SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

https://doi.org/110.46219/rechiem.v12i3.33

MEDIACIÓN SEMIÓTICA POTENCIAL Y REAL DEL ENUNCIADO DE TAREAS GEOMÉTRICAS

POTENTIAL AND REAL SEMIOTIC MEDIATION OF GEOMETRIC TASK STATEMENTS

Patricia Perry, pperryc@yahoo.com.mx
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia

Leonor Camargo, lcamargo@pedagogica.edu.co
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia

Carmen Samper, csamper@pedagogica.edu.co
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia

RESUMEN

El artículo tiene como objetivo presentar el análisis de la mediación semiótica que los enunciados de dos tareas "ejercieron" sobre la construcción de significado en la que se involucró un estudiante al resolver las tareas con la mínima ayuda interpretativa del profesor. El análisis, realizado con la estrategia de "entrevista basada en tareas", se hace desde la perspectiva semiótica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que desarrollan Sáenz-Ludlow y Zellweger, basándose en la teoría del signo triádico de Charles Sanders Peirce. A manera de reflexión final, alertamos sobre la importancia de formular cuidadosamente los enunciados en el diseño de tareas y sugerimos que es posible apoyarse en estos para lograr un aprendizaje significativo.

PALABRAS CLAVE:
Enunciado de tarea; mediación semiótica; geometría.

ABSTRACT

The article aims at presenting the analysis of the semiotic mediation that the statements of two tasks exerted upon meaning-making when a student was involved in solving the tasks with the minimum interpretive help from the teacher. A "task-based interview" strategy was used for the analysis which is done from the semiotic perspective for teaching and learning mathematics developed by Sáenz-Ludlow and Zellweger, based on Charles Sanders Peirce's triadic sign theory. As a final statement, we stress the importance of carefully formulating the statements when designing tasks and suggest that it is possible to take advantage of these to achieve meaningful learning.

KEYWORDS:
Task statement; semiotic mediation; geometry.

Recibido: 1 de junio de 2020, Aceptado: 6 de agosto de 2020

1. Introducción

Uno de los intereses del grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), desde hace más de quince años, es determinar rasgos característicos de ambientes de aprendizaje para la geometría escolar mediados por artefactos, que propicien el razonamiento y la construcción de significado, meta de los currículos actuales de diversos países. En 2015, adelantamos un proyecto[1] de desarrollo e investigación en un colegio rural del cual no éramos profesoras. En las clases de geometría de séptimo grado implementamos un currículo diseñado por nosotras y apoyado en el uso de un *software* de geometría dinámica. Además de preparar un conjunto de tareas encaminadas a promover la construcción de significado del objeto geométrico punto medio y favorecer el desarrollo del razonamiento, observamos el proceso de las tareas por parte de los estudiantes y acompañamos a los profesores en la gestión de las clases.

El diseño de las tareas estuvo orientado principalmente por una perspectiva semiótica del aprendizaje, que destaca el papel de la interpretación de quienes participan en el acto comunicativo. Desde nuestro punto de vista, en la construcción discursiva que los estudiantes tenían que hacer era fundamental que tuvieran disponibles los enunciados de las tareas y pudieran recurrir a ellos a voluntad. Optamos entonces por entregarles los enunciados por escrito, de tal modo que los estudiantes tuvieran que hacer una interpretación inicialmente libre de la influencia de la comunicación con el profesor. Consideramos que contar con la propia interpretación del estudiante sobre la situación planteada y lo que se pregunta o solicita, en la medida en que aquella hace parte de una construcción interactiva de significado, es fundamental para el trabajo del estudiante y para entender su producción. En la elaboración de los enunciados subyace una hipótesis sobre cómo suponíamos que estos promoverían la interpretación y contribuirían a la construcción de significado.

La evidente diferencia entre las interpretaciones previstas y las provisionales, que cada estudiante construyó al enfrentar la lectura del enunciado de las tareas, llamó nuestra atención sobre la complejidad inherente a la formulación de los enunciados de las tareas para la interpretación que pretendíamos. Esta situación se constituyó en el problema que abordamos en este artículo. Aunque éramos conscientes de la obvia imposibilidad de lograr que las tareas tuvieran el mismo efecto de mediación semiótica en todos los estudiantes y que este fuera el previsto, no anticipamos varios de los elementos que podrían influir las interpretaciones de los estudiantes.

Nuestro objetivo en este artículo es analizar la mediación semiótica que los enunciados de dos tareas “ejercieron” sobre la construcción de significado en la que se involucró un estudiante al resolver las tareas con la mínima ayuda interpretativa del profesor, en contraste con la respectiva mediación semiótica prevista. No queremos sugerir que exista la formulación “perfecta” de enunciados que garantice la interpretación pretendida por el profesor. Nuestra finalidad comunicativa es alertar sobre la necesidad de tomar decisiones informadas respecto a los enunciados de las tareas, decisiones que consideren la viabilidad de la generación de interpretaciones útiles para la interacción del estudiante con el profesor y sus compañeros y, por tanto, eviten trabas innecesarias que podrían obstaculizar la construcción colectiva de significado.

Para profundizar en el papel mediador de las tareas se han empleado diversas aproximaciones pedagógicas, cognitivas y comunicacionales. Por ejemplo, Sullivan, Clarke y Clarke (2009) se enfocan en el papel de la tarea en la relación pedagógica enseñanza-aprendizaje; Camelo (2010) analiza las características de los enunciados que orientan a los estudiantes hacia la meta de la tarea; Özgeldi y Esen (2010) estudian las oportunidades que brindan las tareas para pensar; y Morgan, Tang y Sfard (2011) se centran en la estructura y el lenguaje de los enunciados y su relación con las dificultades que tienen los estudiantes para comprender las tareas. En tales estudios se destaca el innegable papel de las tareas en la construcción de significado. No obstante, en la investigación en Educación Matemática sobre las tareas, parece haber un vacío relativo a los rasgos textuales del enunciado que influyen en la posibilidad de que este medie semióticamente de manera útil las interpretaciones de los estudiantes, para que ellos puedan dilucidar los aspectos del objeto matemático de aprendizaje que la tarea pretende sacar a la luz, y así puedan ir construyendo significados personales del objeto, encaminados hacia los significados que son meta de la enseñanza.

