SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i2.51

PROPUESTAS DIDÁCTICAS PARA LA EDUCACIÓN BÁSICA QUE IMPLICAN EL USO DEL MATERIAL MANIPULATIVO ALGEBLOCKS

DIDACTIC PROPOSALS FOR PRIMARY EDUCATION THAT INVOLVE THE USE OF ALGEBLOCKS MANIPULATIVE MATERIAL

Lilian Esquinelato da Silva
lilianes93@gmail.com
Universidad Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São Paulo, Brasil

Alex Sander Martins de Camargo
vanhallenaxl@hotmail.com
Universidade Federal de São Carlos, São Paulo, Brasil

Paulo Cesar Oliveira
paulodfqm@gmail.com
Universidad Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São Paulo, Brasil

RESUMEN

Este artículo de propuesta didáctica tuvo como objetivo unir los productos educativos de dos tesis de maestría, una académica y otra profesional, con el propósito de explorar las potencialidades y limitaciones relativas al uso del material de manipulación de Algeblocks. Los contenidos matemáticos fueron contemplados de acuerdo a las competencias y habilidades presentes en la Base Curricular Nacional Común (BNCC), para los últimos años de la serie de la Escuela Primaria y Secundaria. Más concretamente, presentamos propuestas de tareas para el estudio de productos notables basadas en la metodología de enseñanza-aprendizaje-evaluación a través de la resolución de problemas. La relación de Euler fue otro contenido estudiado desde la perspectiva de las tareas de exploración-investigación centradas en el instituto. En el contexto de cada tarea propuesta, presentamos una resolución comentada con pautas didáctico-pedagógicas, según el prototipo del material manipulable utilizado.

PALABRAS CLAVE:
Material manipulable; escuela primaria y secundaria; resolución de problemas.

ABSTRACT

This didactic proposal article aimed to unite educational products from two Master's theses, one academic and the other professional, with the purpose of exploring potentialities and limitations regarding the use of Algeblocks manipulative material. The mathematical contents were considered according to the competences and abilities presented in the Common National Curricular Base - BNCC, for the final years of the Elementary and High School series. More specifically, we present task proposals for the study of notable products based on the Teaching-Learning-Assessment Methodology through Problem Solving. Euler's relationship was another content studied from the perspective of exploration-research tasks for high school. Within the context of each proposed task, we present a commented resolution with didactic-pedagogical guidelines, according to the prototype of the manipulable material used.

KEYWORDS:
Manipulative material; elementary and high school; problem solving.

Recibido: 9 de Enero 2021, Aceptado: 13 de Mayo de 2021

1. Introducción

Este texto reúne aspectos de enseñanza y/o aprendizaje de las únicas tesis de maestría brasileñas (Camargo, 2020; Silva, 2018), cuyo producto educativo implicaba la planificación de tareas con el material manipulador de los Algeblocks. Este hecho fue verificado por Camargo (2020) en el mapeo realizado a disertaciones y tesis restringidas a estudios que involucran materiales didácticos manipulables y concretos, desde la plataforma digital de la Coordinación de Perfeccionamiento del Personal de la Enseñanza Superior (CAPES) y de la Biblioteca Digital Brasileña de Tesis y Disertaciones (BDTD).

El prototipo de material didáctico de Algeblocks en la investigación de Camargo (2020) consistía en 72 piezas prismáticas de 10 colores diferentes, para distinguir las dimensiones de las piezas mencionadas. Para dicha construcción fue necesario considerar una terna de dimensiones X, Y y 1u (una unidad) para los prismas a construir, ya que estamos considerando un material didáctico con piezas tridimensionales. Se adoptó una terna de dimensiones X = 60 mm, Y = 50 mm y 1u = 35 mm.

Después de la etapa de hacer estas piezas (Figura 1), fueron pintadas y clasificadas como: 8 cubos amarillos de aristas X; 8 cubos anaranjados de aristas Y; 16 cubos azules de arista 1u; 6 prismas rojos de aristas X, X e Y (pieza X^2Y); 6 prismas verdes de aristas X, X y 1u (pieza X^2); 6 prismas marrones de aristas Y, Y y X (pieza Y^2X); 6 prismas púrpuras con aristas Y, Y y 1u (pieza Y^2); 6 prismas verde claro con aristas 1u, 1u y X (pieza X); 6 prismas azul claro con aristas 1u, 1u e Y (pieza Y) y 4 prismas rosados con aristas X, Y y 1u (pieza XY).

Figura 1. Piezas del Algeblocks.
Fuente: Camargo (2020, p. 47).

Este material educativo también puede hacerse con cartón o cartulina, por ejemplo, a un costo más asequible, como se muestra en la Figura 2.

