SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i2.52

SIGNIFICADOS DE LA PROPORCIONALIDAD PROMOVIDOS POR PROFESORES MEXICANOS EN SEGUNDO GRADO DE LA ESCUELA SECUNDARIA

MEANINGS OF PROPORTIONALITY PROMOTED IN SECOND GRADE OF SECONDARY SCHOOL BY MEXICAN TEACHERS

Karla Paola Luque Álvarez
karla.luquea@hotmail.com
Universidad de Sonora, Sonora, México

Silvia Elena Ibarra Olmos
silvia.ibarra@unison.mx
Universidad de Sonora, Sonora, México

RESUMEN

En este documento se presentan los resultados de una investigación cuyo objetivo principal fue describir el grado de representatividad de los significados de referencia, pretendido e implementado, sobre el tema de proporcionalidad, con respecto a un conjunto de significados parciales que funcionan como referencia global. La investigación se llevó a cabo tomando en consideración la propuesta curricular de matemáticas para segundo grado de la secundaria mexicana (13 años), y está fundamentada teóricamente en algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Metodológicamente se usó el estudio de casos. Los resultados de la investigación indican que los significados implementados por los profesores observados son poco representativos con respecto al significado de referencia, teniendo el riesgo de que existan repercusiones para sus alumnos en otros temas ligados con la proporcionalidad.

PALABRAS CLAVE:
Significado referencial; significado pretendido; significado implementado; proporcionalidad; escuela secundaria.

ABSTRACT

We present research results whose main objective was to describe the representativeness grade of the meaning of reference, intended and implemented on proportionality, regarding a global reference meaning. The investigation was carried out, considering what the second-grade curriculum of the Mexican secondary school (13 years old), proposes for the mentioned topic; it was theoretically based on some elements of the Ontosemiotic Approach of Mathematical Cognition and Instruction. Methodologically, it was a study of cases. The research results indicate that the observed teachers' meanings are not very representative concerning the reference meanings, with the risk that there are repercussions for their students in other subjects related to proportionality.

KEYWORDS:
Referential meaning; intended meaning; implemented meaning; proportionality; secondary school.

Recibido: 18 de Enero 2021, Aceptado: 12 de Mayo de 2021

1. Introducción

La proporcionalidad es uno de los principales temas en la educación matemática de los distintos niveles escolares en México, pues se estudia desde los inicios de la escuela básica (3-15 años), hasta el nivel superior (18-22 años), y es considerada una de las bases para el estudio de diversos temas matemáticos tales como los porcentajes, reproducciones a escala y variación lineal, además de ser una noción fundamental en áreas como la física, la química y las artes, por mencionar algunas.

Su importancia en la formación matemática de los individuos ha sido estudiada desde diferentes perspectivas, entre ellas las dificultades que presentan profesores para su enseñanza. En este sentido, Block (2001) identifica que, en un estudio con profesores de primaria, el 71% del grupo considera como una condición suficiente para que una relación sea de proporcionalidad, el hecho de que "cuando una cantidad aumenta, la otra también aumenta" (p. 677); además, menciona que poco más del 50% considera correcta la afirmación "dos números son proporcionales si uno es múltiplo del otro, por ejemplo, 12 y 4" (p. 677), es decir, hay confusión entre los términos "proporcional" y "múltiplo". Por otro lado, Balderas et al. (2014) identificaron que profesores de secundaria, a pesar de que suelen resolver correctamente gran parte de las situaciones que se les plantean, cuando justifican la existencia de una relación de proporcionalidad suelen presentar argumentaciones y caracterizaciones insuficientes e incompletas de dicha relación.

Por su parte, Rivas et al. (2012) señalan las dificultades manifestadas por futuros profesores de bachillerato, quienes centran su atención en la aplicación de técnicas como la regla de tres, sin lograr desarrollar un razonamiento proporcional involucrado en las situaciones-problema que les fueron planteadas.

Por otro lado, algunas investigaciones como Mochón (2012), Fernández et al. (2012) y Torres y Deulofeu (2018) manifiestan que, al igual que en algunos futuros profesores, los estudiantes presentan diversas dificultades al resolver tareas de proporcionalidad, al enfocarse principalmente en la aplicación de técnicas para resolver los problemas, mismas que son empleadas de manera incorrecta debido a la ausencia de razonamiento proporcional por parte de los estudiantes. Posiblemente estas dificultades se presentan a partir de que los mismos profesores en formación, o los profesores en servicio, no comprenden la noción de proporcionalidad.

Con respecto al estudio de la proporcionalidad, Mochón (2012) manifiesta que se le debe dedicar un tiempo considerable al tema, debido a la importancia de este y a las diversas dificultades que presentan los profesores participantes en el estudio que él reporta, dificultades que el autor considera que pueden afectar a los futuros estudiantes de estos maestros.

