento al Nivel 4 de algebrización.

2.4 Los significados pragmáticos en el estudio de la proporcionalidad inversa

Como se puede observar, los significados pragmáticos de la proporcionalidad discutidos en Godino et al. (2017) están descritos particularmente para el caso de la proporcionalidad directa. Sin embargo, tanto en el currículo como en las planeaciones e implementaciones de clases de los profesores, así como en las pruebas escritas propuestas, se identificó la noción de proporcionalidad inversa. Por ello, se propone a continuación una versión aplicada para la proporcionalidad inversa.

2.4.1 Significado informal/cualitativo para la proporcionalidad inversa

Como ejemplo del sistema de prácticas desarrolladas en la resolución de un problema de proporcionalidad inversa, desde el punto de vista del significado informal/cualitativo, se presenta el siguiente:

Un coche que circula a 90 $\mathrm{km/h}$ ha tardado 12 horas en realizar un viaje. Si el coche aumenta su velocidad, ¿qué ocurre con las horas que tarda en realizar el mismo viaje?

1. Por cada hora que transcurre, el auto inicialmente avanzaba 90 km.

2. Si se aumenta la velocidad, la distancia recorrida por cada hora aumenta.

3. Al aumentar la distancia que se recorre por cada hora que transcurre, el coche realizará el viaje en menos horas.

4. Por lo tanto, la cantidad de horas que tarda el coche en realizar el mismo viaje disminuye a medida que se aumenta la velocidad.

El sistema de prácticas promovidas en este caso permite tener un primer acercamiento a la noción de proporcionalidad inversa, donde los sistemas de prácticas asociados involucran la identificación de una primera característica de la proporcionalidad inversa. A su vez, favorece estimar los datos relacionados, en este caso, distancia-tiempo, además de que puede ser de utilidad para identificar si se está ante una relación de proporcionalidad directa o inversa o si no hay proporcionalidad.

2.4.2 Significado aritmético de la proporcionalidad inversa

Godino et al. (2017) establecen como primer significado pragmático de la proporcionalidad el significado aritmético, el cual es distinguido por la aplicación de procedimientos de cálculos puramente aritméticos (multiplicación, división). Para este significado se plantea la siguiente situación problema: Un coche circulando a 90 $\mathrm{km/h}$ ha tardado 12 horas en realizar un viaje. ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer el mismo trayecto a una velocidad de $80\ \mathrm{km/h}$?

El coche recorre 90 kilómetros por cada hora transcurrida. Como tardó 12 horas en recorrer el trayecto, entonces recorrió en total 90 × 12 = 1080 kilómetros. Para saber cuántas horas tarda en recorrer 80 kilómetros se calcula el cociente:

$\frac{1080}{80}$ = 13.5 horas.

Por lo tanto, el coche tarda 13.5 horas en recorrer el mismo trayecto a una velocidad de 80 km/h.

En esta solución intervienen únicamente valores numéricos y se aplican operaciones aritméticas como la división y la multiplicación sobre dichos valores, es decir, no se hace uso de un razonamiento algebraico, por lo que el sistema de prácticas llevado a cabo, según Godino et al. (2014), se considera de Nivel 0 de algebrización.

2.4.3 Significado protoalgebraico de la proporcionalidad inversa

El significado protoalgebraico está centrado en la aplicación de la noción de proporción inversa y en la resolución de una ecuación de la forma $xy = k$, como por ejemplo, en la siguiente secuencia de prácticas:

La relación que se establece entre las cantidades velocidad y tiempo que se tarda en recorrer el trayecto, es de proporcionalidad inversa. En una relación de proporcionalidad inversa, los productos de las cantidades que se corresponden son iguales, esto es:

$$90\ {}^{km}/_{h} \times 12\ h = 80\ {}^{km}/_{h} \times x\ h$$

siendo x el tiempo que se tardará en transcurrir el mismo trayecto a una velocidad de $80\ km / h$.

$$\text{Luego, } x = \frac{90\ km/h \times 12h}{80\ km/h} = 13.5\ h.$$

2.4.4 Significado algebraico-funcional de la proporcionalidad inversa

El significado algebraico-funcional se caracteriza por la aplicación de la noción de la función racional $f(x) = kx$ y de técnicas de resolución basadas en las propiedades de dichas funciones. De aquí que,

$f(90\ {}^{km}/_{h}) = 12\ h$, es decir, $\frac{k}{90\ {}^{km}/_{h}} = 12\ h$.

Por ser una relación de proporcionalidad directa, se sabe además que $k = xy$ por lo tanto

$k = 1080\ km$ [a una velocidad de $1\ {}^{km}/_{h}$ se tardaría 1080 horas en recorrer el trayecto].

De aquí que $f(x) = \frac{1080}{x}$, por lo que

$$f(80\ {}^{km}/_{h}) = \frac{1080\ km}{80\ {}^{km}/_{h}} = 13.5\ h.$$

Luego, el tiempo que se tarda en recorrer el trayecto a una velocidad de $80\ {}^{km}/_{h}$ es 13.5 horas.

El sistema de prácticas puesto en juego en esta solución involucra una función racional, que, al poder k tomar cualquier valor, lo que se tiene en realidad es una familia de funciones inversas, con parámetro k, lo cual según Godino et al. (2014) es un primer acercamiento al Nivel 4 de algebrización.

3. Metodología

Para este trabajo se recurrió al análisis documental y al estudio de casos. El análisis documental se realizó al Plan de estudios 2011 (Secretaría de Educación Pública, 2011) y a un libro de texto vigente para segundo año de secundaria (García y Block, 2016). De igual manera se hizo un análisis a las fuentes en las que se basan los profesores para planear sus clases. Otra técnica de investigación empleada fue la observación no participante, para lo cual se analizaron 8 y 6 sesiones de clases de dos profesores, respectivamente, mismas que fueron consideradas por los docentes como las requeridas para estudiar los temas de proporcionalidad directa e inversa durante ese ciclo escolar.

Se optó como técnica de investigación el estudio de casos debido a que representa:

> una herramienta muy útil de hacer investigación, ya que permite tener como resultado un enfoque holístico de una situación o evento en estudio, lo cual concede al investigador un abanico muy amplio de posibilidades para abordar un problema de investigación. (Escudero et al., 2008, p. 10)

En la siguiente sección se exponen las acciones metodológicas y los instrumentos de investigación que fueron diseñados y que contribuyeron al logro del objetivo planteado.

3.1 Técnicas e instrumentos

El trabajo fue dividido en fases, a cada una de ellas le corresponden ciertas acciones metodológicas, así como las técnicas e instrumentos de investigación a los que se recurrió para el desarrollo de estas. En la siguiente tabla se sintetizan los aspectos antes mencionados.

Tabla 1

Descripción de los aspectos metodológicos de la investigación

Fases	**Acciones metodológicas**	**Técnicas (TI) e Instrumentos de investigación (II)**
Declaración de los significados pragmáticos en el estudio de la proporcionalidad.	Declaración de los significados pragmáticos sobre la noción de proporcionalidad, a partir de los cuales se caracterizaron cada uno de los significados institucionales planteados en los restantes objetivos específicos.	TI: Revisión documental de artículos relacionados con los significados parciales y los significados pragmáticos de la proporcionalidad. II: Síntesis y ficha de contenido.
Caracterización del significado pretendido por el currículo.	Identificación y descripción de los sistemas de prácticas y las configuraciones epistémicas promovidas en el plan de estudios y sus apoyos.	TI: Análisis documental de planes de estudio y libros de texto. II: Cuadros sinópticos.
Caracterización del significado pretendido por profesores de secundaria en el estudio de la proporcionalidad.	Identificación de las configuraciones de objetos y los sistemas de prácticas puestas de manifiesto en las planeaciones de clase de los sujetos en estudio.	TI: Análisis de las planificaciones de clase de los profesores seleccionados y análisis de cuestionario aplicado a los mismos, con el objetivo de obtener información acerca de cómo los profesores planean sus sesiones de clases referentes a los temas de interés. II: Cuadros sinópticos y cuestionario.
Caracterización del significado implementado por profesores de secundaria en el estudio de la proporcionalidad.	Identificación de los sistemas de prácticas y las configuraciones epistémicas que son implementadas por los profesores al impartir el tema de la proporcionalidad.	TI: Observación no participante de las clases implementadas por los sujetos en estudio. II: Formato para el registro de observación de clases diseñado exprofeso.
Triangulación de la información.	Triangulación de la información obtenida en cada una de las fases anteriores, con el propósito de cumplir con el objetivo general de este trabajo.	TI: Contrastación de los sucesivos significados. II: Tabla comparativa.