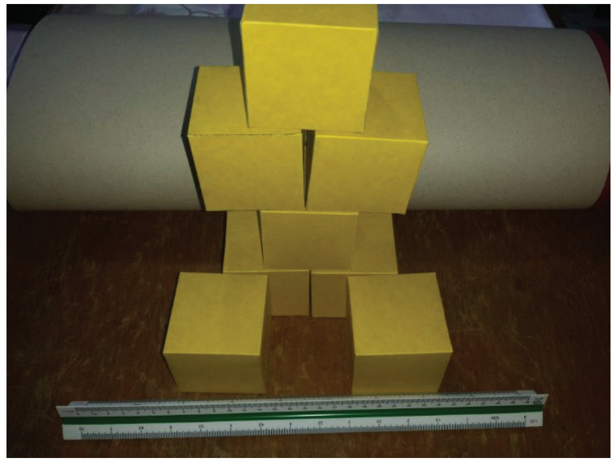

Figura 2. Construcción en papel cartón de la pieza X.
Fuente: Camargo (2020, p. 57).

Una pregunta propuesta por Camargo (2020) sobre los Algeblocks tiene la siguiente formulación: ¿por qué se necesitan exactamente 10 tipos de piezas para componer este material? Una de las respuestas involucra el uso del diagrama de árbol (Figura 3), ya que en la escuela secundaria los contenidos que implican el análisis combinatorio se contemplan en el currículo de estudios de Matemáticas:

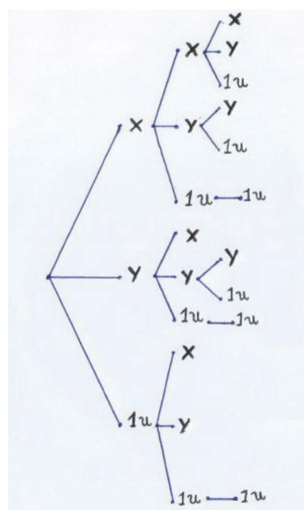

Figura 3. Diagrama de árbol para obtener las ternas que implican X, Y y 1u.
Fuente: Camargo (2020, p. 50).

Considerando la Figura 3, las rutas de dos etapas no deben ser consideradas, ya que se han agotado todas las posibilidades de elección de las ternas.

En las siguientes secciones presentamos un recorte de la disertación de Camargo (2020) y Silva (2018), centrándonos en sus productos educativos elaborados en forma de tareas, tanto para los últimos años de la escuela primaria como para los grados de la escuela secundaria. Según Castro, Oliveira y Tinti (2019), el producto educativo es el resultado de la investigación de "un profesor-investigador que tiene la iniciativa de buscar medios y métodos para mejorar su desempeño profesional y que puede producir conocimientos y materiales para mejorar eficazmente la calidad de la enseñanza" (p. 243).

Camargo (2020) elaboró cuatro tareas con un guion de resolución y pautas didáctico-pedagógicas para el profesor. Los contenidos matemáticos contemplados fueron: función de segundo grado; conceptos de polígonos regulares; resolución, análisis y discusión de sistemas lineales con dos ecuaciones y dos variables utilizando método de eliminación; enfoque de conceptos de prismas (área de superficie y volumen) y relación de Euler.

Para este texto, seleccionamos la tarea que involucra la relación de Euler, cuya habilidad y competencia está contemplada en el 3º grado de la escuela secundaria, en la Base del Currículo Nacional Común ([BNCC], Brasil, 2018).

Destacamos que en el 5º grado de la escuela primaria también se prevé el desarrollo de la capacidad de asociar figuras espaciales a sus planos (prismas, pirámides, cilindros y conos) y analizar, nombrar y comparar sus atributos, lo que incluye la relación de Euler, según el BNCC (Brasil, 2018).

Silva (2018) elaboró doce tareas que se aplicaron a una promoción de 8° grado de primaria en una escuela pública estatal, según la metodología enseñanza-aprendizaje-evaluación mediante la resolución de problemas. Se abordaron los contenidos de números enteros, suma, resta, multiplicación y división de números enteros, expresiones algebraicas, polinomios, suma, resta, multiplicación y división de polinomios y productos notables.

Para este texto, destacamos el estudio de productos notables en el 8° año de educación primaria, considerando que en el BNCC se prescribe para el 9° año de primaria, la capacidad de "comprender los procesos de factorización de expresiones algebraicas, en base a su relación con productos notables, para resolver y elaborar problemas que puedan ser representados por ecuaciones polinomiales de 2º grado" (Brasil, 2018, p. 317).

2. La relación de Euler

En su labor investigadora a nivel de maestría profesional, Camargo (2020) apoyó los lineamientos y concepciones de Lorenzato (2012) sobre materiales didácticos, considerando estos como un recurso auxiliar del profesorado en cuanto a alternativa metodológica para el desarrollo de los contenidos escolares, ya que su buen uso puede ampliar su potencial en cuanto al proceso de enseñanza-aprendizaje, evitando situaciones de fracaso escolar. Así, para situaciones de éxito escolar en el uso de materiales didácticos manipulativos, es importante que el docente tenga dominio sobre este recurso para que sea capaz de proponer la formulación de tareas que estimulen el razonamiento del alumno para la apropiación de los aspectos conceptuales del contenido matemático.

La propuesta didáctica de Camargo (2020) tomó como base de investigación teórico-metodológica las tareas exploratorio-investigativas de Ponte (2014). Para comprender la estructura de formulación de tareas, Ponte (2014) destaca cuatro tipos y analiza la forma de trabajar en el aula. George Pólya (1978) hizo una primera distinción básica entre "ejercicio" y un "problema" indispensable, según Ponte (2014). La enseñanza convencional está marcada por el término "ejercicio", que se caracteriza por ser un tema, cuya resolución requiere un método de solución adecuado, que debe ser enseñado por el profesor y llevado a cabo por el alumno.