Con estos antecedentes, en los cuales se manifiestan la importancia del estudio de la proporcionalidad, las dificultades reportadas en la literatura y, además, la importancia de que los futuros docentes que laborarán en el nivel básico tengan una sólida formación en el tema, se planteó una investigación dirigida a profesores, cuyo objetivo principal fue *describir el grado de representatividad de los significados de referencia, pretendido e implementado, sobre el tema de proporcionalidad, con respecto a un conjunto de significados parciales que funcionan como referencia global,* esto es, contrastar elementos curriculares, de planeación y ejecución del proceso de estudio para el tema (de parte de profesores mexicanos de Matemáticas de segundo grado de secundaria) versus elementos provenientes de los sistemas de prácticas matemáticas que son susceptibles de desarrollarse con el estudio del tema mencionado.

2. Elementos teóricos

La investigación se sustentó teóricamente con algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino et al., 2009), específicamente la Teoría de los Significados Sistémicos (Godino y Font, 2008). Se retomaron los Significados Pragmáticos (Godino et al., 2017) para la proporcionalidad, mismos que están escritos a partir de los niveles de algebrización de la actividad matemática escolar (Godino et al., 2014). Estos significados pragmáticos fueron elegidos en tanto que son apropiados para el logro del objetivo planteado.

2.1 Teoría de los Significados Sistémicos

Cuando se estudia matemáticas, más que conocer las prácticas que se realizan en la resolución de un problema en particular, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) que manifiestan los sujetos en su actuación ante diversos tipos de situaciones-problema. En el EOS (Godino et al., 2009), el significado de un objeto matemático se concibe como "el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas" (p. 5). Como se señaló, esta investigación tiene como uno de sus basamentos teóricos más importantes a la Teoría de los Significados Sistémicos.

En particular, al ser un trabajo de investigación cuyos sujetos de investigación son profesores de Matemáticas de secundaria, se está interesado únicamente en los significados institucionales, para lo cual se tendrán en cuenta los siguientes tipos:

- Referencial (o de referencia, también conocido como pretendido por el currículo): se refiere al sistema de prácticas que se utilizan como referencia para elaborar el significado pretendido.

En una institución de enseñanza concreta, este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático.

• Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.

• Implementado: en un proceso de estudio específico, es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente (Godino y Font, 2008).

En esta ocasión, los significados pragmáticos de la proporcionalidad formarán parte de lo que en el EOS se conoce como significado holístico, dichos significados están descritos a partir de los niveles de algebrización de la actividad matemática escolar, los cuales se presentan a continuación.

2.2 Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar

Una parte fundamental para el desarrollo de este trabajo son los niveles de algebrización de la actividad matemática escolar (Godino et al., 2014), en donde se establecen niveles de algebrización de acuerdo con las características de las prácticas realizadas para resolver tareas matemáticas. Se proponen dos niveles de algebrización elementales a los que se denominan "protoalgebraicos", al considerarlos como primarios, primitivos o incipientes. Se propone además un tercer nivel en el que la actividad matemática se puede considerar como propiamente algebraica.

Es importante tener presente que estos niveles son asignados, no a la tarea misma, sino a las prácticas matemáticas que realizan los individuos para resolverla, por lo que depende de la forma en que la tarea es resuelta para que la actividad sea ubicada en un nivel o en otro. Por otro lado, si las variables involucradas en la tarea sufren algunos cambios, estos pueden dar lugar a nuevas prácticas matemáticas que pudieran ubicarse en el mismo nivel o en algún otro.

Para poder establecer estos niveles, Godino et al. (2014) indican que "un proceso de generalización da como resultado un tipo de objeto matemático, al cual se le denomina objeto intensivo, es decir, la regla que genera la clase, el tipo o generalidad implicada" (p. 205). Por otro lado, mediante el proceso inverso o de particularización se obtienen objetos a los cuales se les denomina extensivos, es decir, objetos particulares. "Una colección finita simplemente enumerada no se debe considerar como un intensivo hasta el momento en el que el sujeto muestra el criterio o la regla que se aplica para delimitar los elementos constituyentes del conjunto" (p. 205).

Además de la regla o generalidad que da lugar al conjunto original, existe un proceso de unitarización en donde la nueva entidad unitaria debe hacerse ostensiva o materializada mediante un nombre, ícono, gesto o un símbolo. Godino et al. (2014) además mencionan que los criterios básicos para definir los niveles de algebrización son los siguientes:

Generalización: Generación o inferencia de intensivos.

Unitarización: Reconocimiento explícito de intensivos como entidades unitarias.

Formalización y ostensión: Nombramiento mediante expresiones simbólico-literales.