Fuente: Elaboración propia a partir de los aspectos teóricos y metodológicos de la investigación desarrollada.

El análisis y triangulación de la información generada permitió el logro del objetivo planteado.

3.2 Población participante

Para llevar a cabo este trabajo, se seleccionaron como sujetos de investigación a dos profesores que imparten clases de Matemáticas en segundo año de secundaria. A pesar de que el tema de proporcionalidad es también estudiado en primer grado, los profesores indicaban que, como introducción al tema, se presentaría un breve repaso de lo visto en el grado anterior, lo cual da evidencia del tipo de sistemas de prácticas que el profesor pone en juego en primer grado. Como característica principal de estos sujetos estaba el que impartieran alguno de los temas de proporcionalidad, esto debido a que el sistema educativo mexicano permite a los profesores la elección del orden de los temas a tratar, lo que origina que algunos de ellos no sean estudiados por falta de tiempo, o que sean estudiados superficialmente.

Se entrevistaron a cinco posibles sujetos de estudio, de los cuales únicamente dos cumplían con las características solicitadas. Los docentes seleccionados señalaron que los temas que serían impartidos eran:

- Representación algebraica y análisis de una relación de proporcionalidad y = kx, asociando los significados de las variables con las cantidades que intervienen en dicha relación.

- Identificación y resolución de situaciones de proporcionalidad inversa mediante diversos procedimientos.

4. Resultados

Se presenta a continuación la información obtenida en cada una de las fases, mediante las siguientes tablas. Esto con la finalidad de sintetizar la información generada.

Tabla 2

Significados del Profesor A

Significados pragmáticos	**Significados pretendidos por el currículo**	**Significados pretendidos por el Profesor A**	**Significados implementados por el Profesor A**
Significado informal/ cualitativo	Este se presenta como un primer acercamiento al concepto de proporcionalidad, ya que surge a partir de cuestionamientos en los que se espera que el estudiante logre identificar los tipos de relaciones que existen. Se plantean preguntas como: ¿qué sucede con la variable dependiente cuando la variable independiente aumenta?	Se promueve con la finalidad de que los estudiantes se percaten de la existencia de una relación entre las variables involucradas, esto como un primer acercamiento a la proporcionalidad directa. Este significado es en el que se presenta mayor énfasis, ya que la mayoría de las situaciones-problema involucra procedimientos de carácter numérico.	No se promueve.
Significado aritmético	Surge al momento de resolver problemas de llenado de tablas o de responder cuestionamientos en los que se solicita que se calcule el valor de alguna de las variables involucradas.	Se promueve con la finalidad de representar las relaciones entre variables mediante reglas, para lo cual se proporcionan o se solicita a los estudiantes que establezcan las expresiones algebraicas que corresponden a las relaciones entre las variables involucradas.	Se promueve al momento en que se solicita que los estudiantes realicen operaciones básicas como multiplicación y división de números, que en la mayoría de los casos suelen ser números enteros.
Significado protoalgebraico	Se promueve al momento en que se solicita la generalización de las situaciones de proporcionalidad, esperando que al resolver los problemas los estudiantes sean capaces de plantear una ecuación del tipo o apliquen la regla de tres simple y la regla de tres inversa.	Se promueve al momento en que se solicita la generalización de las situaciones de proporcionalidad, esperando que al resolver los problemas los estudiantes sean capaces de plantear una ecuación del tipo o apliquen la regla de tres simple y la regla de tres inversa. También se promueve al momento en que se solicita la identificación de la gráfica que cumple con una relación de proporcionalidad directa o la traducción del lenguaje numérico al gráfico.	Se promueve únicamente a manera de generalización, al solicitar a los estudiantes que indiquen la "regla" que satisface una relación dada o que a partir de una ecuación del tipo se calculen los valores de alguna de las variables involucradas o de la constante de proporcionalidad.
Significado algebraico-funcional	Se promueve de manera parcial, pues no se aborda el estudio de las propiedades de las funciones, pero sí características particulares. Estas se abarcan en el estudio de las características de gráficas que representan relaciones de proporcionalidad en el plano cartesiano. Se continúa estudiando en tercer grado.	No se promueve.	No se promueve.

Fuente: Elaboración propia a partir del análisis de los datos obtenidos en cada una de las fases metodológicas. Profesor A.

Tabla 3

Significados del Profesor B

Significados pragmáticos	**Significados pretendidos por el currículo**	**Significados pretendidos por el Profesor B**	**Significados implementados por el Profesor B**
Significado informal/ cualitativo	Este se presenta como un primer acercamiento al concepto de proporcionalidad, ya que surge a partir de cuestionamientos en los que se espera que el estudiante logre identificar los tipos de relaciones que existen. Se plantean preguntas como: ¿qué sucede con la variable dependiente cuando la variable independiente aumenta?	No se promueve.	No se promueve.
Significado aritmético	Surge al momento de resolver problemas de llenado de tablas o de responder cuestionamientos en los que se solicita que se calcule el valor de alguna de las variables involucradas.	Se promueve en situaciones-problema en las que el profesor espera que sus estudiantes realicen algunas operaciones básicas (multiplicación, división) para determinar uno de los datos faltantes.	Se promueve al solicitar a los estudiantes que encuentren el valor unitario de algunas relaciones de proporcionalidad, simplemente como un primer acercamiento a la solución de la situación-problema.
Significado protoalgebraico	Se promueve al momento en que se solicita la generalización de las situaciones de proporcionalidad, esperando que al resolver los problemas los estudiantes sean capaces de plantear una ecuación del tipo y = kx o apliquen la regla de tres simple y la regla de tres inversa.	Se espera que los estudiantes sean capaces de entender y poder aplicar la regla de tres simple y regla de tres inversa, además de trazar gráficas que representan la relación de proporcionalidad directa o inversa, así como el que los estudiantes puedan establecer la regla y = kx que representa dichas relaciones.	Se promueve en mayor medida, debido a que el profesor prioriza que los estudiantes sean capaces de hacer uso de la regla de tres simple o la regla de tres inversa.
Significado algebraico-funcional	Se promueve de manera parcial, pues no se aborda el estudio de las propiedades de las funciones, pero sí características particulares. Estas se involucran en el estudio de las características de gráficas que representan relaciones de proporcionalidad en el plano cartesiano. Se continúa estudiando en tercer grado.	No se promueve.	No se promueve.

Fuente: Elaboración propia a partir del análisis de los datos obtenidos en cada una de las fases metodológicas. Profesor B.

La concreción de las acciones metodológicas planteadas permitió identificar que el currículo promueve tres de los cuatro significados pragmáticos para segundo de secundaria, retomando el cuarto significado pragmático en tercer grado con el tema de variación lineal. El significado informal/cualitativo se promueve como un primer acercamiento al tema de proporcionalidad; el significado aritmético como técnica de resolución de los problemas, se promueve en situaciones donde lo que se espera es que los estudiantes ejecuten multiplicaciones, divisiones o cualquier cálculo aritmético. Por su parte, el significado protoalgebraico surge en situaciones en donde lo que se espera es la generalización de las situaciones de proporcionalidad, buscando que al resolver los problemas los estudiantes sean capaces de poder plantear una ecuación del tipo $y = kx$ o apliquen la regla de tres simple y la regla de tres inversa.

Los significados pretendidos por el currículo se han identificado a partir del análisis de ejemplos de situaciones-problema que se plantean en las orientaciones didácticas que se presentan a los docentes sobre cómo abordar los temas de proporcionalidad directa e inversa.