[1] *Geometría: vía al razonamiento científico (DMA-399-2015), proyecto financiado por el Centro de Investigación de la Universidad Pedagógica Nacional.*

2. Fundamentos teóricos

2.1 Aprendizaje y perspectiva semiótica

Fundamenta nuestra propuesta la idea de aprendizaje de las matemáticas como construcción[2] de significado de objetos matemáticos, producto de la interacción comunicativa. En la Educación Matemática, autores como Godino y Batanero (1994), Radford (2000) y Contreras y García (2011) coinciden en que el propósito de la construcción de significado es la búsqueda de compatibilidad entre las interpretaciones personales de los hechos (significado personal) y las de la comunidad cultural de referencia (significado institucional).
Además de aceptar que la convergencia del significado personal hacia el institucional debe guiar la construcción de significado en el aula, entendemos que el significado institucional de un objeto matemático integra consensos de interpretaciones sobre el objeto construidas histórica y culturalmente a través de la actividad intelectual de profesionales del discurso matemático, entendido este de acuerdo con Sfard (2008a). En cambio, el respectivo significado personal es la integración subjetiva, parcial y provisional de interpretaciones que el individuo va construyendo durante su experiencia escolar –en la interacción académica y social con sus compañeros y con la mediación semiótica de las tareas matemáticas y del profesor– pero también fuera de su vida escolar. Este planteamiento nos sugiere que para rastrear el proceso de construcción de significado en el aula es pertinente una perspectiva semiótica que destaque el papel de la interpretación de quienes participan en el acto comunicativo. Por esta razón recurrimos a la perspectiva que desarrollan Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012) basándose en la teoría del signo triádico de Peirce, quien considera la semiosis como una actividad de comunicación o de pensamiento en la que se crean, interpretan y recrean signos.

En la comunicación verbal (oral o escrita) no hay un paso directo de las ideas emitidas a través de signos a los mensajes recibidos e interpretados mediante los signos del receptor, ni de estos al mensaje que se emite en respuesta. El acto comunicativo pasa por la interpretación de quienes participan en el mismo, y es en esta donde cada uno construye y refina sus significados personales. En una cadena de actividad semiótica de producción e interpretación de signos, emisor y receptor construyen significados a través de sus propios procesos de interpretación (Sáenz-Ludlow y Kadunz, 2016). Por tanto, el significado no es independiente de la mente (i. e., no reside en los signos) y el aprendiz no es un receptor pasivo sino un constructor autónomo de significado (Sfard, 2001). El aporte distintivo de Peirce a la tradicional noción de signo, visto como la relación entre una representación y un significado único de esta, está en la inclusión de la mente que interpreta. Esta inclusión destaca que la comunicación no es un proceso in-mediato, que permita pasar directamente un determinado mensaje de una persona a otra con significados supuestamente “objetivos” y asociados a aquellos hechos en los que se enfocan los signos. Por el contrario, en la comunicación las personas ponen en juego su subjetividad al ir construyendo su significado personal de los signos que perciben.

De acuerdo con la perspectiva descrita, concretamos nuestra visión de construcción de significado en el aula de clase formulándola como un proceso de interpretación intra e interpersonal mediado semióticamente, que busca la convergencia de los significados personales de los estudiantes, evidenciados en la comunicación, hacia significados institucionales pretendidos. Las interpretaciones se van transformando en el curso de un proceso semiótico que podría no terminar en la medida que el estudiante siga trabajando al respecto.

2.2. Mediación semiótica del enunciado de una tarea

En este artículo, y en el marco de la realización de tareas asignadas a los estudiantes, definimos[3] *mediación semiótica ejercida por el enunciado de una tarea escolar* (desde ahora, mediación semiótica del enunciado) como los rasgos textuales particulares del enunciado de la tarea que viabilizan la interpretación de los objetos matemáticos, que son la meta de la enseñanza, por parte de los estudiantes y que, desde la perspectiva de quien diseña la tarea, fomentan la convergencia de los significados personales hacia los institucionales, es decir, la construcción de significado.

En el momento de planear la enseñanza y crear o seleccionar y adaptar tareas para promover la construcción de significado, el profesor tiene la oportunidad de prever la mediación semiótica de los enunciados de las tareas, identificando qué efecto podrían tener en las interpretaciones que hagan los estudiantes. Y cuando los estudiantes resuelvan la tarea, puede estudiar el efecto logrado por el enunciado y apoyarlos semióticamente al

[2] *Para una descripción detallada del proceso de construcción de significado, consultar Camargo, Perry, Samper y Molina (2015).*
[3] *Esta definición se corresponde con la que formulamos para mediación semiótica del profesor en Camargo et al. (2015).*

interactuar con ellos. En ese sentido, relativos a las tareas, distinguimos y conceptualizamos dos tipos de mediación semiótica:

- **Mediación potencial del enunciado de una tarea:** refiere a rasgos textuales del enunciado de una tarea, respecto a los cuales se conjetura un efecto relevante en la semiosis de los estudiantes relacionada con el significado, cuya construcción pretende el profesor. Cuando el profesor estudia el enunciado, imagina cómo puede ser interpretado por sus estudiantes y anticipa de qué manera rasgos textuales particulares del enunciado pueden promover la evolución de significado.

- **Mediación real del enunciado de una tarea:** refiere a rasgos textuales del enunciado de una tarea que tienen un efecto relevante en la semiosis de los estudiantes relacionada con el significado, cuya construcción pretende el profesor. Junto con la mediación semiótica del profesor, genera cambios en las sucesivas interpretaciones y, en últimas, una evolución de estas hacia los significados institucionales pretendidos.

La diferencia entre lo que el profesor interpreta y cree que los estudiantes interpretarán y lo que ellos interpretan es discutida por Johnson, Coles y Clarke (2017), pero no desde el punto de vista semiótico sino pedagógico. En este artículo nos enfocamos en la mediación semiótica potencial y real de los enunciados de las tareas, en el contexto de tareas que buscan promover el razonamiento científico de estudiantes de nivel escolar. En ese caso, las tareas posibilitan la enunciación de un hecho, su aceptación como resultado de una exploración empírica y el uso del hecho en la justificación de una conjetura.

3. Metodología

Con una perspectiva interpretativa de investigación cualitativa, y empleando una estrategia de “entrevista basada en tareas” (Goldin, 2000), presentamos en este artículo inicialmente un análisis preliminar de la mediación semiótica potencial de los enunciados de dos tareas específicas, articuladas en una secuencia didáctica. Luego, nos centramos en la mediación semiótica real de ambos enunciados, identificada mediante el estudio de un caso. Para ello rastreamos, en el proceso de resolución de las dos tareas por parte de un estudiante (Andrew), las interpretaciones que él hace de los enunciados en presencia de una profesora-investigadora (PI) y establecemos una relación con los significados pretendidos. A continuación, presentamos tres momentos de la estrategia investigativa implementada:

Momento 1: Diseñamos y caracterizamos la secuencia didáctica en la que se incluyen las dos tareas cuyos enunciados analizamos en este artículo. La secuencia fue discutida con la profesora titular del curso y el equipo de profesores de matemáticas de la institución. Dado que la institución había sido dotada con tabletas que tenían instalado el programa GeoGebra, cada estudiante podía disponer de una en las clases de geometría. Como la profesora no tenía experiencia en su uso, consideró oportuno que el equipo de investigación diseñara la secuencia.