Transformación: Utilización de los objetos intensivos en procesos de cálculo y en nuevas generalizaciones. (p. 8)

2.3 Los significados pragmáticos de la proporcionalidad

Los significados pragmáticos de la proporcionalidad directa fueron categorizados a partir de los niveles de algebrización (Godino et al., 2014), mismos que se describen a partir de los tipos de sistemas de prácticas que se realizan al resolver una tarea de proporcionalidad. A continuación, se enuncian cada uno de ellos y se muestran adaptaciones de ejemplos (Godino et al., 2017).

2.3.1 Significado informal/cualitativo

Como ejemplo del sistema de prácticas desarrolladas en la resolución de un problema, desde el punto de vista del significado informal/cualitativo se presenta el siguiente:

Si María quiere comprar más galletas de las que compra normalmente para darle a su hija para llevar a la escuela, María tendrá que gastar:

(a) Más dinero de lo que gastaba antes; (b) Menos dinero de lo que gastaba antes; (c) Hará exactamente el mismo gasto.

El sistema de prácticas promovidas en este caso permite tener un primer acercamiento al planteamiento de la situación-problema, donde las respuestas esperadas permitirán identificar de manera general las relaciones entre las variables que intervienen. A su vez, esto proporcionará ideas sobre cómo proceder al resolver una situación-problema y a estimar el resultado final, además de que puede ser de utilidad para identificar si se está ante una relación de proporcionalidad directa o inversa o si no hay proporcionalidad.

2.3.2 Significado aritmético

Como primer significado pragmático los autores establecen el significado aritmético, argumentando que este se caracteriza por la aplicación de procedimientos de cálculos aritméticos (multiplicación, división). Se toma como ejemplo la siguiente situación problema: Un kilogramo de queso cuesta $75, ¿cuánto hay que pagar si se quieren comprar 2.5 kilogramos de queso? La situación se resuelve a partir de operaciones aritméticas en las que, sabiendo que 2 kg son el doble de 1 kg, habría que considerar que por 2 kg de queso se debe pagar el doble que lo que se pagaría por 1 kg, por lo que 2 kg cuestan $150. Pero, 0.5 kg es la mitad de 1 kg, por lo que habría que pagar la mitad, es decir, 0.5 kg cuestan $37.5. Al sumar se tiene que 2.5 kg cuestan $187.5.

El sistema de prácticas que aquí se presenta tiene un carácter discursivo-descriptivo de la situación problema, además de normativo y operativo. En esta solución intervienen únicamente valores numéricos y se aplican operaciones aritméticas sobre dichos valores, es decir, no intervienen objetos ni procesos algebraicos, por lo que la actividad realizada, según Godino et al. (2014), se considera de Nivel 0 de algebrización.

El significado protoalgebraico está centrado en la aplicación de la noción de proporción y la resolución de una ecuación de la forma $Ax = B$, como, por ejemplo, en la siguiente secuencia de prácticas: Un kilogramo de queso cuesta $75, ¿cuánto hay que pagar si se quieren comprar 2.5 kilogramos de queso?

Se supone que, si se compra el doble, triple, etc. de producto, se deberá pagar el doble, triple, etc. de precio. Por lo que la relación que se establece entre las cantidades del producto comprado y el precio pagado es de proporcionalidad directa. En una relación de proporcionalidad directa se tiene que las razones de las cantidades que se corresponden son iguales:

$\frac{1}{75} = \frac{2.5}{x}$ siendo x el costo de 2.5 kg de queso.

En toda proporción se cumple la igualdad del producto en cruz de los términos,

$$1 \times x = 2.5 \times 75$$

Luego, x = 187.5. Por tanto, el precio del queso debe ser $187.5.

2.3.4 Significado algebraico-funcional

El significado algebraico-funcional se caracteriza por la aplicación de la noción de la función lineal y de técnicas de resolución basadas en las propiedades de dichas funciones:

$f(a+b) = f(a) + f(b), f(ka) = k\,f(a)$

donde f representa una función, a y b son elementos pertenecientes a un espacio vectorial y $k \in \mathbb{R}$ representa un parámetro. Una de estas técnicas se aplica a continuación:

Se supone que, si se compra el doble, triple, etc. de producto, se deberá pagar el doble, triple, etc. de precio. Además, lo que se pague por dos cantidades distintas de queso, será lo mismo que comprar un paquete con la misma cantidad –en peso– de queso. Por tanto, la correspondencia que se establece entre el conjunto de las cantidades del producto (Q) y el conjunto de los precios pagados (P), $f\colon Q \to P$, es lineal. En toda función lineal f, se cumple que, la imagen de la suma de cantidades es la suma de las imágenes, $f(a+b) = f(a) + f(b)$, y la imagen del producto de una cantidad por un número real es el producto de la cantidad imagen por dicho número, $f(ka) = k\,f(a)$.