En cuanto al significado pretendido, con el Profesor A se identificó que, aunque en sus planeaciones de clases se manifiestan los tres significados pragmáticos que son promovidos por el currículo, en su implementación se presenta el significado aritmético en mayor medida, pues los problemas planteados únicamente solicitan a los estudiantes la aplicación de procedimientos como multiplicación y división de números enteros. También se promueve el significado protoalgebraico, ya que, a partir de encontrar las soluciones, se solicita que los estudiantes identifiquen la constante de proporcionalidad k, y que lo representen en una expresión de la forma $y = kx$. El tratamiento que se le da a este tipo de situaciones es considerado parcialmente protoalgebraico ya que no se manifiestan características de la expresión como función, pues se basa únicamente en sustituir el valor de la constante k en una expresión dada.

Del mismo modo sucede para el caso del Profesor B, ya que mientras que en su planeación de clases promueve únicamente dos de los significados pragmáticos, en su implementación da prioridad únicamente al significado protoalgebraico, pues muestra interés en que sus estudiantes sean capaces de aplicar la regla de tres simple y la regla de tres inversa. Solo en ocasiones se interesa en que los estudiantes sean capaces de realizar la gráfica que represente la relación de proporcionalidad dada, la cual se hace a partir de la identificación de puntos (x, y) en el plano cartesiano, lo cual involucra una introducción al significado algebraico-funcional.

5. Conclusiones

A partir del desarrollo de la investigación aquí presentada, se concluyen varios aspectos que se consideran interesantes. En primer lugar, cabe resaltar que la propuesta de los significados pragmáticos (Godino et al., 2017), que está descrita a partir de los niveles de algebrización y fue retomada para esta investigación, se desarrolló únicamente para el caso de la proporcionalidad directa, por ello, se recurrió a la elaboración propia de una propuesta para el caso de la proporcionalidad inversa, misma que se muestra en la sección 2.4.

A partir de ambas propuestas, se llevó a cabo la identificación de los significados pragmáticos para la proporcionalidad directa e inversa, puestos de manifiesto en el currículo, así como en las planeaciones e implementaciones de clases de ambos profesores. Lo anterior, dio lugar al logro del objetivo planteado: *describir el grado de representatividad de los significados de referencia, pretendido e implementado, sobre el tema de proporcionalidad, con respecto a un conjunto de significados parciales que funcionan como referencia global.*

A partir del análisis de la información obtenida en cada una de las fases metodológicas desarrolladas, se concluye que los significados promovidos por los profesores en sus planeaciones e implementaciones de clases van perdiendo la riqueza con respecto al significado pretendido por el currículo. Lo anterior debido a que, a pesar de que el currículo establece que para segundo grado de secundaria se deben promover tres significados pragmáticos (el significado informal-cualitativo como un primer acercamiento a la noción de proporcionalidad directa e inversa, el significado aritmético al plantear problemas en los que hay que determinar el valor de la constante de proporcionalidad o alguna de las variables involucradas a partir de operaciones básicas, así como el significado protoalgebraico al plantear situaciones-problema en donde se solicita el llenado de una tabla o la gráfica de una relación de proporcionalidad), los profesores por su parte promueven versiones incompletas de dichos significados, priorizando únicamente uno de ellos.

Lo anterior presenta consecuencias, pues el significado que aprenden los estudiantes es incompleto y poco representativo con respecto a la propuesta curricular, por lo que la riqueza matemática del tema se ve disminuida. A partir de ello se concluye que la falta de representatividad del significado de proporcionalidad, promovido por los profesores, es posible que genere a su vez dificultades de aprendizaje en los estudiantes de secundaria, mismas que afectarán en estudios posteriores donde la proporcionalidad es considerada como un tema base.

A pesar de que existen diversas investigaciones en donde se abordan las dificultades de los estudiantes y de los profesores con respecto al tema de la proporcionalidad (Balderas et al., 2014; Block, 2001; Mochón, 2012), este documento presenta una categorización de significados, la cual permite dar evidencia de los puntos clave en los que hay

que centrar la atención al tratar de abordar dicha problemática.
Se puede destacar principalmente la importancia de promover el desarrollo del razonamiento proporcional en los estudiantes, sin exigir desde un primer momento que se repliquen las técnicas o reglas presentadas por los docentes. Para ello, es importante que los docentes tengan conocimientos acerca de la diversidad de significados de la proporcionalidad, así como de los distintos sistemas de prácticas que pueden manifestar sus estudiantes, para que a partir de ello planeen e implementen sus sesiones de clases, dando la importancia que el tema merece.

Por otra parte, aunque se logró el objetivo planteado a partir de los elementos retomados de los significados pragmáticos de la proporcionalidad y de la propuesta propia para la proporcionalidad inversa, se considera necesaria una extensión a ambas propuestas ya que, por ejemplo, para el caso del significado informal-cualitativo, solían presentarse ejemplos de sistemas de prácticas que pudieran considerarse más informales que otros, lo mismo ocurrió en cada uno de los restantes significados, por lo que pudieran considerarse subcategorías dentro de cada uno de los significados pragmáticos propuestos.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado con el apoyo de la beca #859811 Otorgada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT, México).

Referencias

Balderas, R., Block, D., y Guerra, M. (2014). "Sé cómo se hace, pero no por qué". Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestros de secundaria. *Scientific Electronic Library Online, 26*(2), 7-32.

Block, D. (2001). Conocimientos de maestros de primaria sobre la proporcionalidad. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 19*, 675-680.

Escudero, J., Delfín, L., y Gutiérrez, L. (2008). El estudio de caso como estrategia de investigación en las ciencias sociales. *Ciencia Administrativa, 1*, 7-10. https://www.uv.mx/iiesca/files/2012/12/estudio2008-1.pdf

Fernández, C., Llinares, S., y Valls, J. (2012) Learning to notice students' mathematical thinking through online discussions. ZDM. *Mathematics Education, 44*, 747-759. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0425-y

García, S., y Block, D. (2016). *Matemáticas 2. Secundaria Conecta Estrategias*. Ediciones SM.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática* (versión ampliada). https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M., y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-13). http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/godino_beltran.pdf

Godino, J., y Font, V. (2008). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos. Anexo al artículo, "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos". *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación matemática, 24*(1), 133-157. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262012000100006

Rivas, M., Godino, J., y Castro, W. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema, 26*(42), 559-588. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200008

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Plan de Estudios 2011. Educación básica. México.* Gobierno de México. https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/20177/Plan_de_Estudios_2011_f.pdf

Torres, E., y Deulofeu, J. (2018). La enseñanza de la proporcionalidad en el paso de la Educación Primaria a la Secundaria: el caso de Ainoa. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 99*, 105-126. http://funes.uniandes.edu.co/12902/

SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i2.51

PROPUESTAS DIDÁCTICAS PARA LA EDUCACIÓN BÁSICA QUE IMPLICAN EL USO DEL MATERIAL MANIPULATIVO ALGEBLOCKS

DIDACTIC PROPOSALS FOR PRIMARY EDUCATION THAT INVOLVE THE USE OF ALGEBLOCKS MANIPULATIVE MATERIAL

Lilian Esquinelato da Silva
lilianes93@gmail.com
Universidad Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São Paulo, Brasil

Alex Sander Martins de Camargo
vanhallenaxl@hotmail.com
Universidade Federal de São Carlos, São Paulo, Brasil

Paulo Cesar Oliveira
paulodfqm@gmail.com
Universidad Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São Paulo, Brasil

RESUMEN

Este artículo de propuesta didáctica tuvo como objetivo unir los productos educativos de dos tesis de maestría, una académica y otra profesional, con el propósito de explorar las potencialidades y limitaciones relativas al uso del material de manipulación de Algeblocks. Los contenidos matemáticos fueron contemplados de acuerdo a las competencias y habilidades presentes en la Base Curricular Nacional Común (BNCC), para los últimos años de la serie de la Escuela Primaria y Secundaria. Más concretamente, presentamos propuestas de tareas para el estudio de productos notables basadas en la metodología de enseñanza-aprendizaje-evaluación a través de la resolución de problemas. La relación de Euler fue otro contenido estudiado desde la perspectiva de las tareas de exploración-investigación centradas en el instituto. En el contexto de cada tarea propuesta, presentamos una resolución comentada con pautas didáctico-pedagógicas, según el prototipo del material manipulable utilizado.