Momento 2: Analizamos la mediación semiótica potencial del enunciado de las tareas. Para ello, como herramienta analítica, nos basamos en tres elementos del marco de referencia sugerido por Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012), descritos en la Tabla 1. El enunciado de cada tarea se constituyó en la unidad de análisis. En cada uno identificamos, no necesariamente en este orden: (i) el *Objeto Real Matemático* implícito en el intercambio comunicativo, cuya construcción discursiva era la pretendida, (ii) los aspectos específicos sobre los que se buscaba que el enunciado mediara, *objetos inmediatos*, y que se codificaron en *signos vehículos* y (iii) los *signos vehículos* presentes en cada enunciado. Cada uno de los elementos señalados fue caracterizado en términos de rasgos textuales del enunciado que consideramos que influyen en la posibilidad de que este medie semióticamente, tales como la generalidad del contexto matemático al que alude, elementos centrales de la relación que se espera que descubran los estudiantes y aspectos icónicos y simbólicos que intervienen. También explicitamos lo que consideramos que podrían ser interpretaciones de los estudiantes y de su actividad matemática.

Tabla 1

Herramienta analítica para el análisis de enunciados de tareas

Categoría	Descripción	Código
Objeto Real Matemático	Construcción social, cultural e histórica asumida por la comunidad profesional del discurso matemático (i. e., conocimiento procedimental, conceptual y actitudinal).	ORM
Signo vehículo	Gesto, palabra, gráfico, imagen que explicita lo que se quiere comunicar.	sv
Objeto inmediato	Aspecto específico del Objeto Real Matemático codificado y expresado en un signo vehículo.	oi

Fuente: Elaboración propia.

Momento 3: Rastreamos la mediación semiótica real de los enunciados, en el proceso de resolución de las tareas hechas en clase por parte de algunos estudiantes, cuando enfrentaron la tarea individualmente. Los estudiantes observados se seleccionaron al azar y no tenían una condición particular especial. Los miembros del equipo de investigación, que actuaron como observadores participantes, optaron por interactuar con quien estuviera cerca durante la realización de la tarea. Una de las investigadoras era observadora (participante) del estudiante Andrew, el caso que reportamos aquí, durante el trabajo individual. Andrew era un estudiante que participaba con regularidad en la clase, estaba dispuesto a interactuar con sus compañeros y a explicarles cuando veía la necesidad de hacerlo. Las condiciones de espacio y tiempo del trabajo de Andrew fueron las mismas que las de sus compañeros. Por falta de espacio no podemos reportar la resolución de la tarea de todos los estudiantes observados. De aquí que optamos por reportar el trabajo de Andrew, por considerar que es ilustrativo de las ideas que queremos señalar.

Para hacer el análisis nos valimos de la videograbación de la interacción de la investigadora con Andrew, la cual transcribimos en su totalidad, y acompañamos con información obtenida por la observadora y con la producción escrita de Andrew. En el ejercicio, empleamos nuevamente las categorías indicadas en la Tabla 1. Cabe aclarar que el análisis de la mediación semiótica real de los enunciados corresponde solo al momento cuando Andrew enfrenta la tarea individualmente, razón por la cual solo informamos sobre la resolución de la tarea.

4. Análisis y resultados

4. 1. Tareas

En la Tabla 2 presentamos las tareas previstas para propiciar el razonamiento científico. Están articuladas en la medida que la primera posibilita llegar a la enunciación de un hecho geométrico que se aceptará como resultado de una exploración empírica en GeoGebra, pero sin una justificación teórica por no contar con el contenido geométrico para hacerla, mientras que la segunda propende por generar una conjetura y justificarla deductivamente, usando el hecho geométrico descubierto y enunciado en la primera tarea.

Tabla 2

Tareas previstas para propiciar el razonamiento científico

1) Con GeoGebra

a) Representa cualquier ΔABC. Sea D punto medio del $\overline{\mathrm{AB}}$ y E punto medio del $\overline{\mathrm{AC}}$. Construye el $\overline{\mathrm{DE}}$.

b) Busca una relación especial entre DE[4] y BC. Describe cómo la encontraste.

c) Escribe cuál es la relación que existe.

2) ¿Existe un punto F en $\overline{\mathrm{BC}}$ tal que el perímetro del $\Delta\mathrm{DEF}$ sea la mitad del perímetro del ΔABC? Justifica tu respuesta.

Para responder la pregunta, recuerda:

Definición. El **perímetro de un triángulo** es la suma de las medidas de las longitudes de los lados del triángulo.

Fuente: Elaboración propia.

Después de tener la producción relativa a la primera tarea, la profesora promueve una revisión pública de los aspectos que considera relevantes en las producciones de los estudiantes e institucionaliza el Hecho Geométrico (*HG*) descubierto:

HG Puntos medios en triángulo. Si un segmento tiene extremos en los puntos medios de dos lados del triángulo, entonces su longitud es la mitad de la longitud del tercer lado.

La resolución de las dos tareas ofrece la posibilidad de vivir una experiencia de razonamiento científico enfocada principalmente en: (i) la enunciación del hecho geométrico descubierto en la primera tarea, y (ii) el uso de tal hecho en la justificación de la conjetura surgida al resolver la segunda tarea.

4.2. Mediación semiótica potencial del enunciado de las tareas

El siguiente es un análisis de la mediación semiótica potencial del enunciado de las tareas. En este, empleamos las categorías propuestas en la Tabla 1.

Tarea 1

El *ORM* (geométrico) implícito en la primera tarea es la propiedad que tienen los puntos medios de los lados de un triángulo (en términos de la longitud del

[4] *DE representa la medida de longitud del segmento DE.*

segmento que los tiene por extremos), hecho al que nos referimos como *Puntos medios en triángulo*. Son dos aspectos de este objeto los que pretendemos que los estudiantes construyan discursivamente: uno, la relación entre las medidas de longitud del lado de un triángulo y del segmento cuyos extremos son los puntos medios de los otros dos lados (oi_1); dos, el enunciado condicional general que establece el hecho descubierto (oi_2).

Para mediar la construcción del primer aspecto (oi_1), el enunciado de la tarea presenta dos signos vehículo. Uno, las instrucciones dadas para lograr una imagen gráfica de la situación. Dos, la solicitud para indicar en qué enfocar la búsqueda:

- sv_1: "Con GeoGebra, representa cualquier ΔABC. Sea D punto medio del $\overline{\mathrm{AB}}$ y E punto medio del $\overline{\mathrm{AC}}$. Construye el $\overline{\mathrm{DE}}$". (Ítem 1a)

- sv_2: "Busca una relación especial entre DE y BC". (Ítem 1b, primera parte)

Con el sv_1, el enunciado de la tarea alude indirectamente a un contexto (i. e., cualquier triángulo) y a elementos protagónicos en la relación que habrá de descubrirse (i. e., puntos medios y segmento cuyos extremos son aquellos puntos). En este sv_1 hay una fuerte componente simbólica, aunque también una componente icónica en la notación de segmento y de triángulo. Con el sv_2, el enunciado alude a otro elemento protagónico (las medidas) y a la existencia de una relación que el estudiante debe descubrir. Así, interpretados por los estudiantes, los signos vehículo los podrían llevar a: realizar una construcción en GeoGebra, hacer alguna exploración empírica y establecer una comparación entre medidas con la intención de encontrar la relación. En el caso del sv_2, sin duda predomina el componente simbólico, es decir, la asociación convencional de la notación geométrica y del término "relación" a los objetos que representan.