El coeficiente k de la función lineal es el coeficiente de proporcionalidad en el caso de las relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes (tanto por uno). Aplicando dichas propiedades al caso, se tiene: $f(1kg) = 75;\ 2.5\,f(1kg) = 2.5 \times 75;\ f(2.5kg) = 187.5$

[Dos kilogramos y medio de queso cuestan 187.5 pesos].

Se puede observar que el modelo matemático de estas funciones se puede representar por una función de la forma $y = k \times x$, donde k es la constante de proporcionalidad, x la variable independiente e y la variable dependiente. Aunque se habla de una función lineal, al poder k tomar cualquier valor, lo que se tiene en realidad es una familia de funciones lineales, con parámetro k, lo cual según Godino et al. (2014) es un primer acercamiento al Nivel 4 de algebrización.

2.4 Los significados pragmáticos en el estudio de la proporcionalidad inversa

Como se puede observar, los significados pragmáticos de la proporcionalidad discutidos en Godino et al. (2017) están descritos particularmente para el caso de la proporcionalidad directa. Sin embargo, tanto en el currículo como en las planeaciones e implementaciones de clases de los profesores, así como en las pruebas escritas propuestas, se identificó la noción de proporcionalidad inversa. Por ello, se propone a continuación una versión aplicada para la proporcionalidad inversa.

2.4.1 Significado informal/cualitativo para la proporcionalidad inversa

Como ejemplo del sistema de prácticas desarrolladas en la resolución de un problema de proporcionalidad inversa, desde el punto de vista del significado informal/cualitativo, se presenta el siguiente:

Un coche que circula a 90 $\mathrm{km/h}$ ha tardado 12 horas en realizar un viaje. Si el coche aumenta su velocidad, ¿qué ocurre con las horas que tarda en realizar el mismo viaje?

1. Por cada hora que transcurre, el auto inicialmente avanzaba 90 km.

2. Si se aumenta la velocidad, la distancia recorrida por cada hora aumenta.

3. Al aumentar la distancia que se recorre por cada hora que transcurre, el coche realizará el viaje en menos horas.

4. Por lo tanto, la cantidad de horas que tarda el coche en realizar el mismo viaje disminuye a medida que se aumenta la velocidad.

El sistema de prácticas promovidas en este caso permite tener un primer acercamiento a la noción de proporcionalidad inversa, donde los sistemas de prácticas asociados involucran la identificación de una primera característica de la proporcionalidad inversa. A su vez, favorece estimar los datos relacionados, en este caso, distancia-tiempo, además de que puede ser de utilidad para identificar si se está ante una relación de proporcionalidad directa o inversa o si no hay proporcionalidad.

2.4.2 Significado aritmético de la proporcionalidad inversa

Godino et al. (2017) establecen como primer significado pragmático de la proporcionalidad el significado aritmético, el cual es distinguido por la aplicación de procedimientos de cálculos puramente aritméticos (multiplicación, división). Para este significado se plantea la siguiente situación problema: Un coche circulando a 90 $\mathrm{km/h}$ ha tardado 12 horas en realizar un viaje. ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer el mismo trayecto a una velocidad de $80\ \mathrm{km/h}$?

El coche recorre 90 kilómetros por cada hora transcurrida. Como tardó 12 horas en recorrer el trayecto, entonces recorrió en total 90 × 12 = 1080 kilómetros. Para saber cuántas horas tarda en recorrer 80 kilómetros se calcula el cociente:

$\frac{1080}{80}$ = 13.5 horas.

Por lo tanto, el coche tarda 13.5 horas en recorrer el mismo trayecto a una velocidad de 80 km/h.

En esta solución intervienen únicamente valores numéricos y se aplican operaciones aritméticas como la división y la multiplicación sobre dichos valores, es decir, no se hace uso de un razonamiento algebraico, por lo que el sistema de prácticas llevado a cabo, según Godino et al. (2014), se considera de Nivel 0 de algebrización.

2.4.3 Significado protoalgebraico de la proporcionalidad inversa

El significado protoalgebraico está centrado en la aplicación de la noción de proporción inversa y en la resolución de una ecuación de la forma $xy = k$, como por ejemplo, en la siguiente secuencia de prácticas:

La relación que se establece entre las cantidades velocidad y tiempo que se tarda en recorrer el trayecto, es de proporcionalidad inversa. En una relación de proporcionalidad inversa, los productos de las cantidades que se corresponden son iguales, esto es:

$$90\ {}^{km}/_{h} \times 12\ h = 80\ {}^{km}/_{h} \times x\ h$$

siendo x el tiempo que se tardará en transcurrir el mismo trayecto a una velocidad de $80\ km\ /\ h$.

$$\text{Luego, } x = \frac{90\ km/h \times 12h}{80\ km/h} = 13.5\ h.$$

2.4.4 Significado algebraico-funcional de la proporcionalidad inversa

El significado algebraico-funcional se caracteriza por la aplicación de la noción de la función racional $f(x) = kx$ y de técnicas de resolución basadas en las propiedades de dichas funciones. De aquí que,

$f(90\ {}^{km}/_{h}) = 12\ h$, es decir, $\frac{k}{90\ {}^{km}/_{h}} = 12\ h$.