PALABRAS CLAVE:
Material manipulable; escuela primaria y secundaria; resolución de problemas.

ABSTRACT

This didactic proposal article aimed to unite educational products from two Master's theses, one academic and the other professional, with the purpose of exploring potentialities and limitations regarding the use of Algeblocks manipulative material. The mathematical contents were considered according to the competences and abilities presented in the Common National Curricular Base - BNCC, for the final years of the Elementary and High School series. More specifically, we present task proposals for the study of notable products based on the Teaching-Learning-Assessment Methodology through Problem Solving. Euler's relationship was another content studied from the perspective of exploration-research tasks for high school. Within the context of each proposed task, we present a commented resolution with didactic-pedagogical guidelines, according to the prototype of the manipulable material used.

KEYWORDS:
Manipulative material; elementary and high school; problem solving.

Recibido: 9 de Enero 2021, Aceptado: 13 de Mayo de 2021

1. Introducción

Este texto reúne aspectos de enseñanza y/o aprendizaje de las únicas tesis de maestría brasileñas (Camargo, 2020; Silva, 2018), cuyo producto educativo implicaba la planificación de tareas con el material manipulador de los Algeblocks. Este hecho fue verificado por Camargo (2020) en el mapeo realizado a disertaciones y tesis restringidas a estudios que involucran materiales didácticos manipulables y concretos, desde la plataforma digital de la Coordinación de Perfeccionamiento del Personal de la Enseñanza Superior (CAPES) y de la Biblioteca Digital Brasileña de Tesis y Disertaciones (BDTD).

El prototipo de material didáctico de Algeblocks en la investigación de Camargo (2020) consistía en 72 piezas prismáticas de 10 colores diferentes, para distinguir las dimensiones de las piezas mencionadas. Para dicha construcción fue necesario considerar una terna de dimensiones X, Y y 1u (una unidad) para los prismas a construir, ya que estamos considerando un material didáctico con piezas tridimensionales. Se adoptó una terna de dimensiones X = 60 mm, Y = 50 mm y 1u = 35 mm.

Después de la etapa de hacer estas piezas (Figura 1), fueron pintadas y clasificadas como: 8 cubos amarillos de aristas X; 8 cubos anaranjados de aristas Y; 16 cubos azules de arista 1u; 6 prismas rojos de aristas X, X e Y (pieza X^2Y); 6 prismas verdes de aristas X, X y 1u (pieza X^2); 6 prismas marrones de aristas Y, Y y X (pieza Y^2X); 6 prismas púrpuras con aristas Y, Y y 1u (pieza Y^2); 6 prismas verde claro con aristas 1u, 1u y X (pieza X); 6 prismas azul claro con aristas 1u, 1u e Y (pieza Y) y 4 prismas rosados con aristas X, Y y 1u (pieza XY).

Figura 1. Piezas del Algeblocks.
Fuente: Camargo (2020, p. 47).

Este material educativo también puede hacerse con cartón o cartulina, por ejemplo, a un costo más asequible, como se muestra en la Figura 2.

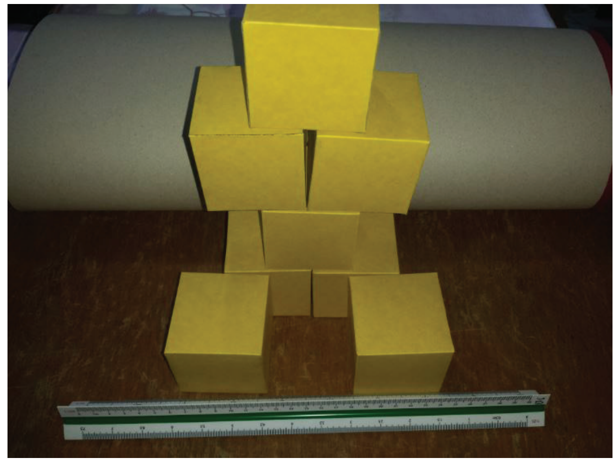


Figura 2. Construcción en papel cartón de la pieza X.
Fuente: Camargo (2020, p. 57).

Una pregunta propuesta por Camargo (2020) sobre los Algeblocks tiene la siguiente formulación: ¿por qué se necesitan exactamente 10 tipos de piezas para componer este material? Una de las respuestas involucra el uso del diagrama de árbol (Figura 3), ya que en la escuela secundaria los contenidos que implican el análisis combinatorio se contemplan en el currículo de estudios de Matemáticas:

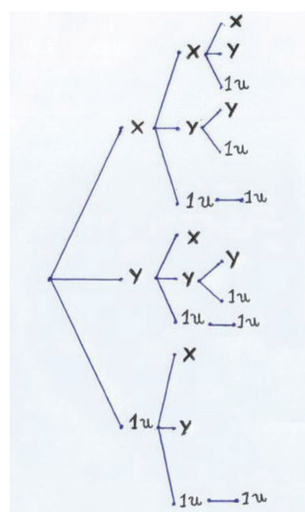


Figura 3. Diagrama de árbol para obtener las ternas que implican X, Y y 1u.
Fuente: Camargo (2020, p. 50).

Considerando la Figura 3, las rutas de dos etapas no deben ser consideradas, ya que se han agotado todas las posibilidades de elección de las ternas.

En las siguientes secciones presentamos un recorte de la disertación de Camargo (2020) y Silva (2018), centrándonos en sus productos educativos elaborados en forma de tareas, tanto para los últimos años de la escuela primaria como para los grados de la escuela secundaria. Según Castro, Oliveira y Tinti (2019), el producto educativo es el resultado de la investigación de "un profesor-investigador que tiene la iniciativa de buscar medios y métodos para mejorar su desempeño profesional y que puede producir conocimientos y materiales para mejorar eficazmente la calidad de la enseñanza" (p. 243).

Camargo (2020) elaboró cuatro tareas con un guion de resolución y pautas didáctico-pedagógicas para el profesor. Los contenidos matemáticos contemplados fueron: función de segundo grado; conceptos de polígonos regulares; resolución, análisis y discusión de sistemas lineales con dos ecuaciones y dos variables utilizando método de eliminación; enfoque de conceptos de prismas (área de superficie y volumen) y relación de Euler.

Para este texto, seleccionamos la tarea que involucra la relación de Euler, cuya habilidad y competencia está contemplada en el 3º grado de la escuela secundaria, en la Base del Currículo Nacional Común ([BNCC], Brasil, 2018).

Destacamos que en el 5º grado de la escuela primaria también se prevé el desarrollo de la capacidad de asociar figuras espaciales a sus planos (prismas, pirámides, cilindros y conos) y analizar, nombrar y comparar sus atributos, lo que incluye la relación de Euler, según el BNCC (Brasil, 2018).

Silva (2018) elaboró doce tareas que se aplicaron a una promoción de 8° grado de primaria en una escuela pública estatal, según la metodología enseñanza-aprendizaje-evaluación mediante la resolución de problemas. Se abordaron los contenidos de números enteros, suma, resta, multiplicación y división de números enteros, expresiones algebraicas, polinomios, suma, resta, multiplicación y división de polinomios y productos notables.

Para este texto, destacamos el estudio de productos notables en el 8° año de educación primaria, considerando que en el BNCC se prescribe para el 9° año de primaria, la capacidad de "comprender los procesos de factorización de expresiones algebraicas, en base a su relación con productos notables, para resolver y elaborar problemas que puedan ser representados por ecuaciones polinomiales de 2º grado" (Brasil, 2018, p. 317).