Un tipo de tarea diferente del "ejercicio" es un "problema". Según las concepciones de Ponte (2014), un problema dado es un tema que requiere que el alumno conozca una estrategia de resolución, la cual es desconocida por el momento. Considerando las concepciones de Ponte (2014), la noción de problema:

> Se demuestra problemático, con muchas comprensiones de qué es y qué no es un problema y, especialmente, un buen problema para proponer a los estudiantes. ¿Son los problemas que aparecen en los manuales, a veces en una sección separada, tareas que pueden ayudar a incorporar una orientación curricular alternativa (p. 18)

Tomando como punto de partida la distinción entre "problema" y "ejercicio", Ponte (2014) caracteriza varios tipos de problemas: de palabras o problemas verbales; de equiparar (conocido como problemas de ecuación); de demostrar (conocido como problemas de demostración); de descubrir (problemas de exploración o investigación); de la vida real (llamados problemas contextualizados) y situaciones problemáticas.

Para Ponte (2014), los tipos de problemas que se destacan pertenecen a las tres últimas categorías, por su relación con la realidad y, en particular, por presentar preguntas abiertas. Por tanto, podemos entender que las exploraciones o investigaciones matemáticas están asociadas al descubrimiento de algo por parte del alumno o, incluso, por el profesor. Por otro lado, Ponte (2014) cree en el contraste entre los términos "ejercicios" y "escenarios de investigación", este último referido al campo de trabajo del docente.

La opción por el escenario de investigación trae al docente dificultades adicionales con relación al trabajo convencional, obligándolo a cambiar el contrato didáctico preestablecido con los estudiantes. De esta forma, los alumnos se ven obligados a salir de la denominada "zona de confort" y colocarse en una "zona de riesgo", en la que se tiene la ventaja de que el alumno puede contar con el trabajo colaborativo, realizando con sus compañeros las tareas propuestas por el docente.

Teniendo en cuenta los diferentes tipos de tareas matemáticas, Ponte (2014) destaca que las dos dimensiones fundamentales de las tareas son el "grado de desafío matemático" y el "grado de estructura". Según Ponte (2014), el grado de desafío matemático depende de la percepción de la dificultad de la pregunta propuesta, que puede variar entre "reducida" y "alta". El grado de estructura abarca el contexto del enunciado de una tarea determinada, que puede variar entre los polos "abierto" y "cerrado". En este contexto, una tarea cerrada contiene un enunciado cuya información requiere de la resolución de estrategias por parte del alumno que conducen a la respuesta esperada, como son los casos de problemas propuestos en la perspectiva de Polya (1978, citado en Ponte, 2014). Una tarea abierta admite cierta indeterminación en al menos un aspecto de las tareas cerradas, por ejemplo, la existencia de diferentes soluciones para la tarea.

Asociando las dos dimensiones de las tareas puntuadas por Ponte (2014), existen cuatro tipos de tareas: el ejercicio es una tarea cerrada y de desafío reducido; el problema también es una tarea cerrada, pero con un gran desafío; la investigación es una tarea abierta con un gran desafío y la exploración es una tarea abierta y accesible para la mayoría de los estudiantes. Ponte (2014) afirmó que "la línea de demarcación entre los diferentes tipos de tareas no siempre es clara, por ejemplo, una determinada tarea puede ser una exploración o un ejercicio, según los conocimientos previos de los estudiantes" (p. 21).

Contrariamente a la idea de que los estudiantes no pueden realizar una tarea si no se les ha enseñado directamente a resolverla, indica que adquieren mucho conocimiento fuera de la escuela que pueden movilizar en la clase de matemáticas, y es justamente esto lo que buscamos valorar en el enfoque exploratorio-investigativo. Por tanto, es importante valorar el descubrimiento de los estudiantes de sus propios métodos para resolver una pregunta, destacando que esta es a menudo la mejor manera de aprender. De esta forma, los antecedentes de conocimientos previos de los estudiantes pueden cambiar la clasificación de una determinada tarea, lo que implica que pueden adquirir características notables de ejercicios, problemas, exploraciones o investigaciones matemáticas.

Un detalle importante de esta tarea es que también nos referimos a él como exploratorio. Según las principales ideas de Ponte (2014), esta tarea no puede denominarse investigativa debido a la ausencia de elementos cruciales para la consolidación de una investigación matemática en la que se produzca una demostración o prueba matemática, utilizando el razonamiento lógico-deductivo del alumno. Esta observación se extiende a todas las tareas llamadas exploratorias.

Otro aspecto a considerar en el estudio del contenido matemático a través de los Algeblocks es la distinción que establece:

> Los objetos materiales –sólidos o dibujos– son solo modelos materializados de las entidades mentales con las que el matemático trata. En segundo lugar, solo en el sentido conceptual se puede considerar la perfección de las entidades geométricas: líneas rectas, círculos, cuadrados, cubos, etc. (Fischbein, 1993, p. 141)

Siguiendo la argumentación de Fischbein (1993), cualquier modelo de material didáctico de los Algeblocks contendrá las entidades geométricas asociadas a sus formas, pero solo en carácter conceptual. Por otra parte, cabe reiterar que no se puede garantizar la perfección de las piezas del material, ya que en la fase de construcción los errores en la realización de las mediciones se propagan varias veces, más aún en las piezas tridimensionales hechas a mano.