Por ser una relación de proporcionalidad directa, se sabe además que $k = xy$ por lo tanto

$k = 1080\ km$ [a una velocidad de $1\ {}^{km}/_{h}$ se tardaría 1080 horas en recorrer el trayecto].

De aquí que $f(x) = \frac{1080}{x}$, por lo que

$$f(80\ {}^{km}/_{h}) = \frac{1080\ km}{80\ {}^{km}/_{h}} = 13.5\ h.$$

Luego, el tiempo que se tarda en recorrer el trayecto a una velocidad de $80\ {}^{km}/_{h}$ es 13.5 horas.

El sistema de prácticas puesto en juego en esta solución involucra una función racional, que, al poder k tomar cualquier valor, lo que se tiene en realidad es una familia de funciones inversas, con parámetro k, lo cual según Godino et al. (2014) es un primer acercamiento al Nivel 4 de algebrización.

3. Metodología

Para este trabajo se recurrió al análisis documental y al estudio de casos. El análisis documental se realizó al Plan de estudios 2011 (Secretaría de Educación Pública, 2011) y a un libro de texto vigente para segundo año de secundaria (García y Block, 2016). De igual manera se hizo un análisis a las fuentes en las que se basan los profesores para planear sus clases. Otra técnica de investigación empleada fue la observación no participante, para lo cual se analizaron 8 y 6 sesiones de clases de dos profesores, respectivamente, mismas que fueron consideradas por los docentes como las requeridas para estudiar los temas de proporcionalidad directa e inversa durante ese ciclo escolar.

Se optó como técnica de investigación el estudio de casos debido a que representa:

> una herramienta muy útil de hacer investigación, ya que permite tener como resultado un enfoque holístico de una situación o evento en estudio, lo cual concede al investigador un abanico muy amplio de posibilidades para abordar un problema de investigación. (Escudero et al., 2008, p. 10)

En la siguiente sección se exponen las acciones metodológicas y los instrumentos de investigación que fueron diseñados y que contribuyeron al logro del objetivo planteado.

3.1 Técnicas e instrumentos

El trabajo fue dividido en fases, a cada una de ellas le corresponden ciertas acciones metodológicas, así como las técnicas e instrumentos de investigación a los que se recurrió para el desarrollo de estas. En la siguiente tabla se sintetizan los aspectos antes mencionados.

Tabla 1

Descripción de los aspectos metodológicos de la investigación

Fases	**Acciones metodológicas**	**Técnicas (TI) e Instrumentos de investigación (II)**
Declaración de los significados pragmáticos en el estudio de la proporcionalidad.	Declaración de los significados pragmáticos sobre la noción de proporcionalidad, a partir de los cuales se caracterizaron cada uno de los significados institucionales planteados en los restantes objetivos específicos.	TI: Revisión documental de artículos relacionados con los significados parciales y los significados pragmáticos de la proporcionalidad. II: Síntesis y ficha de contenido.
Caracterización del significado pretendido por el currículo.	Identificación y descripción de los sistemas de prácticas y las configuraciones epistémicas promovidas en el plan de estudios y sus apoyos.	TI: Análisis documental de planes de estudio y libros de texto. II: Cuadros sinópticos.
Caracterización del significado pretendido por profesores de secundaria en el estudio de la proporcionalidad.	Identificación de las configuraciones de objetos y los sistemas de prácticas puestas de manifiesto en las planeaciones de clase de los sujetos en estudio.	TI: Análisis de las planificaciones de clase de los profesores seleccionados y análisis de cuestionario aplicado a los mismos, con el objetivo de obtener información acerca de cómo los profesores planean sus sesiones de clases referentes a los temas de interés. II: Cuadros sinópticos y cuestionario.
Caracterización del significado implementado por profesores de secundaria en el estudio de la proporcionalidad.	Identificación de los sistemas de prácticas y las configuraciones epistémicas que son implementadas por los profesores al impartir el tema de la proporcionalidad.	TI: Observación no participante de las clases implementadas por los sujetos en estudio. II: Formato para el registro de observación de clases diseñado exprofeso.
Triangulación de la información.	Triangulación de la información obtenida en cada una de las fases anteriores, con el propósito de cumplir con el objetivo general de este trabajo.	TI: Contrastación de los sucesivos significados. II: Tabla comparativa.

Fuente: Elaboración propia a partir de los aspectos teóricos y metodológicos de la investigación desarrollada.