2. La relación de Euler

En su labor investigadora a nivel de maestría profesional, Camargo (2020) apoyó los lineamientos y concepciones de Lorenzato (2012) sobre materiales didácticos, considerando estos como un recurso auxiliar del profesorado en cuanto a alternativa metodológica para el desarrollo de los contenidos escolares, ya que su buen uso puede ampliar su potencial en cuanto al proceso de enseñanza-aprendizaje, evitando situaciones de fracaso escolar. Así, para situaciones de éxito escolar en el uso de materiales didácticos manipulativos, es importante que el docente tenga dominio sobre este recurso para que sea capaz de proponer la formulación de tareas que estimulen el razonamiento del alumno para la apropiación de los aspectos conceptuales del contenido matemático.

La propuesta didáctica de Camargo (2020) tomó como base de investigación teórico-metodológica las tareas exploratorio-investigativas de Ponte (2014). Para comprender la estructura de formulación de tareas, Ponte (2014) destaca cuatro tipos y analiza la forma de trabajar en el aula. George Pólya (1978) hizo una primera distinción básica entre "ejercicio" y un "problema" indispensable, según Ponte (2014). La enseñanza convencional está marcada por el término "ejercicio", que se caracteriza por ser un tema, cuya resolución requiere un método de solución adecuado, que debe ser enseñado por el profesor y llevado a cabo por el alumno.

Un tipo de tarea diferente del "ejercicio" es un "problema". Según las concepciones de Ponte (2014), un problema dado es un tema que requiere que el alumno conozca una estrategia de resolución, la cual es desconocida por el momento. Considerando las concepciones de Ponte (2014), la noción de problema:

> Se demuestra problemático, con muchas comprensiones de qué es y qué no es un problema y, especialmente, un buen problema para proponer a los estudiantes. ¿Son los problemas que aparecen en los manuales, a veces en una sección separada, tareas que pueden ayudar a incorporar una orientación curricular alternativa (p. 18)

Tomando como punto de partida la distinción entre "problema" y "ejercicio", Ponte (2014) caracteriza varios tipos de problemas: de palabras o problemas verbales; de equiparar (conocido como problemas de ecuación); de demostrar (conocido como problemas de demostración); de descubrir (problemas de exploración o investigación); de la vida real (llamados problemas contextualizados) y situaciones problemáticas.

Para Ponte (2014), los tipos de problemas que se destacan pertenecen a las tres últimas categorías, por su relación con la realidad y, en particular, por presentar preguntas abiertas. Por tanto, podemos entender que las exploraciones o investigaciones matemáticas están asociadas al descubrimiento de algo por parte del alumno o, incluso, por el profesor. Por otro lado, Ponte (2014) cree en el contraste entre los términos "ejercicios" y "escenarios de investigación", este último referido al campo de trabajo del docente.

La opción por el escenario de investigación trae al docente dificultades adicionales con relación al trabajo convencional, obligándolo a cambiar el contrato didáctico preestablecido con los estudiantes. De esta forma, los alumnos se ven obligados a salir de la denominada "zona de confort" y colocarse en una "zona de riesgo", en la que se tiene la ventaja de que el alumno puede contar con el trabajo colaborativo, realizando con sus compañeros las tareas propuestas por el docente.

Teniendo en cuenta los diferentes tipos de tareas matemáticas, Ponte (2014) destaca que las dos dimensiones fundamentales de las tareas son el "grado de desafío matemático" y el "grado de estructura". Según Ponte (2014), el grado de desafío matemático depende de la percepción de la dificultad de la pregunta propuesta, que puede variar entre "reducida" y "alta". El grado de estructura abarca el contexto del enunciado de una tarea determinada, que puede variar entre los polos "abierto" y "cerrado". En este contexto, una tarea cerrada contiene un enunciado cuya información requiere de la resolución de estrategias por parte del alumno que conducen a la respuesta esperada, como son los casos de problemas propuestos en la perspectiva de Polya (1978, citado en Ponte, 2014). Una tarea abierta admite cierta indeterminación en al menos un aspecto de las tareas cerradas, por ejemplo, la existencia de diferentes soluciones para la tarea.

Asociando las dos dimensiones de las tareas puntuadas por Ponte (2014), existen cuatro tipos de tareas: el ejercicio es una tarea cerrada y de desafío reducido; el problema también es una tarea cerrada, pero con un gran desafío; la investigación es una tarea abierta con un gran desafío y la exploración es una tarea abierta y accesible para la mayoría de los estudiantes. Ponte (2014) afirmó que "la línea de demarcación entre los diferentes tipos de tareas no siempre es clara, por ejemplo, una determinada tarea puede ser una exploración o un ejercicio, según los conocimientos previos de los estudiantes" (p. 21).

Contrariamente a la idea de que los estudiantes no pueden realizar una tarea si no se les ha enseñado directamente a resolverla, indica que adquieren mucho conocimiento fuera de la escuela que pueden movilizar en la clase de matemáticas, y es justamente esto lo que buscamos valorar en el enfoque exploratorio-investigativo. Por tanto, es importante valorar el descubrimiento de los estudiantes de sus propios métodos para resolver una pregunta, destacando que esta es a menudo la mejor manera de aprender. De esta forma, los antecedentes de conocimientos previos de los estudiantes pueden cambiar la clasificación de una determinada tarea, lo que implica que pueden adquirir características notables de ejercicios, problemas, exploraciones o investigaciones matemáticas.

Un detalle importante de esta tarea es que también nos referimos a él como exploratorio. Según las principales ideas de Ponte (2014), esta tarea no puede denominarse investigativa debido a la ausencia de elementos cruciales para la consolidación de una investigación matemática en la que se produzca una demostración o prueba matemática, utilizando el razonamiento lógico-deductivo del alumno. Esta observación se extiende a todas las tareas llamadas exploratorias.

Otro aspecto a considerar en el estudio del contenido matemático a través de los Algeblocks es la distinción que establece:

> Los objetos materiales –sólidos o dibujos– son solo modelos materializados de las entidades mentales con las que el matemático trata. En segundo lugar, solo en el sentido conceptual se puede considerar la perfección de las entidades geométricas: líneas rectas, círculos, cuadrados, cubos, etc. (Fischbein, 1993, p. 141)

Siguiendo la argumentación de Fischbein (1993), cualquier modelo de material didáctico de los Algeblocks contendrá las entidades geométricas asociadas a sus formas, pero solo en carácter conceptual. Por otra parte, cabe reiterar que no se puede garantizar la perfección de las piezas del material, ya que en la fase de construcción los errores en la realización de las mediciones se propagan varias veces, más aún en las piezas tridimensionales hechas a mano.

Como ejemplo de la manipulación de Algeblocks en una actividad matemática, proponemos una tarea apoyada en la definición de la relación de Euler, cuyo estudio en la escuela secundaria tiene el propósito de profundizar en la geometría espacial, estableciendo una generalidad para los poliedros convexos.

Antes de presentar el enunciado para la tarea, recordemos la definición de la relación de Euler basada en Muniz Neto (2013). Dado un poliedro P (no necesariamente convexo), con V, A y F, su número de vértices, aristas y caras respectivamente, entonces $X(P) = V - A + F = 2$. la "característica de Euler" de P se denota por X (P) y tiene un valor constante igual a 2, para todo poliedro convexo.

Un hecho interesante sobre la relación de Euler es la existencia en los poliedros no convexos que satisface la igualdad matemática. En este contexto, la tarea se formuló con dos preguntas:

> a. ¿Hay poliedros no convexos que respeten la relación de Euler? Utilice Algeblocks para representar posibles construcciones sólidas geométricas.
> b. ¿Puede decirse que un poliedro no convexo que respeta la relación de Euler es "euleriano"? ¿Es esta designación válida cuando se trata de poliedros convexos? Argumente basándose en el uso de Algeblocks.