La situación geométrica expuesta por el enunciado de la tarea se puede ver en uno de dos niveles de generalidad: (i) un triángulo cualquiera que, una vez representado, constituye **el** triángulo particular que se examina para detectar y formular una relación entre los elementos de interés, y sobre **el cual** se predica; es decir, se trata de un triángulo arbitrario, pero particular, de cuyo examen se obtiene una relación geométrica particular expresada con uno u otro nivel de abstracción numérica (e. g., 12 es dos veces 6 –foco en el procedimiento– o este número es el doble de este –foco en la relación–); (ii) un triángulo cualquiera que representa a **todos** los triángulos posibles en lo que respecta a la relación buscada; es decir, se trata de un triángulo arbitrario y genérico, de cuya exploración empírica se obtiene un indicio de una relación general. Así, la relación a la que podría llegar un estudiante podría referirse a un triángulo particular o a todos los triángulos.

Dependiendo de cuál sea el nivel de generalidad que la mediación semiótica del enunciado provoque, la exploración podría consistir en la toma de la medida de longitud de los dos segmentos de interés y la consideración de un solo triángulo o de varios. Si se explora en un solo caso, el examen o la comparación del par de medidas podría conducir o no a identificar una relación según los números que estén puestos en juego y a la familiaridad del estudiante con dichos números. Por ejemplo, si las medidas fueran 6 y 12 o 6,74 y 13,48, sería posible que el estudiante reconociera la relación en el primer caso y no en el segundo. Si la exploración se hace pensando en un triángulo genérico, habría tres procedimientos posibles: (i) a partir del primer triángulo considerado, formular una hipótesis sobre la relación, y ponerla a prueba considerando otros triángulos logrados mediante el arrastre; (ii) usando el arrastre, considerar varios triángulos para obtener por inducción una conjetura sobre la relación; (iii) construir varios triángulos (e. g., uno de cada tipo: isósceles, equilátero, rectángulo, acutángulo, obtusángulo) y comparar los resultados obtenidos.

Los ítems (b, segunda parte) y (c) de la Tarea 1 median semióticamente la enunciación del hecho descubierto (oi_2). Identificamos dos signos vehículo:

- sv_3: "Describe cómo la encontraste [la relación especial]." (Ítem b, segunda parte)

- sv_4: "Escribe cuál es la relación que existe." (Ítem c)

El sv_3 podría producir interpretaciones personales más o menos detalladas respecto al propósito de la tarea. Los estudiantes podrían, por ejemplo, evocar apenas la toma de medidas de los segmentos involucrados. O de manera más completa, el signo vehículo podría sugerir, además, la comparación entre dichas medidas en busca de una regla que permita, por ejemplo, expresar una medida en términos de la otra. Pero una interpretación acorde con la solicitud de describir cómo se obtuvo la relación no puede desconocer los pasos iniciales a través de los cuales se creó la situación en la que se llevó a cabo la exploración con la medida; es decir, una interpretación más precisa, mejor encaminada a lograr un significado más acorde con lo que se pretende debería incluir la construcción realizada en GeoGebra.

Por su parte, el *sv*$_4$ también puede evocar interpretaciones más o menos detalladas con respecto al propósito de la tarea. Los estudiantes podrían, por ejemplo, tener la idea de una relación entre los números específicos involucrados, o entre los números específicos, nombrados por medio de las respectivas notaciones. Una tercera interpretación los podría llevar a hacer referencia al caso general nombrándolo o no (e. g., cualesquiera sean BC y ED, ED es la mitad de BC; el segmento cuyos extremos son los puntos medios de dos lados mide la mitad del tercer lado). Pero una interpretación que apunte realmente a enunciar la relación en cuestión no puede dejar de lado la mención del contexto en el que ocurre la relación (i. e., el triángulo) ni tampoco la mención de las condiciones bajo las cuales ocurre la relación (i. e., los extremos del segmento que se compara con un lado del triángulo son los puntos medios de los otros dos lados del triángulo).

Tarea 2

En la segunda tarea se formula una pregunta: "¿Existe un punto F en BC tal que el perímetro del $\Delta\mathrm{DEF}$ sea la mitad del perímetro del ΔABC?", y además se pide justificar la respuesta dada a ella. Interpretar la pregunta requiere conectarla con la primera tarea; así, la contextualización tácita de la pregunta involucra un triángulo cualquiera dado y los puntos medios de dos de sus lados. En consecuencia, la pregunta expresada de manera completa incluye dos signos vehículo:

- *sv*$_5$: [En un ΔABC cualquiera, D y E son los puntos medios de los lados $\overline{\mathrm{AB}}$ y $\overline{\mathrm{AC}}$, respectivamente.] "¿Existe un punto F en $\overline{\mathrm{BC}}$ tal que el perímetro del ΔDEF sea la mitad del perímetro del ΔABC?"
- *sv*$_6$: "Justifica tu respuesta."

Una respuesta deseable para la pregunta formulada en el *sv*$_5$, es decir, una que afirme la existencia del punto y lo caracterice geométricamente, podría ser la base para llegar a enunciar la conjetura: "En un ΔABC cualquiera, D y E son los puntos medios de los lados $\overline{\mathrm{AB}}$ y $\overline{\mathrm{AC}}$, respectivamente. Si F es el punto medio de $\overline{\mathrm{BC}}$, entonces el perímetro del ΔDEF es la mitad del perímetro del ΔABC". Sin embargo, puesto que *sv*$_5$ no refiere a una conjetura ni solicita su enunciación, su papel es apenas mediar la presentación de la situación geométrica que enfoca la relación de dependencia entre los puntos medios de los lados de un triángulo cualquiera y una relación entre el perímetro de dicho triángulo y el del triángulo determinado por los puntos medios.