Como ejemplo de la manipulación de Algeblocks en una actividad matemática, proponemos una tarea apoyada en la definición de la relación de Euler, cuyo estudio en la escuela secundaria tiene el propósito de profundizar en la geometría espacial, estableciendo una generalidad para los poliedros convexos.

Antes de presentar el enunciado para la tarea, recordemos la definición de la relación de Euler basada en Muniz Neto (2013). Dado un poliedro P (no necesariamente convexo), con V, A y F, su número de vértices, aristas y caras respectivamente, entonces $X(P) = V - A + F = 2$. la "característica de Euler" de P se denota por X (P) y tiene un valor constante igual a 2, para todo poliedro convexo.

Un hecho interesante sobre la relación de Euler es la existencia en los poliedros no convexos que satisface la igualdad matemática. En este contexto, la tarea se formuló con dos preguntas:

> a. ¿Hay poliedros no convexos que respeten la relación de Euler? Utilice Algeblocks para representar posibles construcciones sólidas geométricas.
> b. ¿Puede decirse que un poliedro no convexo que respeta la relación de Euler es "euleriano"? ¿Es esta designación válida cuando se trata de poliedros convexos? Argumente basándose en el uso de Algeblocks.

En la resolución de la "pregunta a" es posible construir varios sólidos no convexos. Un hecho que puede resultar curioso para los estudiantes es que cuando se encuentran con la afirmación, pueden conjeturar que, si el poliedro no es convexo, entonces no respeta la relación de Euler y por lo tanto no puede ser llamado euleriano, lo cual es un malentendido que surge de la negación de las proposiciones involucradas, que no siempre es un resultado válido en matemáticas. Por otra parte, no se puede garantizar la reciprocidad de la relación de Euler en estos términos, ya que si el poliedro es euleriano, no significa que sea convexo.

Pasamos a la exposición de representaciones figurativas con los respectivos cálculos sobre la construcción de poliedros no convexos, que respetan la relación de Euler.

En la Figura 4 usamos 8 cubos naranjas con arista en "Y" para construir un paralelepípedo recto rectángulo hueco:

Figura 4. Poliedro no convexo euleriano.
Fuente: Camargo (2020, p. 135).

Esta representación figurativa contiene un sólido geométrico no convexo (Figura 4) que respeta la relación de Euler y puede denominarse euleriano. El cálculo de las aristas exteriores es A = 12 + 12 = 24. El número de vértices por la parte externa del prisma es V = 8 + 8 = 16. Para el cálculo de las caras debemos considerar el caso de que el prisma no sea hueco, lo que suma 8 caras. Luego, añadimos 4 caras a causa de la parte filtrada, generando en total F = 6 + 4 = 10. En este sentido, satisface la igualdad de la relación de Euler: X(P) = 16 – 24 + 10 = 2.

Si consideramos 8 cubos amarillos de arista X podemos construir varios poliedros eulerianos no convexos, entre ellos, los que presentamos en la Figura 5.

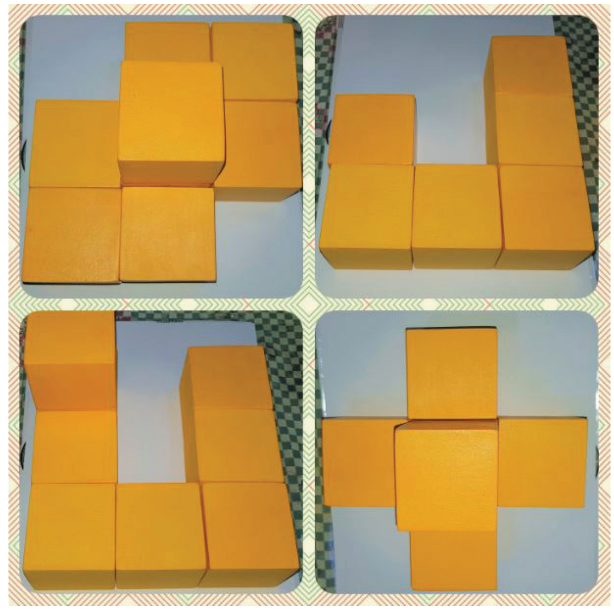

Figura 5. Cuatro variaciones de poliedros con la pieza X3.
Fuente: Camargo (2020, p. 138).

Los Algeblocks facilitan la construcción de otros poliedros eulerianos no convexos. La intención en la "pregunta a" es que el estudiante desarrolle la habilidad de exponer representaciones figurativas con los Algeblocks y validar o no cada construcción con la relación de Euler.

En relación con la "pregunta b", el objetivo era movilizar una sistematización de la relación de Euler a partir del proceso de experimentación con el manejo y la construcción de sólidos geométricos convexos y no convexos, que pueden denominarse eulerianos. Como síntesis, es importante que el estudiante aprenda que cada poliedro que respeta la relación de Euler se llama "euleriano".