En la resolución de la "pregunta a" es posible construir varios sólidos no convexos. Un hecho que puede resultar curioso para los estudiantes es que cuando se encuentran con la afirmación, pueden conjeturar que, si el poliedro no es convexo, entonces no respeta la relación de Euler y por lo tanto no puede ser llamado euleriano, lo cual es un malentendido que surge de la negación de las proposiciones involucradas, que no siempre es un resultado válido en matemáticas. Por otra parte, no se puede garantizar la reciprocidad de la relación de Euler en estos términos, ya que si el poliedro es euleriano, no significa que sea convexo.

Pasamos a la exposición de representaciones figurativas con los respectivos cálculos sobre la construcción de poliedros no convexos, que respetan la relación de Euler.

En la Figura 4 usamos 8 cubos naranjas con arista en "Y" para construir un paralelepípedo recto rectángulo hueco:

Figura 4. Poliedro no convexo euleriano.
Fuente: Camargo (2020, p. 135).

Esta representación figurativa contiene un sólido geométrico no convexo (Figura 4) que respeta la relación de Euler y puede denominarse euleriano. El cálculo de las aristas exteriores es A = 12 + 12 = 24. El número de vértices por la parte externa del prisma es V = 8 + 8 = 16. Para el cálculo de las caras debemos considerar el caso de que el prisma no sea hueco, lo que suma 8 caras. Luego, añadimos 4 caras a causa de la parte filtrada, generando en total F = 6 + 4 = 10. En este sentido, satisface la igualdad de la relación de Euler: X(P) = 16 – 24 + 10 = 2.

Si consideramos 8 cubos amarillos de arista X podemos construir varios poliedros eulerianos no convexos, entre ellos, los que presentamos en la Figura 5.

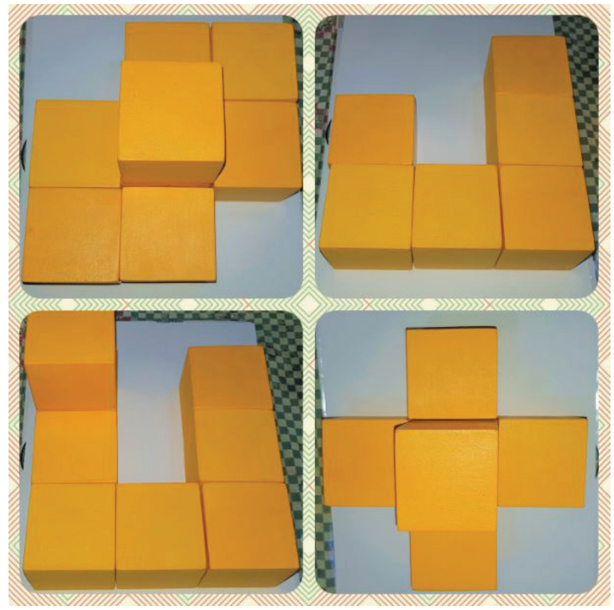


Figura 5. Cuatro variaciones de poliedros con la pieza X3.
Fuente: Camargo (2020, p. 138).

Los Algeblocks facilitan la construcción de otros poliedros eulerianos no convexos. La intención en la "pregunta a" es que el estudiante desarrolle la habilidad de exponer representaciones figurativas con los Algeblocks y validar o no cada construcción con la relación de Euler.

En relación con la "pregunta b", el objetivo era movilizar una sistematización de la relación de Euler a partir del proceso de experimentación con el manejo y la construcción de sólidos geométricos convexos y no convexos, que pueden denominarse eulerianos. Como síntesis, es importante que el estudiante aprenda que cada poliedro que respeta la relación de Euler se llama "euleriano".

3. Productos notables

Silva (2018) desarrolló la parte empírica de su tesis de maestría en una escuela pública de la ciudad de Río Claro - SP. El desarrollo de las tareas en clase contó con el apoyo de la contribución metodológica enseñanza-aprendizaje-evaluación a través de la resolución de problemas con estudiantes de 8º grado de primaria. La planificación de tareas de Silva (2018) tuvo como objetivo permitir conexiones entre aspectos algebraicos, aritméticos y geométricos en el estudio de operaciones polinomiales, a través del material manipulativo Algeblocks. Basado en Johnston (1994), el material manipulativo puede dar potencialidad para la comprensión del estudiante en relación con el nuevo concepto a aprender. Una forma en la que se puede pensar en la comprensión, según Silva (2018), es asociarla con una medida de la calidad y cantidad de conexiones que tiene una nueva idea con ideas existentes. Cuanto mayor sea el número de conexiones en una red de ideas, mejor será la comprensión.

El estudio de Silva (2018), a su vez, se refirió únicamente a la tesis de maestría de Espejel (2010) titulada "Desarrollo del Pensamiento Algebraico mediante el uso de Algeblocks en Estudiantes de Segundo Grado de Educación Secundaria", que involucró el uso de Algeblocks.

Espejel (2010) exploró el uso de Algeblocks con 50 estudiantes de la educación secundaria mexicana (equivalente a los grados 7, 8 y 9 de la escuela primaria brasileña). El propósito de esta investigación fue analizar el uso del "lenguaje algebraico para generalizar propiedades aritméticas y geométricas", además de "resolver problemas mediante la formulación de ecuaciones" (Espejel, 2010, p. 100). Las tareas propuestas por la autora no involucraron el espacio tridimensional. En este sentido, por ejemplo, en el estudio de polinomios se utilizó Algeplan para resolver tareas, como se muestra en la Figura 6.

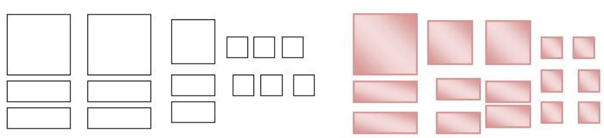


Figura 6. Modelo de Algeplan utilizado por Espejel (2010).
Fuente: Espejel (2010, p. 57).

El prototipo (Figura 6) utilizado por Espejel (2010), de hecho, no era Algeblocks, sino un material similar conocido popularmente como Algeplan en Brasil. La diferencia es que Algeblocks es tridimensional, mientras que Algeplan es bidimensional. Geométricamente hablando, cada pieza de Algeplan representa a una de las caras de un prisma recto de base cuadrada o rectangular de Algeblocks.

Espejel (2010) no proporcionó a los estudiantes que participaban en su investigación el uso de material didáctico. Se optó por la representación figurativa en la construcción de las representaciones algebraicas solicitadas, dejando la construcción de Algeplan como sugerencia para los alumnos, utilizando cartulina, papel, madera, plástico u otros tipos de materiales.

Enseñar a través de la resolución de problemas, según Silva (2018), requiere de un cambio no solo en la forma de enseñar. El maestro necesita cambiar la filosofía de cómo piensa en el aprendizaje y cómo puede ayudar mejor a los estudiantes a aprender. Los profesores deben seleccionar tareas de calidad que permitan a los estudiantes, a través de su resolución, apoyarse en las matemáticas que conocen para aprender nuevos contenidos y, utilizando sus propias estrategias, llegar a soluciones. Los maestros deben desarrollar preguntas apropiadas que puedan llevar a los estudiantes a verificar e informar sobre sus estrategias de resolución; como señala Onuchic (1999), "el problema es todo aquello que no se sabe hacer pero, que se está interesado en resolver" (p. 215).

Sobre el desarrollo de la metodología de enseñanza-aprendizaje-evaluación de las matemáticas a través de la resolución de problemas, Justulin (2014) declaró que "se produce en un proceso 'en espiral', que permite al profesor rescatar los conocimientos previos de los estudiantes, con su participación activa, y profundizar y ampliar su comprensión de un concepto, un procedimiento o un contenido matemático" p. 65).

La presentación de las operaciones algebraicas a los estudiantes es un gran desafío, ya que hay reglas que deben ser seguidas y respetadas. En nuestra experiencia de enseñanza es frecuente tener estudiantes con las siguientes dudas: $x + x = x^2$; $3 + x = 3x$. Una forma de intervención pedagógica para ayudarles a superar esta situación de fracaso escolar es diversificar las formas de representación matemática como, por ejemplo, la visualización.