De otro lado, y como principal intención didáctica de la tarea, el *sv*$_6$ solicita la justificación de la relación descubierta, con lo cual dicha justificación teórica se constituye en el *ORM* de la segunda tarea. Específicamente, el aspecto de este objeto, cuya construcción de significado se pretende que los estudiantes inicien con el desarrollo de la segunda tarea, es el hecho geométrico *Puntos medios en triángulo* en su calidad de garantía en la justificación de otro hecho geométrico (*oi*$_3$). Bajo el supuesto de tener ya una conjetura respecto a qué punto "especial" del $\overline{\mathrm{BC}}$ cumple la condición mencionada de los perímetros, la justificación solicitada en la tarea consiste en la argumentación deductiva para concluir que tal punto cumple la condición. Así que, siendo el punto medio del $\overline{\mathrm{BC}}$ el punto especial identificado, la argumentación podría ser algo como lo siguiente: Si F es el punto medio del BC, como D y E son los puntos medios de los otros dos lados del ΔABC, las medidas DE, EF y FD son respectivamente la mitad de las medidas CB, BA, AC gracias al hecho geométrico *Puntos medios en triángulo*. Así que $\mathrm{DE} + \mathrm{EF} + \mathrm{FD} = 1/2$ $(\mathrm{CB} + \mathrm{BA} + \mathrm{AC})$. Como $\mathrm{DE} + \mathrm{EF} + \mathrm{FD}$ es el perímetro del ΔDEF y $\mathrm{CB} + \mathrm{BA} + \mathrm{AC}$ es el perímetro del ΔCBA, se tiene que el perímetro del ΔDEF es la mitad del perímetro del ΔCBA. Las garantías de las afirmaciones segunda y tercera son propiedades del sistema numérico.

4.3. Rastros de la mediación semiótica real de los enunciados

Tarea 1

Andrew interpreta el *sv*$_1$ como estaba previsto, salvo por dos hechos. Primero, usa la herramienta Triángulo y, como queda representada una región triangular, PI le pide que rehaga la construcción usando la herramienta Segmento. Andrew atiende la solicitud.

Segundo, respecto a la instrucción "Construye el $\overline{\mathrm{DE}}$", le pregunta a PI si se trata de un segmento o de una recta. PI le indica que esa es la notación de segmento. Andrew completa la representación de la situación. La mediación semiótica del enunciado para llegar a una imagen gráfica de la situación se ve interferida por los significados personales que Andrew atribuye a las notaciones ΔABC y $\overline{\mathrm{DE}}$. Pese a que tales notaciones tienen, como se dijo ya, una fuerte componente icónica y, además, se precisaron en la clase al introducir las respectivas nociones, al parecer, Andrew aún no ha logrado la familiaridad requerida para distinguir entre las imágenes figurales de triángulo y región triangular, y para reconocer lo que designa la notación $\overline{\mathrm{DE}}$; así que los respectivos significados personales de Andrew difieren de los institucionales.

Luego, respecto a *sv*$_2$, Andrew observa detenidamente la representación que tiene en la pantalla y propone:

"Una relación [entre DE y BC] sería que ambos son segmentos". Es decir, Andrew se enfoca en segmentos, lo cual puede haber sido inducido sin intención alguna por el énfasis en segmentos que quizá percibió durante la construcción en GeoGebra: la solicitud de usar la herramienta Segmento para construir el triángulo, cuando él lo había hecho con la herramienta Triángulo, y la aclaración de que lo que se le pedía construir era el segmento DE y no la recta DE.

Inferimos que para el estudiante el término "relación" significa asociación o conexión entre dos objetos, y que las dos notaciones $\overline{ED}$ y ED probablemente refieren de manera indistinta al mismo objeto (i. e., al segmento ED); así lo corrobora su lectura del enunciado en voz alta: "punto medio del AB" y "relación especial entre DE y BC". En el proceso de construcción discursiva del *ORM*, posiblemente estamos ante la interpretación personal de Andrew: *una conexión o asociación entre dos de los elementos de la figura que tiene en la pantalla es la relación de pertenencia a la misma clase, la de los segmentos*. Esta interpretación es poco consistente con el objeto inmediato pretendido (oi_1), que enfoca una relación entre las medidas de dos segmentos y no entre los segmentos mismos. Se evidencia entonces que la construcción de significado le exige al estudiante poder interpretar adecuadamente no solo el término "relación", sino también las notaciones geométricas $\overline{XY}$ y XY , con X e Y puntos del plano.

Con la mediación semiótica de PI, en la que no nos detenemos en este artículo pero que mencionamos porque nos revela la necesidad de hacer ajustes al enunciado, Andrew avanza en la construcción de significado hacia identificar la notación ED como una forma de referirse a la distancia entre los puntos E y D o a la medida del segmento ED. Una vez aclarada la notación, Andrew decide tomar medidas, observa los números obtenidos y propone una nueva relación afirmando que DE es la mitad de BC. Detalles de la interacción correspondiente a esta mediación, así como de los avances de Andrew en la construcción de significado de la relación se encuentran en Perry, Camargo y Samper (2019). En particular, son notorios los esfuerzos de PI para que Andrew traspase la especificidad en la relación que propone, pues el estudiante se limita a considerar solo el caso que tiene representado en la pantalla. Esto nos lleva a advertir que el enunciado no aportó suficientes elementos para la mediación esperada y que se requiere un esfuerzo específico en la construcción de significado de lo que es una "relación geométrica", antes de pedir encontrarla, presuponiendo que los estudiantes ya le dan un sentido de generalidad al término "relación".

Los signos vehículos sv_3 y sv_4 no son interpretados por Andrew de manera autónoma, sino con la mediación semiótica de PI. Vistos en retrospectiva, los ítems (b, segunda parte) y (c) del enunciado no aportan elementos suficientes para mediar semiótica y productivamente la construcción discursiva del aspecto mencionado, pues no precisan convenientemente qué es lo que hay que hacer. Fue responsabilidad completa de PI mediar semióticamente en la construcción de significado de esta parte del enunciado. Gracias a la mediación semiótica de PI, Andrew y ella construyen entre ambos un relato que precisa qué se hizo y cuál fue el resultado encontrado para el caso del hecho geométrico que hemos llamado *Puntos medios en triángulo*.

El complejo camino seguido por PI y Andrew en su interacción para llegar a este relato quizá podría allanarse si el enunciado de la Tarea 1 se complementara con otros dos ítems (que llamaremos d y e).

> - (d) El hecho geométrico descubierto permite deducir algo, es decir, obtener algo como conclusión segura, a partir de una cierta condición que se debe tener inicialmente. Explica esto con varios ejemplos, indicando cuál es la condición inicial que se tiene dada y cuál la conclusión que se obtiene. (Si se pidiera un solo ejemplo, quizá eso predispondría para que la respuesta a la siguiente tarea se diera en términos particulares y causaría dificultades su uso en otras situaciones).
>
> -(e) Expresa el hecho geométrico descubierto usando el siguiente formato:
>
> "Si (se tiene …) entonces (con seguridad se cumple …)".