3. Productos notables

Silva (2018) desarrolló la parte empírica de su tesis de maestría en una escuela pública de la ciudad de Río Claro - SP. El desarrollo de las tareas en clase contó con el apoyo de la contribución metodológica enseñanza-aprendizaje-evaluación a través de la resolución de problemas con estudiantes de 8º grado de primaria. La planificación de tareas de Silva (2018) tuvo como objetivo permitir conexiones entre aspectos algebraicos, aritméticos y geométricos en el estudio de operaciones polinomiales, a través del material manipulativo Algeblocks. Basado en Johnston (1994), el material manipulativo puede dar potencialidad para la comprensión del estudiante en relación con el nuevo concepto a aprender. Una forma en la que se puede pensar en la comprensión, según Silva (2018), es asociarla con una medida de la calidad y cantidad de conexiones que tiene una nueva idea con ideas existentes. Cuanto mayor sea el número de conexiones en una red de ideas, mejor será la comprensión.

El estudio de Silva (2018), a su vez, se refirió únicamente a la tesis de maestría de Espejel (2010) titulada "Desarrollo del Pensamiento Algebraico mediante el uso de Algeblocks en Estudiantes de Segundo Grado de Educación Secundaria", que involucró el uso de Algeblocks.

Espejel (2010) exploró el uso de Algeblocks con 50 estudiantes de la educación secundaria mexicana (equivalente a los grados 7, 8 y 9 de la escuela primaria brasileña). El propósito de esta investigación fue analizar el uso del "lenguaje algebraico para generalizar propiedades aritméticas y geométricas", además de "resolver problemas mediante la formulación de ecuaciones" (Espejel, 2010, p. 100). Las tareas propuestas por la autora no involucraron el espacio tridimensional. En este sentido, por ejemplo, en el estudio de polinomios se utilizó Algeplan para resolver tareas, como se muestra en la Figura 6.

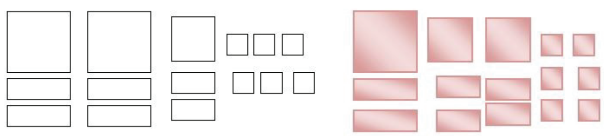

Figura 6. Modelo de Algeplan utilizado por Espejel (2010).
Fuente: Espejel (2010, p. 57).

El prototipo (Figura 6) utilizado por Espejel (2010), de hecho, no era Algeblocks, sino un material similar conocido popularmente como Algeplan en Brasil. La diferencia es que Algeblocks es tridimensional, mientras que Algeplan es bidimensional. Geométricamente hablando, cada pieza de Algeplan representa a una de las caras de un prisma recto de base cuadrada o rectangular de Algeblocks.

Espejel (2010) no proporcionó a los estudiantes que participaban en su investigación el uso de material didáctico. Se optó por la representación figurativa en la construcción de las representaciones algebraicas solicitadas, dejando la construcción de Algeplan como sugerencia para los alumnos, utilizando cartulina, papel, madera, plástico u otros tipos de materiales.

Enseñar a través de la resolución de problemas, según Silva (2018), requiere de un cambio no solo en la forma de enseñar. El maestro necesita cambiar la filosofía de cómo piensa en el aprendizaje y cómo puede ayudar mejor a los estudiantes a aprender. Los profesores deben seleccionar tareas de calidad que permitan a los estudiantes, a través de su resolución, apoyarse en las matemáticas que conocen para aprender nuevos contenidos y, utilizando sus propias estrategias, llegar a soluciones. Los maestros deben desarrollar preguntas apropiadas que puedan llevar a los estudiantes a verificar e informar sobre sus estrategias de resolución; como señala Onuchic (1999), "el problema es todo aquello que no se sabe hacer pero, que se está interesado en resolver" (p. 215).

Sobre el desarrollo de la metodología de enseñanza-aprendizaje-evaluación de las matemáticas a través de la resolución de problemas, Justulin (2014) declaró que "se produce en un proceso 'en espiral', que permite al profesor rescatar los conocimientos previos de los estudiantes, con su participación activa, y profundizar y ampliar su comprensión de un concepto, un procedimiento o un contenido matemático" p. 65).

La presentación de las operaciones algebraicas a los estudiantes es un gran desafío, ya que hay reglas que deben ser seguidas y respetadas. En nuestra experiencia de enseñanza es frecuente tener estudiantes con las siguientes dudas: $x + x = x^2$; $3 + x = 3x$. Una forma de intervención pedagógica para ayudarles a superar esta situación de fracaso escolar es diversificar las formas de representación matemática como, por ejemplo, la visualización.

Como ejemplo de este enfoque destacamos a Banchoff (2008), quien concibe el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas con conexiones y representaciones múltiples del mismo concepto. Al factorizar la diferencia de dos cuadrados, Banchoff (2008) considera que un cuadrado del lado "a" y otro del lado "b" se han eliminado, cuya unión genera dos rectángulos de área (a-b). a y (a-b).b, presentados en el ítem "i" de la Figura 7.