Como ejemplo de este enfoque destacamos a Banchoff (2008), quien concibe el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas con conexiones y representaciones múltiples del mismo concepto. Al factorizar la diferencia de dos cuadrados, Banchoff (2008) considera que un cuadrado del lado "a" y otro del lado "b" se han eliminado, cuya unión genera dos rectángulos de área (a-b). a y (a-b).b, presentados en el ítem "i" de la Figura 7.

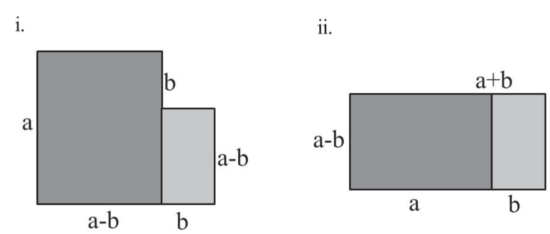


Figura 7. Diferencia de dos cuadrados.
Fuente: Banchoff (2008, p. 102).

La reorganización de los rectángulos del ítem "i" al ítem "ii" generó una figura plana con área
$(a + b).(a - b) = a^2 - b^2$.

El mismo tipo de conexión entre el álgebra y la geometría puede extenderse cuando consideramos el espacio tridimensional como, por ejemplo, en la diferencia de dos cubos. Esta descomposición es menos familiar, pero también es posible geometrizarla, según Banchoff (2008). Cuando se descompone un cubo del lado "a" como un cubo del lado "b" eliminado, tenemos tres prismas con caras rectangulares, dispuestos en la Figura 8.

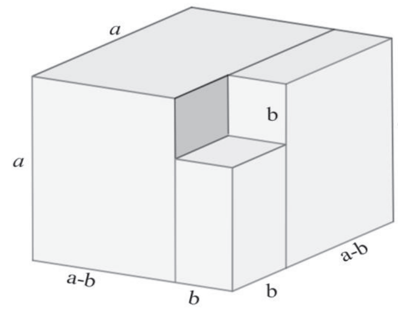


Figura 8. Diferencia de dos cubos.
Fuente: Banchoff (2008, p. 102).

En la Figura 8, se pueden ver tres prismas rectos con caras rectangulares, cuyas áreas se pueden expresar algebraicamente como:
$(a - b).a.a$; $(a - b).b.a$ y $(a - b).b.b$.
La suma de las áreas de estos prismas da como resultado:
$(a - b).a^2 + (a - b).b.a + (a - b).b^2 = (a-b).(a^2 + ab + b^2) = (a^3 - b^3)$.

Las conexiones matemáticas presentadas por Banchoff (2008) se pueden trabajar con el material manipulativo Algeblocks. En la investigación de Silva (2018) se utilizó un prototipo formado por un conjunto de bloques de plástico de varios tamaños, con dimensiones y colores específicos, cada color correspondiente a un patrón de tamaño para representar la unidad, x, y, x^2, xy, x^3, y^3, x^2y y xy^3, dispuestos en la Figura 9.

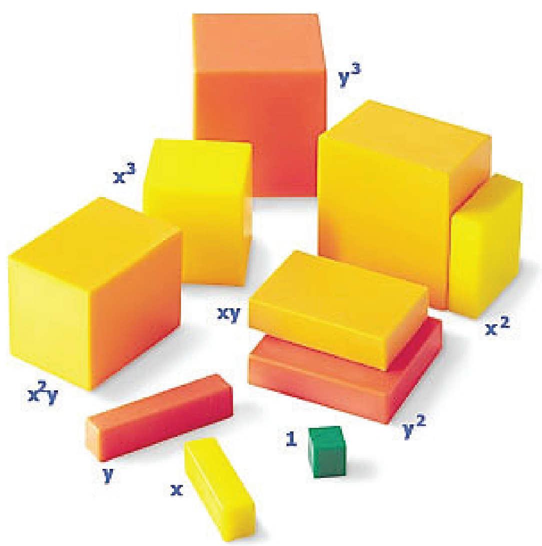


Figura 9. Silva (2018, p.88)

Los Algeblocks que figuran en la Figura 9 fueron desarrollados y probados por Johnston (1994). Según el autor, este material manipulativo permite a los estudiantes aprender conceptos algebraicos abstractos a través del modelado concreto con bloques manipulativos. Con el uso de estos bloques es posible modelar conceptos algebraicos de representación de enteros no negativos para resolver ecuaciones (Johnston, 1994).

Entre el material de apoyo de Johnston (1994) se presenta un tablero con estrategias para la resolución de problemas utilizando Algeblocks, el que guía al profesor a hablar siempre con el alumno y a dejarlo ser el protagonista de su aprendizaje. Más específicamente, se orienta a que el estudiante discuta el problema, lo represente a través del dibujo o a través de las piezas del material, utilice símbolos matemáticos y, cuando la encuentre, presente la solución del problema al profesor y a los compañeros de clase.

El material de apoyo de los Algeblocks refuerza la metodología de enseñanza-aprendizaje-evaluación de las matemáticas a través de la resolución de los problemas empleados por Silva (2018) en la investigación.

Además de los bloques de plástico, el material de apoyo de Johnston (1994) contiene tres tipos de láminas (Figura 10) para realizar actividades algebraicas.

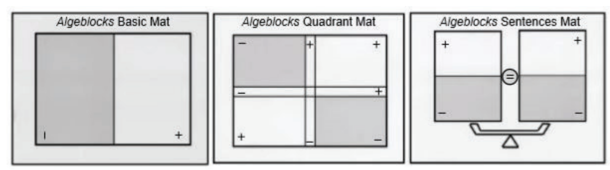


Figura 10. Modelo de hojas de actividad.
Fuente: Silva (2018, p. 89).

Silva (2018) utilizó el material desarrollado por Johnston (1994) y abordó con los estudiantes de 8º grado tareas que implicaban conceptos, involucrando operaciones fundamentales con números enteros, expresiones algebraicas, polinomios y sus operaciones, productos notables y factorización.

Para este texto Silva (2018) presentó tareas que implican el desarrollo de productos notables con Algeblocks, según la metodología de enseñanza-aprendizaje-evaluación a través de la resolución de problemas. Según lo señalado por el autor, en la resolución de las tareas propuestas el trabajo se desarrolló de forma cooperativa y colaborativa, a partir de la formación de pequeños grupos de alumnos. La docente-investigadora orientó a los alumnos del 8º año de la escuela primaria sobre la importancia del compromiso de todos en la discusión de los problemas presentados, así como el compromiso del trabajo individual de cada integrante en el éxito académico de cada grupo formado.

A modo de ejemplo, destacamos una tarea compuesta por tres elementos:

a) Representar $(x + y)^2$ utilizando los Algeblocks.

b) A través de la manipulación de los bloques de plástico, representar $(2x - y)^2$.

c) Utilizar el material manipulable para representar $(x + y)^3$.

Presentamos en la Figura 11 las respuestas para el ítem "a" y "b" según las representaciones matemáticas hechas por los estudiantes que participan en la investigación.

Item a *Item b*

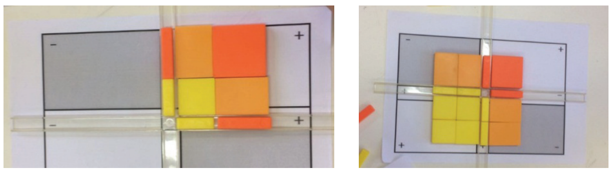


Figura 11. Productos notables.
Fuente: Silva (2018, p. 168).

Al resolver el ítem "c", los estudiantes comenzaron a partir de la forma en que obtuvieron el resultado en el ítem "a", como se ilustra en la Figura 12.

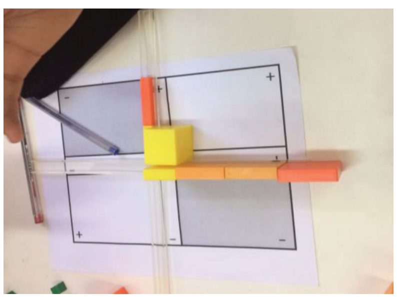


Figura 12. Estructura de $(x + y)^3$.
Fuente: Silva (2018, p. 168).