Tarea 2

Para comenzar a abordar la segunda tarea, Andrew lee la definición de perímetro de un triángulo. PI le pregunta si la conoce y él responde afirmativamente. Enseguida, Andrew lee el enunciado de la tarea (sv_5) y, tras unos segundos de silencio, responde: "Depende… Si F es punto medio de BC… **sí** es punto del segmento BC, si es punto medio" (énfasis agregado). Esta respuesta de Andrew, a partir de la cual podríamos pensar que el enunciado de la tarea cumple su función mediadora porque dirigió la atención del estudiante al punto medio del segmento BC (punto que efectivamente da lugar a la relación solicitada entre los perímetros), examinada con más cuidado nos permite ver que él no hace alusión alguna a la condición sobre los perímetros. Más bien, podría estar concentrado en la primera parte de la pregunta, "¿Existe un punto F en el segmento BC?", y lo que estaría diciendo es que el punto medio del segmento BC efectivamente es un punto de tal segmento. En ese sentido, esta parte del enunciado de la Tarea 2 no aporta suficientes elementos para mediar semióticamente la construcción discursiva del aspecto mencionado. Quizá, la pregunta incluida en sv_5, "¿Existe un punto en… tal que…?", podría haber quedado mejor planteada como "¿Algún punto del… es tal que…?" en términos de lo que se puede esperar como justificación de la respuesta. Como quedó formulada, tal como le sucedió a Andrew, los estudiantes pueden interpretar que se les está pidiendo que justifiquen si existe o no el punto. En cambio, en la pregunta que proponemos como alternativa, parece más claro que el foco de la justificación está en mostrar que el punto identificado cumple la condición. Pensar en las siguientes preguntas puede ayudar a entender el punto que sugerimos: ¿Por qué existe un punto que …? ¿Por qué algún punto (el que identificó) cumple con …? ¿Por qué dices que existe el punto que …?

Quizá entreviendo una interpretación inapropiada de sv_5 por parte de Andrew, PI lo "parafrasea" diciendo que él está haciendo la hipótesis de que el punto medio del segmento BC es el punto que busca. Como el estudiante está de acuerdo con el parafraseo hecho, PI lo anima a explorar esa hipótesis en GeoGebra. Él lleva a cabo entonces un experimento. Comienza por obtener una imagen gráfica de la situación que va a explorar, completando la representación hecha en la Tarea 1 (Figura 1), toma las medidas de los segmentos FD y FE y, puesto que no sabe cómo calcular en GeoGebra la suma de las medidas, PI le sugiere que con el arrastre obtenga segmentos de medidas enteras para facilitar el cálculo a mano. Para el caso considerado obtiene que el perímetro del ΔABC es 39,18 y el del ΔDEF es 19,60. Verbaliza el valor correspondiente a la mitad del primer número obtenido, 19,59, expresando cierta desilusión pues los valores obtenidos no están exactamente en la razón 2 a 1. Sin embargo, acepta las razones dadas por PI sobre la inexactitud de GeoGebra para reportar las medidas, considera verificada su hipótesis y regresa al enunciado de la tarea.

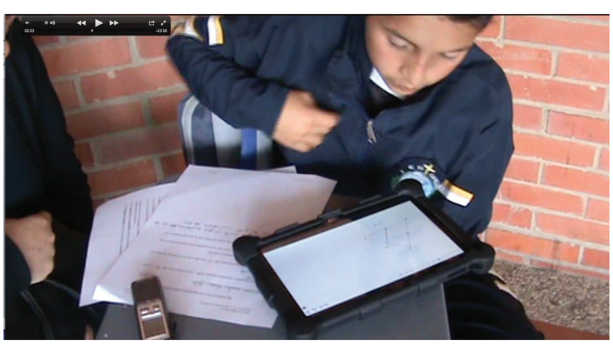

Figura 1. Imagen gráfica de la situación por explorar
Fuente: Archivo del proyecto

Al leer el sv_6, Andrew no sabe cómo proceder. No parece tener disponible un significado personal del término "justificar" y expresa no entender qué tiene que hacer. PI modifica oralmente el sv_6 de la siguiente forma, dirigiéndose a Andrew:

> - sv_6 (modificado): Explica por qué el perímetro del ΔDEF es la mitad del perímetro del ΔABC, sin usar medidas, solo con base en hechos geométricos ya conocidos… específicamente, el hecho geométrico que acabas de descubrir. ¿Cómo puedes justificar la relación entre esos perímetros? Decir algo como: "Ah, sí, tenía que ser así porque…". "El perímetro del más pequeño tiene que ser la mitad del perímetro del triángulo más grande porque…".

Este sv_6 (modificado) incluye varios elementos que ayudan a Andrew a entender el significado de "justificar". Uno, Andrew debe dar una razón (i. e., "explicar por qué…") y esta no puede basarse en algo empírico sino en algo teórico (i. e., "debes basarte en hechos geométricos ya conocidos"). Dos, se señala explícitamente cuál es el hecho geométrico que ha de usarse (i. e., "el hecho geométrico que acabas de descubrir"). Además, al proponer un tipo de frase como respuesta, PI le sugiere implícitamente la necesariedad (i. e., tenía que ser así, tiene que ser) de la conclusión que se pide justificar. Cabe anotar que con su manera de referirse a los triángulos en su última verbalización –descripción por su tamaño relativo– quizá pretende sugerir una manera rápida (que no exige la designación con letras) de aludir a los triángulos cuyos perímetros se están relacionando. La justificación que da Andrew, sin pensarla dos veces, es la condición de que los vértices del triángulo pequeño son los puntos medios de los lados del triángulo grande, por lo cual "el triángulo… va a estar en la mitad… del grande". Llegar a una justificación aceptable pasó por una mediación semiótica de PI que incluyó el volver a enunciar el hecho descubierto en la primera tarea y la sugerencia de usarlo para elaborar la justificación pedida. Gracias a esta mediación, la justificación que dio Andrew evolucionó en tres direcciones: pasó de ser una descripción a ser un argumento deductivo; la garantía que sustenta la conclusión pasó de ser un hecho en el mundo empírico a ser un hecho del mundo teórico y, por ende, la conclusión necesaria fue la prevista en la garantía empleada y no una inventada. (Detalles de esta mediación se encuentran en Perry et al., 2019).

Con el fin de eliminar ambigüedades en formulaciones como las de sv_6 e ir dando a los estudiantes claves sobre la acción de justificar en matemáticas, parece conveniente hacer la solicitud de justificar la respuesta de forma más explícita. Por ejemplo, si la respuesta de un estudiante fuera: “No sé si existe un punto como el descrito”, ¿qué podría significar en ese caso justificar la respuesta? Y si fuera: “Sí existe y es el punto medio del segmento BC”, y la justificación dada por el estudiante fuera: “Porque se cumple la condición de los perímetros”, ¿se tendrían buenas razones para decir que dicha justificación de la respuesta no es buena o aceptable? Quizá si la solicitud fuera: “Explica por qué con el punto que mencionas se cumple lo relativo a los perímetros”, se darían pistas más acertadas sobre lo que no sería aceptable como justificación, y de esa manera, se iría precisando el significado de justificar en el aula.