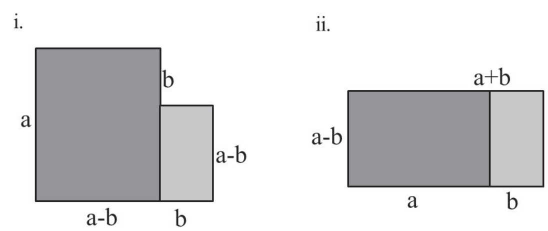

Figura 7. Diferencia de dos cuadrados.
Fuente: Banchoff (2008, p. 102).

La reorganización de los rectángulos del ítem "i" al ítem "ii" generó una figura plana con área
$(a + b).(a - b) = a^2 - b^2$.

El mismo tipo de conexión entre el álgebra y la geometría puede extenderse cuando consideramos el espacio tridimensional como, por ejemplo, en la diferencia de dos cubos. Esta descomposición es menos familiar, pero también es posible geometrizarla, según Banchoff (2008). Cuando se descompone un cubo del lado "a" como un cubo del lado "b" eliminado, tenemos tres prismas con caras rectangulares, dispuestos en la Figura 8.

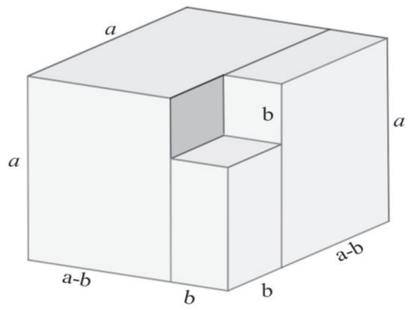

Figura 8. Diferencia de dos cubos.
Fuente: Banchoff (2008, p. 102).

En la Figura 8, se pueden ver tres prismas rectos con caras rectangulares, cuyas áreas se pueden expresar algebraicamente como:
$(a - b).a.a$; $(a - b).b.a$ y $(a - b).b.b$.
La suma de las áreas de estos prismas da como resultado:
$(a - b).a^2 + (a - b).b.a + (a - b).b^2 = (a-b).(a^2 + ab + b^2) = (a^3 - b^3)$.

Las conexiones matemáticas presentadas por Banchoff (2008) se pueden trabajar con el material manipulativo Algeblocks. En la investigación de Silva (2018) se utilizó un prototipo formado por un conjunto de bloques de plástico de varios tamaños, con dimensiones y colores específicos, cada color correspondiente a un patrón de tamaño para representar la unidad, x, y, x^2, xy, x^3, y^3, x^2y y xy^3, dispuestos en la Figura 9.

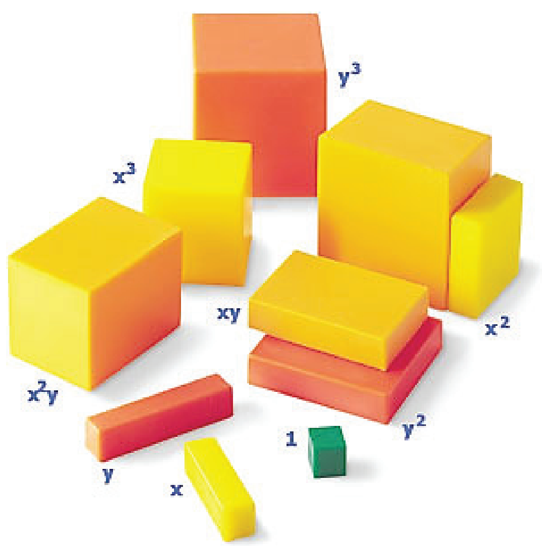

Figura 9. Silva (2018, p.88)

Los Algeblocks que figuran en la Figura 9 fueron desarrollados y probados por Johnston (1994). Según el autor, este material manipulativo permite a los estudiantes aprender conceptos algebraicos abstractos a través del modelado concreto con bloques manipulativos. Con el uso de estos bloques es posible modelar conceptos algebraicos de representación de enteros no negativos para resolver ecuaciones (Johnston, 1994).

Entre el material de apoyo de Johnston (1994) se presenta un tablero con estrategias para la resolución de problemas utilizando Algeblocks, el que guía al profesor a hablar siempre con el alumno y a dejarlo ser el protagonista de su aprendizaje. Más específicamente, se orienta a que el estudiante discuta el problema, lo represente a través del dibujo o a través de las piezas del material, utilice símbolos matemáticos y, cuando la encuentre, presente la solución del problema al profesor y a los compañeros de clase.

El material de apoyo de los Algeblocks refuerza la metodología de enseñanza-aprendizaje-evaluación de las matemáticas a través de la resolución de los problemas empleados por Silva (2018) en la investigación.

Además de los bloques de plástico, el material de apoyo de Johnston (1994) contiene tres tipos de láminas (Figura 10) para realizar actividades algebraicas.

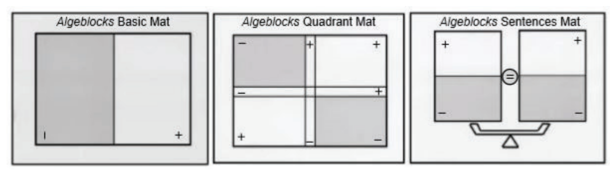

Figura 10. Modelo de hojas de actividad.
Fuente: Silva (2018, p. 89).