En la Figura 13 el razonamiento de los estudiantes implicaba la multiplicación por $(x + y)$ para obtener el producto notable de $(x + y)^3$ según la disposición de los bloques de plástico.

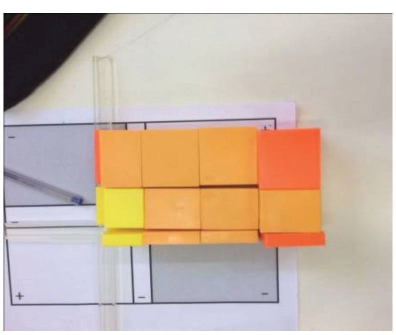


Figura 13. Representación de $(x + y)^3$.
Fuente: Silva (2018, p. 169).

Los estudiantes mostraron el contenido de la Figura 13 a la docente-investigadora, quien se sorprendió ya que no esperaba que lo presentaran de esa manera: $(x + y)^3$. A partir de esta disposición de bloques, Silva (2018) pidió a los estudiantes que construyeran un cubo.

Uno de los estudiantes preguntó a la docente-investigadora cuál sería la medida del lado de este cubo, y uno de ellos respondió: "el cubo tendrá la medida igual a $(x + y)$". Silva (2018) continuó el diálogo y preguntó a los otros estudiantes sobre la respuesta de este compañero de clase. La mayoría confirmó que la respuesta era correcta y añadió que cada medida (longitud, anchura y altura) del cubo está dada por $(x + y)$.

En la Figura 14 presentamos la construcción del cubo de volumen $(x + y)^3$ desde dos perspectivas.

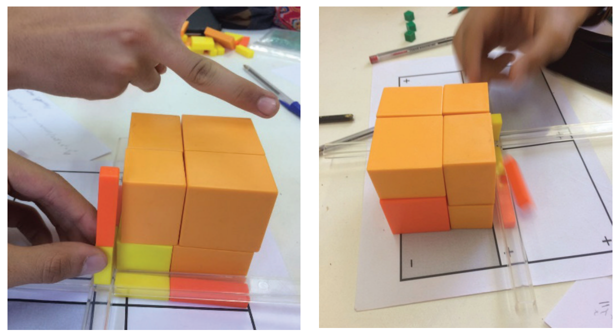


Figura 14. Representación geométrica del cubo.
Fuente: Silva (2018, p. 170)

El uso de material manipulable de Algeblocks permitió a los estudiantes establecer conexiones entre los contenidos matemáticos, articulando su perspectiva algebraica y geométrica. En el caso del ítem "c", la perspectiva algebraica del producto notable fue desarrollada por los estudiantes de la siguiente manera: $(x + y)^3 = (x + y)^2.(x + y) = (x^2 + 2xy + y^2).(x + y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. Cuando los estudiantes usaban los Algeblocks para representar los productos notables, visualizaron la representación de cada término de la expresión algebraica para el producto notable en el material manipulativo.

Según Silva (2018), dejar tareas donde, individualmente, el alumno pueda reflexionar sobre lo que fue trabajado en el aula, en ocasiones lo está preparando para la construcción de un nuevo concepto sobre el que trabajar. Sorprendentemente, los estudiantes pudieron pasar de la operación de multiplicación a la operación de potenciación con comprensión y significado, manipulando los bloques Algeblocks.

4. Consideraciones finales

El uso de cualquier material didáctico requiere de la preparación del profesor. El profesor debe estar dispuesto a salir de su zona de comodidad, ya que en el desarrollo de una actividad pueden producirse situaciones imprevistas, como las descritas en este texto.

Es necesario destacar que no basta con que el profesor conozca solo los contenidos matemáticos que hay que tratar con este tipo de propuesta didáctica. El profesor debe movilizar siempre las tareas con claridad, evitando así ambigüedades al tratar los conceptos pertinentes a las tareas de exploración-investigación (Camargo, 2020). El profesor también debe mostrar interés y empatía por este proceso, cautivando a los estudiantes que participan en sus exploraciones e investigaciones matemáticas.

En cuanto al material didáctico de los Algeblocks, su principal potencial se refiere a la cuestión de los registros de representación y las representaciones figurativas. En este sentido, como el material permite al posible estudiante registrar sus soluciones tanto con figuras como con notación algebraica, los estudiantes pueden establecer conexiones entre el álgebra y la geometría a través de registros escritos (Camargo, 2020).

Las actividades matemáticas desarrolladas por los alumnos de 8° año de primaria, según Silva (2018), partieron de la propuesta de problemas sobre los cuales se exploraron diferentes conceptos de las matemáticas, tanto a nivel concreto debido a la manipulación de los Algeblocks, como a nivel abstracto a través de representaciones en lenguaje algebraico, construidos a partir de las respectivas representaciones figurativas. En los diferentes momentos que utilizaron los alumnos el material de apoyo de Johnston (1994), es decir, los tres tipos de hojas para realizar actividades algebraicas, existía la posibilidad de explorar los conceptos de perímetro y área, que a menudo resultaban confusos para los estudiantes.

La principal limitación de este material didáctico, que se señaló durante la labor de Silva (2018), fue la restricción a los números enteros para representar las expresiones algebraicas y numéricas. En el caso de Camargo (2020), la limitación radica en que el material no asegura la validez de las demostraciones matemáticas en una investigación matemática.

Invitamos al lector interesado en otras posibilidades de trabajar con Algeblocks a consultar un conjunto de 16 tareas propuestas por Silva (2018) en su tesis de maestría. La investigación a nivel de Máster Profesional, desarrollada por Camargo (2020), contiene propuestas de tareas que involucran ceros de la función cuadrática, conceptos matemáticos de polígonos y poliedros regulares, además de sistemas lineales de dos ecuaciones de 1° grado con coeficientes enteros y dos variables.

Referencias

Banchoff, T. (2008). Algebraic Thinking and Geometric *Thinking. En C. Green y R. Rubenstein (Eds.), 70th Yearbook: Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics* (pp. 99-112). NCTM.

Brasil. Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular (BNCC): Educação é a base*. MEC. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.

Camargo, A. S. M. (2020). *O material manipulável Algeblocks:* uma proposta para o ensino médio [Mestrado profissional, Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, Brasil]. Repositorio institucional UFSCar. https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/12646

Castro, B. L., Oliveira, P. C., y Tinti, D. S. (2019). Análise de produtos educacionais elaborados no mestrado profissional em ensino de ciências exatas da UFSCar e no mestrado profissional em educação matemática da UFOP. *Revista Ciências Humanas, 12*, 234-243. https://doi.org/10.32813/2179-1120.2019.v12.n2.a584

Espejel, N. A. H. (2010). *Desarrollo Del Pensamiento Algebraico a través del uso de los Algeblocks en Alumnos de Segundo Grado de Educación Secundaria* [tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad Pedagógica Nacional, Ciudad de México]. Repositorio institucional. http://200.23.113.51/pdf/27396.pdf

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 139-162. https://doi.org/10.1007/BF01273689

Johnston, A. M. (1994). *Algeblocks*. South-Western Publishing Company.

Justilin, A. M. (2014). *A formação de professores de matemática no contexto da resolução de problemas* [tese Doutorado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro]. Repositorio institucional UNESP. http://hdl.handle.net/11449/127631

Lorenzato, S. (2012). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores* (3.a ed.). Autores Associados.

Muniz Neto, A. C. (2013). *Geometria*. Sociedade Brasileira de Matemática.

Onuchic, L. R. (1999). Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. En M. A. V. Bicudo (Org.), *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas* (pp. 199-218). UNESP.

Ponte, J. P. (2014). *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Silva, L. E. (2018). *Ensino intradisciplinar de Matemática através da resolução de problemas: o caso do Algeblocks* [Mestrado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro]. Repositorio institucional UNESP. http://hdl.handle.net/11449/154125

VOLÚMEN 13
N°2
AGOSTO 2021

RECH
IEM

REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

sochiem