5. Discusión

Nuestro análisis de la mediación semiótica potencial y real del enunciado de las tareas nos lleva a considerar que algunas decisiones didácticas tomadas al formular los enunciados no fueron afortunadas para lograr la mediación semiótica de los enunciados de manera autónoma, por el estado de desarrollo de la participación de los estudiantes en el discurso geométrico. Esto llevó al investigador observador a mediar semióticamente.

Una de ellas tiene que ver con dar a los estudiantes por escrito y no oralmente los enunciados de las tareas que se les propusieron. Esta decisión tenía como principal intención impulsar su progreso en el lenguaje escrito del discurso, específicamente en el manejo de vocabulario y notación geométrica especializada, que “son necesarios para generar la comunicación matemática desde el inicio” (Sfard, 2008b, p. 62). La forma como se concretó esta decisión contribuyó a generar un desencuentro en la comunicación, que se evidenció cuando Andrew afirmó que “una relación sería que ambos son segmentos”. La mediación de PI le permitió ver a Andrew que la pregunta no era sobre segmentos sino sobre medidas y así, reencauzó su respuesta rápidamente. ¿Se habría podido evitar dicho desencuentro o se quería generar una situación para que el estudiante notara la diferencia entre las dos notaciones, la de segmento y la de medida de longitud? Nuestra respuesta es que había tantos otros detalles en los cuales enfocar más urgentemente la atención durante la mediación semiótica, que se habría podido evitar el desencuentro. Se habría podido usar la notación y entre paréntesis escribir la manera como ella se debe leer. Si esta estrategia se usa durante algún tiempo, tanto en los textos del profesor como en los de los estudiantes, más temprano que tarde ellos terminan viendo la utilidad de usar adecuadamente los símbolos convenidos y actuando en consecuencia. Otra decisión didáctica de especial cuidado que se entrevé en el enunciado de la primera tarea está relacionada con el uso de la palabra “cualquiera”. No hay duda de la importancia y necesidad de emplear los cuantificadores en el discurso matemático del aula. Sin embargo, no se puede perder de vista que precisamente por ser ellos términos del lenguaje cotidiano, requieren de precisiones hechas deliberadamente para que el estudiante pueda comenzar a usarlos de manera especializada.

En castellano, tal como lo precisa el Diccionario de la Real Academia Española, el término “cualquier/a” como adjetivo es indefinido y tiene tres acepciones: (1) Sinónimo de los adjetivos indefinidos *un* (expresa unidad) y *algún* (expresa que no se conoce aquello que denota el sustantivo al que modifica, o, usado en plural, una cantidad no relevante de entes designados por el sustantivo al que modifica); (2) expresa la totalidad del conjunto denotado por el nombre al que modifica, y se usa antepuesto a sustantivos contables en contextos genéricos; (3) expresa indeterminación cuando se usa pospuesto al sustantivo que modifica. A la luz de las precisiones hechas, podemos examinar el significado sugerido de las oraciones contenidas en la Tabla 2.

Tabla 2

Significado de algunas oraciones en las que se usa el término “cualquiera”

Represente gráficamente *cualquier* triángulo.	La referencia es a un solo triángulo, que bien podría tener condiciones especiales (e. g., un triángulo isósceles).
Al medir ese segmento obtendré *cualquier* número positivo.	El número positivo que es referencia no se conoce.
Cualquier triángulo equilátero es isósceles.	La referencia es a todos los triángulos equiláteros; el contexto muestra la genericidad de la idea.
Represente un triángulo *cualquiera*.	La referencia es a un triángulo que no tenga condiciones especiales.

Fuente: Elaboración propia.

Lo anterior pone de manifiesto que el uso del término en castellano está lejos de ser simple y depende en gran medida del contexto en el que se está hablando, condición esta que pone un problema especial cuando en el discurso matemático quien debe significar el término no necesariamente tiene claro el contexto en el que se sitúa lo dicho.

En el caso que nos ocupa, la manera de hacer referencia al objeto del que se habla –i. e., especificación– lleva naturalmente a enfocar la atención en un objeto particular. Solo cuando se establezca la correspondiente regla del nivel metadiscursivo, el estudiante entenderá que la solicitud es buscar una relación que se cumpla para todo triángulo. Una manera de empezar a construir la metarregla podría ser cambiar la instrucción "Representa **cualquier** triángulo [...] busca una relación especial entre DE y BC" por "Representa un triángulo ABC y busca una relación entre [...] que se cumpla en **todo** triángulo". Quizá así el estudiante, gracias a la mediación semiótica del enunciado, consideraría un triángulo sin condición alguna sobre sus lados y sus ángulos y quizá trascendería el nivel de lo específico y particular para pensar la relación, además de comenzar a dar significado a la idea de triángulo genérico.

Una tercera decisión tiene que ver con qué tanta guía y, sobre todo, qué tipo de guía, incluir en el enunciado de las tareas no rutinarias con miras a que los estudiantes, gracias a la mediación del enunciado, tengan la oportunidad de comenzar a pensar asuntos que posteriormente se retoman en la conversación del profesor con todo el grupo. En el caso que analizamos, es evidente que ambos enunciados fueron insuficientes para generar por sí solos la interpretación que logró Andrew con la mediación de PI. Con esto no queremos decir que la mediación del enunciado de una tarea pueda remplazar el efecto de la mediación semiótica del profesor; lo que sí creemos es que un enunciado demasiado abierto, para estudiantes que están apenas iniciándose en el discurso matemático, puede generar respuestas superficiales que se dan por salir del paso. Esa situación puede variar un poco si las instrucciones y preguntas que se les dan son más explícitas y tienen más guía, no para llevarlos a una respuesta predeterminada, sino para indicarles qué es lo que se les está pidiendo.

Teniendo en cuenta los análisis presentados para la Tarea 1, hemos formulado una nueva versión que consideramos que puede desempeñar un mejor papel como mediador semiótico:

> 1) Con GeoGebra, representa un $\Delta\mathrm{ABC}$ (triángulo ABC). Designa con D el punto medio del $\overline{\mathrm{AB}}$ (segmento AB) y con E el punto medio del $\overline{\mathrm{AC}}$ (segmento AC). Construye el $\overline{\mathrm{DE}}$ (segmento DE).
>
> 2) Busca una relación especial entre DE (medida de longitud del segmento DE) y BC (medida de longitud del segmento BC).

3) ¿Esa relación se cumple solo en el triángulo que representaste o se cumple en otros triángulos? ¿En algunos no se cumple?

4) Juan dice que en un triángulo no se cumple la relación porque DE (medida de longitud del segmento DE) es 6,02 y BC (medida de longitud del segmento BC) es 12,05. ¿Estás de acuerdo con Juan? Explica por qué.