El análisis y triangulación de la información generada permitió el logro del objetivo planteado.

3.2 Población participante

Para llevar a cabo este trabajo, se seleccionaron como sujetos de investigación a dos profesores que imparten clases de Matemáticas en segundo año de secundaria. A pesar de que el tema de proporcionalidad es también estudiado en primer grado, los profesores indicaban que, como introducción al tema, se presentaría un breve repaso de lo visto en el grado anterior, lo cual da evidencia del tipo de sistemas de prácticas que el profesor pone en juego en primer grado. Como característica principal de estos sujetos estaba el que impartieran alguno de los temas de proporcionalidad, esto debido a que el sistema educativo mexicano permite a los profesores la elección del orden de los temas a tratar, lo que origina que algunos de ellos no sean estudiados por falta de tiempo, o que sean estudiados superficialmente.

Se entrevistaron a cinco posibles sujetos de estudio, de los cuales únicamente dos cumplían con las características solicitadas. Los docentes seleccionados señalaron que los temas que serían impartidos eran:

- Representación algebraica y análisis de una relación de proporcionalidad $y = kx$, asociando los significados de las variables con las cantidades que intervienen en dicha relación.
- Identificación y resolución de situaciones de proporcionalidad inversa mediante diversos procedimientos.

4. Resultados

Se presenta a continuación la información obtenida en cada una de las fases, mediante las siguientes tablas. Esto con la finalidad de sintetizar la información generada.

Tabla 2

Significados del Profesor A

Significados pragmáticos	**Significados pretendidos por el currículo**	**Significados pretendidos por el Profesor A**	**Significados implementados por el Profesor A**
Significado informal/ cualitativo	Este se presenta como un primer acercamiento al concepto de proporcionalidad, ya que surge a partir de cuestionamientos en los que se espera que el estudiante logre identificar los tipos de relaciones que existen. Se plantean preguntas como: ¿qué sucede con la variable dependiente cuando la variable independiente aumenta?	Se promueve con la finalidad de que los estudiantes se percaten de la existencia de una relación entre las variables involucradas, esto como un primer acercamiento a la proporcionalidad directa. Este significado es en el que se presenta mayor énfasis, ya que la mayoría de las situaciones-problema involucra procedimientos de carácter numérico.	No se promueve.
Significado aritmético	Surge al momento de resolver problemas de llenado de tablas o de responder cuestionamientos en los que se solicita que se calcule el valor de alguna de las variables involucradas.	Se promueve con la finalidad de representar las relaciones entre variables mediante reglas, para lo cual se proporcionan o se solicita a los estudiantes que establezcan las expresiones algebraicas que corresponden a las relaciones entre las variables involucradas.	Se promueve al momento en que se solicita que los estudiantes realicen operaciones básicas como multiplicación y división de números, que en la mayoría de los casos suelen ser números enteros.
Significado protoalgebraico	Se promueve al momento en que se solicita la generalización de las situaciones de proporcionalidad, esperando que al resolver los problemas los estudiantes sean capaces de plantear una ecuación del tipo o apliquen la regla de tres simple y la regla de tres inversa.	Se promueve al momento en que se solicita la generalización de las situaciones de proporcionalidad, esperando que al resolver los problemas los estudiantes sean capaces de plantear una ecuación del tipo o apliquen la regla de tres simple y la regla de tres inversa. También se promueve al momento en que se solicita la identificación de la gráfica que cumple con una relación de proporcionalidad directa o la traducción del lenguaje numérico al gráfico.	Se promueve únicamente a manera de generalización, al solicitar a los estudiantes que indiquen la "regla" que satisface una relación dada o que a partir de una ecuación del tipo se calculen los valores de alguna de las variables involucradas o de la constante de proporcionalidad.
Significado algebraico-funcional	Se promueve de manera parcial, pues no se aborda el estudio de las propiedades de las funciones, pero sí características particulares. Estas se abarcan en el estudio de las características de gráficas que representan relaciones de proporcionalidad en el plano cartesiano. Se continúa estudiando en tercer grado.	No se promueve.	No se promueve.

Fuente: Elaboración propia a partir del análisis de los datos obtenidos en cada una de las fases metodológicas. Profesor A.