Silva (2018) utilizó el material desarrollado por Johnston (1994) y abordó con los estudiantes de 8º grado tareas que implicaban conceptos, involucrando operaciones fundamentales con números enteros, expresiones algebraicas, polinomios y sus operaciones, productos notables y factorización.

Para este texto Silva (2018) presentó tareas que implican el desarrollo de productos notables con Algeblocks, según la metodología de enseñanza-aprendizaje-evaluación a través de la resolución de problemas. Según lo señalado por el autor, en la resolución de las tareas propuestas el trabajo se desarrolló de forma cooperativa y colaborativa, a partir de la formación de pequeños grupos de alumnos. La docente-investigadora orientó a los alumnos del 8º año de la escuela primaria sobre la importancia del compromiso de todos en la discusión de los problemas presentados, así como el compromiso del trabajo individual de cada integrante en el éxito académico de cada grupo formado.

A modo de ejemplo, destacamos una tarea compuesta por tres elementos:

a) Representar $(x + y)^2$ utilizando los Algeblocks.

b) A través de la manipulación de los bloques de plástico, representar $(2x - y)^2$.

c) Utilizar el material manipulable para representar $(x + y)^3$.

Presentamos en la Figura 11 las respuestas para el ítem "a" y "b" según las representaciones matemáticas hechas por los estudiantes que participan en la investigación.

Item a *Item b*

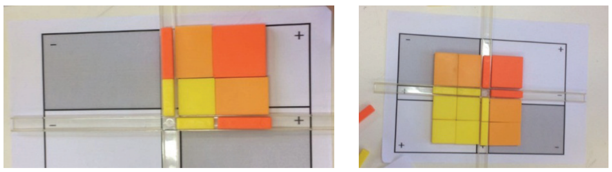

Figura 11. Productos notables.
Fuente: Silva (2018, p. 168).

Al resolver el ítem "c", los estudiantes comenzaron a partir de la forma en que obtuvieron el resultado en el ítem "a", como se ilustra en la Figura 12.

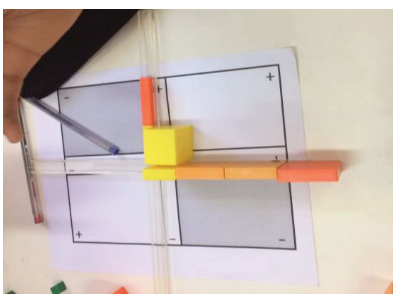

Figura 12. Estructura de $(x + y)^3$.
Fuente: Silva (2018, p. 168).

En la Figura 13 el razonamiento de los estudiantes implicaba la multiplicación por $(x + y)$ para obtener el producto notable de $(x + y)^3$ según la disposición de los bloques de plástico.

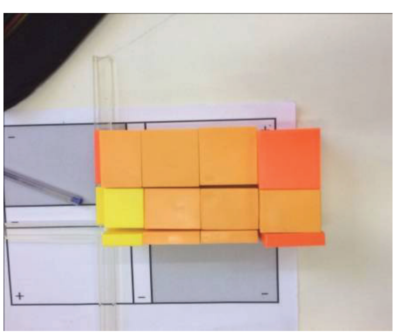

Figura 13. Representación de $(x + y)^3$.
Fuente: Silva (2018, p. 169).

Los estudiantes mostraron el contenido de la Figura 13 a la docente-investigadora, quien se sorprendió ya que no esperaba que lo presentaran de esa manera: $(x + y)^3$. A partir de esta disposición de bloques, Silva (2018) pidió a los estudiantes que construyeran un cubo.

Uno de los estudiantes preguntó a la docente-investigadora cuál sería la medida del lado de este cubo, y uno de ellos respondió: "el cubo tendrá la medida igual a $(x + y)$". Silva (2018) continuó el diálogo y preguntó a los otros estudiantes sobre la respuesta de este compañero de clase. La mayoría confirmó que la respuesta era correcta y añadió que cada medida (longitud, anchura y altura) del cubo está dada por $(x + y)$.

En la Figura 14 presentamos la construcción del cubo de volumen $(x + y)^3$ desde dos perspectivas.

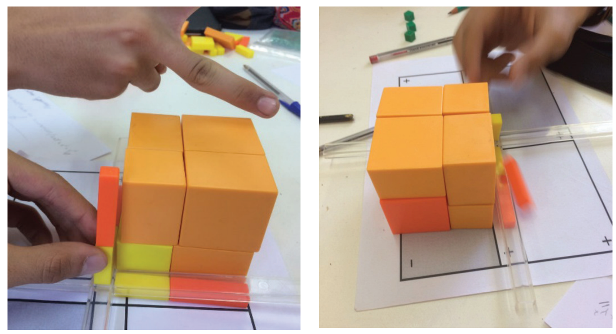

Figura 14. Representación geométrica del cubo.
Fuente: Silva (2018, p. 170)

El uso de material manipulable de Algeblocks permitió a los estudiantes establecer conexiones entre los contenidos matemáticos, articulando su perspectiva algebraica y geométrica. En el caso del ítem "c", la perspectiva algebraica del producto notable fue desarrollada por los estudiantes de la siguiente manera: $(x + y)^3 = (x + y)^2.(x + y) = (x^2 + 2xy + y^2).(x + y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. Cuando los estudiantes usaban los Algeblocks para representar los productos notables, visualizaron la representación de cada término de la expresión algebraica para el producto notable en el material manipulativo.