5) Diana no está de acuerdo con Juan. Para explicar por qué no está de acuerdo con él, Diana usa el compás (o dobleces). ¿Cómo habrá usado ella el compás?

6) Designa con G el punto medio del $\overline{\mathrm{BC}}$ (segmento BC). Usando el compás físico o de GeoGebra, haz un experimento para mostrar que la relación entre las medidas de longitud de los segmentos EG y AC también se cumple para todos los triángulos.

7) En esta tarea has descubierto una propiedad importante. ¿Cuál?

8) Cuéntale por escrito al profesor de matemáticas de otro curso qué descubriste. Para ello no puedes usar figuras, es decir, en tu relato no puedes usar letras para designar aquello de lo que estás hablando; tienes que dar algún detalle que lo describa. Por ejemplo, en lugar de referirte al segmento AB podrías hablar de uno de los lados de un triángulo cualquiera.

9) El hecho geométrico descubierto te permite deducir algo (obtener algo como conclusión segura) a partir de una cierta condición que se debe tener inicialmente. Explica esto con varios ejemplos, explicitando cuál es la condición inicial que se tiene y cuál la conclusión que se obtiene.

10) Expresa el hecho geométrico descubierto usando el siguiente formato:
En un triángulo "si (se tiene ...) entonces (con seguridad se cumple ...)".

La tarea reformulada de esta forma pondría en discusión asuntos importantes en la construcción de significado del hecho geométrico, sobre los cuales los estudiantes pueden pensar y discutir, pero no necesariamente proponer. El éxito de la tarea no reside en que los estudiantes puedan resolverla perfectamente. Más bien está en la posibilidad de sacar a relucir sus significados personales sobre cuestiones que se discuten posteriormente con todo el grupo.

6. Conclusión

Con la presentación de este análisis, abrimos una línea de investigación que creemos que no ha sido explorada previamente: el potencial de mediación semiótica del enunciado de una tarea. Esperamos contribuir con ello a ampliar las miradas sobre el diseño de tareas para favorecer el aprendizaje en matemáticas.

La mediación semiótica de las tareas acompañada con la de PI permitieron a Andrew experimentar una rica actividad matemática. Al resolver la primera tarea, realizó: exploración empírica de una representación particular de la situación geométrica planteada, con miras a encontrar una relación especial; exploración empírica usando arrastre con medidas para averiguar si una cierta relación entre medidas se mantenía; enunciación del hecho geométrico descubierto. Al resolver la segunda tarea logró: una anticipación –una respuesta intuitiva– que inmediatamente expresó como una hipótesis relativa a un punto para el cual la condición de los perímetros se cumpliría; un experimento para verificar la hipótesis; el establecimiento de una conjetura; una justificación teórica de la conjetura, actividad toda esta muy cercana a la que Perry, Samper, Camargo y Molina (2013) denominan actividad demostrativa. No sobra decir que estas acciones no fueron realizadas en toda su dimensión como para poderlas considerar auténticas, no solo porque la participación de Andrew en cierta medida fue periférica, sino porque las acciones mismas no tuvieron el grado de desarrollo que sería deseable. Así que es necesario entenderlas como acciones de iniciación del estudiante en un aprendizaje de la actividad demostrativa.

En tareas no rutinarias para los estudiantes, como las analizadas, hay una considerable cantidad de elementos intrincados de los que depende la posibilidad de salir avante en su abordaje y desarrollo, sin que esto aluda necesariamente a la resolución ideal desde el punto de vista del profesor. Son tareas complejas para los estudiantes y para el profesor. No obstante, pueden propiciar el aprendizaje de las matemáticas, entendido, según la propuesta de Sfard (2008b), como la actividad de desarrollar un tipo especial de discurso, para lo cual es imprescindible una mediación semiótica consciente y persistente.

Referencias

Camargo, L., Perry, P., Samper, C., y Molina, Ó. (2015). Mediación semiótica en pro de la construcción de significado de *rayo* al hacer operativa su definición. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(3), 99-116. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1594

Camelo, M. (2010). Las consignas como enunciados orientadores de los procesos de escritura en el aula. *Enunciación, 15*(21), 58-67. https://doi.org/10.14483/22486798.3159

Contreras, Á., y García, M. (2011). Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(3), 277-310. Recuperado desde https://www.redalyc.org/pdf/335/33520716002.pdf

Godino, J., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355. Recuperado desde https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En A. Kelly, y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517-544). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Johnson, H., Coles, A., y Clarke, D. (2017). *Mathematical task and the student: Navigating "tensions of intentions" between designers, teachers, and students. ZDM, 49*(6), 813-822. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0894-0

Morgan, C., Tang, S., y Sfard, A. (2011). Grammatical structure and mathematical activity: Comparing examination questions. En C. Smith (Ed.), *Proceedings of the British Society into Learning Mathematics* (vol. 31, n.o 3, pp. 113-118). United Kingdom: Oxford University.

Özgeldi, M., y Esen, Y. (2010). Analysis of mathematical tasks in Turkish elementary school mathematics textbooks. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 2*(2), 2277-2281. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.322

Perry, P., Camargo, L., y Samper, C. (2019). *Puntos medios en triángulo:* un caso de construcción de significado personal y mediación semiótica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 22*(3), 309-332. https://doi.org/10.12802/relime.19.2233

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., y Molina, Ó. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper, y Ó. Molina (Eds.), *Geometría plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 11-34). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Revista Educación Matemática, 12*(1), 51-69. Recuperado desde http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol12/1/05Radford.pdf

Sáenz-Ludlow, A., y Kadunz, G. (2016). Constructing knowledge seen as a semiotic activity. En A. Sáenz-Ludlow, y G. Kadunz (Eds.), *Semiotics as a tool for learning mathematics. How to describe the construction, visualization, and communication of mathematical concepts* (pp. 1-21). Rotterdam: Sense Publishers.

Sáenz-Ludlow, A., y Zellweger, S. (2012, julio). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter- interpretation: A Peircean perspective. En *Pre-proceedings of the 12th International Congress of Mathematical Education (ICME12)*. Congreso llevado a cabo en Seúl, Corea.

Sfard, A. (2001). Equilibrar algo desequilibrado: los *Estándares del NCTM* a la luz de las teorías del aprendizaje de las matemáticas. *Revista EMA, 6*(2), 95-140. Recuperado desde http://funes.uniandes.edu.co/1125/1/73_Sfard2001Equilibrar_RevEMA.pdf

Sfard, A. (2008a). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourse, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511499944

Sfard, A. (2008b). Aprender matemáticas como la acción de desarrollar un discurso. En A. Sfard, *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional* (pp. 39-63). Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Sullivan, P., Clarke, D., y Clarke, B. (2009). Converting mathematics tasks to learning opportunities: An important aspect of knowledge for mathematics teaching. *Mathematics Education Research Journal, 21*(1), 85-105. https://doi.org/10.1007/BF03217539