Tabla 3

Significados del Profesor B

Significados pragmáticos	**Significados pretendidos por el currículo**	**Significados pretendidos por el Profesor B**	**Significados implementados por el Profesor B**
Significado informal/ cualitativo	Este se presenta como un primer acercamiento al concepto de proporcionalidad, ya que surge a partir de cuestionamientos en los que se espera que el estudiante logre identificar los tipos de relaciones que existen. Se plantean preguntas como: ¿qué sucede con la variable dependiente cuando la variable independiente aumenta?	No se promueve.	No se promueve.
Significado aritmético	Surge al momento de resolver problemas de llenado de tablas o de responder cuestionamientos en los que se solicita que se calcule el valor de alguna de las variables involucradas.	Se promueve en situaciones-problema en las que el profesor espera que sus estudiantes realicen algunas operaciones básicas (multiplicación, división) para determinar uno de los datos faltantes.	Se promueve al solicitar a los estudiantes que encuentren el valor unitario de algunas relaciones de proporcionalidad, simplemente como un primer acercamiento a la solución de la situación-problema.
Significado protoalgebraico	Se promueve al momento en que se solicita la generalización de las situaciones de proporcionalidad, esperando que al resolver los problemas los estudiantes sean capaces de plantear una ecuación del tipo y = kx o apliquen la regla de tres simple y la regla de tres inversa.	Se espera que los estudiantes sean capaces de entender y poder aplicar la regla de tres simple y regla de tres inversa, además de trazar gráficas que representan la relación de proporcionalidad directa o inversa, así como el que los estudiantes puedan establecer la regla y = kx que representa dichas relaciones.	Se promueve en mayor medida, debido a que el profesor prioriza que los estudiantes sean capaces de hacer uso de la regla de tres simple o la regla de tres inversa.
Significado algebraico-funcional	Se promueve de manera parcial, pues no se aborda el estudio de las propiedades de las funciones, pero sí características particulares. Estas se involucran en el estudio de las características de gráficas que representan relaciones de proporcionalidad en el plano cartesiano. Se continúa estudiando en tercer grado.	No se promueve.	No se promueve.

Fuente: Elaboración propia a partir del análisis de los datos obtenidos en cada una de las fases metodológicas. Profesor B.

La concreción de las acciones metodológicas planteadas permitió identificar que el currículo promueve tres de los cuatro significados pragmáticos para segundo de secundaria, retomando el cuarto significado pragmático en tercer grado con el tema de variación lineal. El significado informal/cualitativo se promueve como un primer acercamiento al tema de proporcionalidad; el significado aritmético como técnica de resolución de los problemas, se promueve en situaciones donde lo que se espera es que los estudiantes ejecuten multiplicaciones, divisiones o cualquier cálculo aritmético. Por su parte, el significado protoalgebraico surge en situaciones en donde lo que se espera es la generalización de las situaciones de proporcionalidad, buscando que al resolver los problemas los estudiantes sean capaces de poder plantear una ecuación del tipo $y = kx$ o apliquen la regla de tres simple y la regla de tres inversa.

Los significados pretendidos por el currículo se han identificado a partir del análisis de ejemplos de situaciones-problema que se plantean en las orientaciones didácticas que se presentan a los docentes sobre cómo abordar los temas de proporcionalidad directa e inversa.

En cuanto al significado pretendido, con el Profesor A se identificó que, aunque en sus planeaciones de clases se manifiestan los tres significados pragmáticos que son promovidos por el currículo, en su implementación se presenta el significado aritmético en mayor medida, pues los problemas planteados únicamente solicitan a los estudiantes la aplicación de procedimientos como multiplicación y división de números enteros. También se promueve el significado protoalgebraico, ya que, a partir de encontrar las soluciones, se solicita que los estudiantes identifiquen la constante de proporcionalidad k, y que lo representen en una expresión de la forma $y = kx$. El tratamiento que se le da a este tipo de situaciones es considerado parcialmente protoalgebraico ya que no se manifiestan características de la expresión como función, pues se basa únicamente en sustituir el valor de la constante k en una expresión dada.

Del mismo modo sucede para el caso del Profesor B, ya que mientras que en su planeación de clases promueve únicamente dos de los significados pragmáticos, en su implementación da prioridad únicamente al significado protoalgebraico, pues muestra interés en que sus estudiantes sean capaces de aplicar la regla de tres simple y la regla de tres inversa. Solo en ocasiones se interesa en que los estudiantes sean capaces de realizar la gráfica que represente la relación de proporcionalidad dada, la cual se hace a partir de la identificación de puntos (x, y) en el plano cartesiano, lo cual involucra una introducción al significado algebraico-funcional.

5. Conclusiones

A partir del desarrollo de la investigación aquí presentada, se concluyen varios aspectos que se consideran interesantes. En primer lugar, cabe resaltar que la propuesta de los significados pragmáticos (Godino et al., 2017), que está descrita a partir de los niveles de algebrización y fue retomada para esta investigación, se desarrolló únicamente para el caso de la proporcionalidad directa, por ello, se recurrió a la elaboración propia de una propuesta para el caso de la proporcionalidad inversa, misma que se muestra en la sección 2.4.