Según Silva (2018), dejar tareas donde, individualmente, el alumno pueda reflexionar sobre lo que fue trabajado en el aula, en ocasiones lo está preparando para la construcción de un nuevo concepto sobre el que trabajar. Sorprendentemente, los estudiantes pudieron pasar de la operación de multiplicación a la operación de potenciación con comprensión y significado, manipulando los bloques Algeblocks.

4. Consideraciones finales

El uso de cualquier material didáctico requiere de la preparación del profesor. El profesor debe estar dispuesto a salir de su zona de comodidad, ya que en el desarrollo de una actividad pueden producirse situaciones imprevistas, como las descritas en este texto.

Es necesario destacar que no basta con que el profesor conozca solo los contenidos matemáticos que hay que tratar con este tipo de propuesta didáctica. El profesor debe movilizar siempre las tareas con claridad, evitando así ambigüedades al tratar los conceptos pertinentes a las tareas de exploración-investigación (Camargo, 2020). El profesor también debe mostrar interés y empatía por este proceso, cautivando a los estudiantes que participan en sus exploraciones e investigaciones matemáticas.

En cuanto al material didáctico de los Algeblocks, su principal potencial se refiere a la cuestión de los registros de representación y las representaciones figurativas. En este sentido, como el material permite al posible estudiante registrar sus soluciones tanto con figuras como con notación algebraica, los estudiantes pueden establecer conexiones entre el álgebra y la geometría a través de registros escritos (Camargo, 2020).

Las actividades matemáticas desarrolladas por los alumnos de 8° año de primaria, según Silva (2018), partieron de la propuesta de problemas sobre los cuales se exploraron diferentes conceptos de las matemáticas, tanto a nivel concreto debido a la manipulación de los Algeblocks, como a nivel abstracto a través de representaciones en lenguaje algebraico, construidos a partir de las respectivas representaciones figurativas. En los diferentes momentos que utilizaron los alumnos el material de apoyo de Johnston (1994), es decir, los tres tipos de hojas para realizar actividades algebraicas, existía la posibilidad de explorar los conceptos de perímetro y área, que a menudo resultaban confusos para los estudiantes.

La principal limitación de este material didáctico, que se señaló durante la labor de Silva (2018), fue la restricción a los números enteros para representar las expresiones algebraicas y numéricas. En el caso de Camargo (2020), la limitación radica en que el material no asegura la validez de las demostraciones matemáticas en una investigación matemática.

Invitamos al lector interesado en otras posibilidades de trabajar con Algeblocks a consultar un conjunto de 16 tareas propuestas por Silva (2018) en su tesis de maestría. La investigación a nivel de Máster Profesional, desarrollada por Camargo (2020), contiene propuestas de tareas que involucran ceros de la función cuadrática, conceptos matemáticos de polígonos y poliedros regulares, además de sistemas lineales de dos ecuaciones de 1° grado con coeficientes enteros y dos variables.

Referencias

Banchoff, T. (2008). Algebraic Thinking and Geometric *Thinking. En C. Green y R. Rubenstein (Eds.), 70th Yearbook: Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics* (pp. 99-112). NCTM.

Brasil. Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular (BNCC): Educação é a base*. MEC. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.

Camargo, A. S. M. (2020). *O material manipulável Algeblocks:* uma proposta para o ensino médio [Mestrado profissional, Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, Brasil]. Repositorio institucional UFSCar. https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/12646

Castro, B. L., Oliveira, P. C., y Tinti, D. S. (2019). Análise de produtos educacionais elaborados no mestrado profissional em ensino de ciências exatas da UFSCar e no mestrado profissional em educação matemática da UFOP. *Revista Ciências Humanas, 12*, 234-243. https://doi.org/10.32813/2179-1120.2019.v12.n2.a584

Espejel, N. A. H. (2010). *Desarrollo Del Pensamiento Algebraico a través del uso de los Algeblocks en Alumnos de Segundo Grado de Educación Secundaria* [tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad Pedagógica Nacional, Ciudad de México]. Repositorio institucional. http://200.23.113.51/pdf/27396.pdf

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 139-162. https://doi.org/10.1007/BF01273689

Johnston, A. M. (1994). *Algeblocks*. South-Western Publishing Company.

Justilin, A. M. (2014). *A formação de professores de matemática no contexto da resolução de problemas* [tese Doutorado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro]. Repositorio institucional UNESP. http://hdl.handle.net/11449/127631

Lorenzato, S. (2012). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores* (3.a ed.). Autores Associados.

Muniz Neto, A. C. (2013). *Geometria*. Sociedade Brasileira de Matemática.

Onuchic, L. R. (1999). Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. En M. A. V. Bicudo (Org.), *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas* (pp. 199-218). UNESP.

Ponte, J. P. (2014). *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Silva, L. E. (2018). *Ensino intradisciplinar de Matemática através da resolução de problemas: o caso do Algeblocks* [Mestrado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro]. Repositorio institucional UNESP. http://hdl.handle.net/11449/154125