A partir de ambas propuestas, se llevó a cabo la identificación de los significados pragmáticos para la proporcionalidad directa e inversa, puestos de manifiesto en el currículo, así como en las planeaciones e implementaciones de clases de ambos profesores. Lo anterior, dio lugar al logro del objetivo planteado: *describir el grado de representatividad de los significados de referencia, pretendido e implementado, sobre el tema de proporcionalidad, con respecto a un conjunto de significados parciales que funcionan como referencia global.*

A partir del análisis de la información obtenida en cada una de las fases metodológicas desarrolladas, se concluye que los significados promovidos por los profesores en sus planeaciones e implementaciones de clases van perdiendo la riqueza con respecto al significado pretendido por el currículo. Lo anterior debido a que, a pesar de que el currículo establece que para segundo grado de secundaria se deben promover tres significados pragmáticos (el significado informal-cualitativo como un primer acercamiento a la noción de proporcionalidad directa e inversa, el significado aritmético al plantear problemas en los que hay que determinar el valor de la constante de proporcionalidad o alguna de las variables involucradas a partir de operaciones básicas, así como el significado protoalgebraico al plantear situaciones-problema en donde se solicita el llenado de una tabla o la gráfica de una relación de proporcionalidad), los profesores por su parte promueven versiones incompletas de dichos significados, priorizando únicamente uno de ellos.

Lo anterior presenta consecuencias, pues el significado que aprenden los estudiantes es incompleto y poco representativo con respecto a la propuesta curricular, por lo que la riqueza matemática del tema se ve disminuida. A partir de ello se concluye que la falta de representatividad del significado de proporcionalidad, promovido por los profesores, es posible que genere a su vez dificultades de aprendizaje en los estudiantes de secundaria, mismas que afectarán en estudios posteriores donde la proporcionalidad es considerada como un tema base.

A pesar de que existen diversas investigaciones en donde se abordan las dificultades de los estudiantes y de los profesores con respecto al tema de la proporcionalidad (Balderas et al., 2014; Block, 2001; Mochón, 2012), este documento presenta una categorización de significados, la cual permite dar evidencia de los puntos clave en los que hay

que centrar la atención al tratar de abordar dicha problemática.
Se puede destacar principalmente la importancia de promover el desarrollo del razonamiento proporcional en los estudiantes, sin exigir desde un primer momento que se repliquen las técnicas o reglas presentadas por los docentes. Para ello, es importante que los docentes tengan conocimientos acerca de la diversidad de significados de la proporcionalidad, así como de los distintos sistemas de prácticas que pueden manifestar sus estudiantes, para que a partir de ello planeen e implementen sus sesiones de clases, dando la importancia que el tema merece.

Por otra parte, aunque se logró el objetivo planteado a partir de los elementos retomados de los significados pragmáticos de la proporcionalidad y de la propuesta propia para la proporcionalidad inversa, se considera necesaria una extensión a ambas propuestas ya que, por ejemplo, para el caso del significado informal-cualitativo, solían presentarse ejemplos de sistemas de prácticas que pudieran considerarse más informales que otros, lo mismo ocurrió en cada uno de los restantes significados, por lo que pudieran considerarse subcategorías dentro de cada uno de los significados pragmáticos propuestos.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado con el apoyo de la beca #859811 Otorgada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT, México).

Referencias

Balderas, R., Block, D., y Guerra, M. (2014). "Sé cómo se hace, pero no por qué". Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestros de secundaria. *Scientific Electronic Library Online, 26*(2), 7-32.

Block, D. (2001). Conocimientos de maestros de primaria sobre la proporcionalidad. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 19*, 675-680.

Escudero, J., Delfín, L., y Gutiérrez, L. (2008). El estudio de caso como estrategia de investigación en las ciencias sociales. *Ciencia Administrativa, 1*, 7-10. https://www.uv.mx/iiesca/files/2012/12/estudio2008-1.pdf

Fernández, C., Llinares, S., y Valls, J. (2012) Learning to notice students' mathematical thinking through online discussions. ZDM. *Mathematics Education, 44*, 747-759. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0425-y

García, S., y Block, D. (2016). *Matemáticas 2. Secundaria Conecta Estrategias*. Ediciones SM.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática* (versión ampliada). https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M., y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-13). http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/godino_beltran.pdf

Godino, J., y Font, V. (2008). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos. Anexo al artículo, "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos". *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación matemática, 24*(1), 133-157. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262012000100006

Rivas, M., Godino, J., y Castro, W. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema, 26*(42), 559-588. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200008

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Plan de Estudios 2011. Educación básica. México.* Gobierno de México. https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/20177/Plan_de_Estudios_2011_f.pdf

Torres, E., y Deulofeu, J. (2018). La enseñanza de la proporcionalidad en el paso de la Educación Primaria a la Secundaria: el caso de Ainoa. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 99*, 105-126. http://funes.uniandes.edu.co/12902/