SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.22

CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS DE LAS OPERACIONES DEL ESPACIO VECTORIAL A TRAVÉS DE CONJUNTOS LINEALMENTE INDEPENDIENTES/DEPENDIENTES

CONSTRUCTION OF MEANINGS OF VECTOR SPACE OPERATIONS THROUGH LINEAR INDEPENDENT/DEPENDENT SETS

Marcela Parraguez, marcela.parraguez@pucv.cl
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

RESUMEN

La investigación tiene como objetivo mostrar evidencias, con sustento teórico, sobre la construcción de significados de las operaciones suma y multiplicación por escalar que definen a un espacio vectorial, a través de conjuntos linealmente independientes/dependientes. El marco teórico utilizado es la teoría APOE (acrónimo de acción, proceso, objeto y esquema), situada en el desarrollo de las operaciones del espacio vectorial a través de dos indicadores de construcción insertos en los conjuntos linealmente independientes/dependientes: el cero vector y la combinación lineal. Las tres componentes del ciclo de investigación de APOE –análisis teórico, diseño y aplicación de instrumentos, y análisis y verificación de datos– determinan la estructura general del estudio. Los resultados obtenidos a través del trabajo de conjuntos linealmente independientes/dependientes indican que el significado de las operaciones del espacio vectorial está vinculado a acciones sobre el objeto concreto del cero vector y los procesos que se derivan de esas acciones son encapsulados en objetos abstractos del álgebra lineal.

PALABRAS CLAVE:
Conjuntos linealmente independientes/dependientes; teoría APOE; operaciones del espacio vectorial.

ABSTRACT

The research aims to show evidence with theoretical support of the construction of meanings of the operations sum and multiplication by scalar, which define a vector space through linearly independent/dependent sets. The theoretical framework used is the APOS Theory (acronym of action, process, object and scheme), located in the development of vector space operations through two indicators of the construction, inserted in the linearly independent/dependent sets: the zero vector and the linear combination. The three components of the APOS research cycle –theoretical analysis, instrument design and application, and data analysis and verification– determine the overall structure of the study. The results obtained through the work of linearly independent/dependent sets indicate that the meaning of the operations of the vector space is linked to actions on the specific object of the zero vector and the processes that derive from those actions are encapsulated in abstract objects of linear algebra.

KEYWORDS:
Linearly independent/dependent sets; APOS theory; vector space operations.

Recibido: 28 de febrero de 2020, Aceptado: 19 de mayo de 2020

1. Introducción

La enseñanza de los conceptos básicos del álgebra lineal: espacio vectorial, combinación lineal, conjunto generador, conjunto linealmente independiente (li)/ dependiente (ld), base, transformaciones lineales, valores y vectores propios, son temas que se encuentran presentes en la mayoría de los programas de matemáticas para carreras como Ingeniería, Licenciatura en Ciencias o Economía, y lo que acá se propone es analizar cómo uno de ellos –el concepto de conjunto li/ld– tributa a dar significado a las operaciones suma y producto por escalar del espacio vectorial.

Existen numerosas investigaciones que ofrecen evidencias sobre las dificultades que muestran los estudiantes para comprender y aprender diferentes conceptos de álgebra lineal, en tópicos como transformación lineal (Roa-Fuentes y Parraguez, 2017), coordenadas de vectores (Parraguez, Lezama y Jiménez, 2016), base de un espacio vectorial (Arnon et al., 2014), combinación lineal (Parraguez y Uzuriaga, 2014), espacios vectoriales sobre cuerpos finitos (Weller et al., 2002), espacios vectoriales sobre un cuerpo (Parraguez y Oktaç, 2010), entre otros. Investigadores franceses (Dorier, 1995) nos hablan del obstáculo del formalismo. Dicho obstáculo se manifiesta en los estudiantes que manipulan los objetos del álgebra lineal mecánicamente. Estos autores concluyen que, para la mayoría de los estudiantes, el álgebra lineal es solo un catálogo de nociones muy abstractas que ellos no manejan. Aunado a la anterior, se suma que, en la mayoría de las universidades, los cursos de Álgebra Lineal no son exitosos (Harel, 1989; Sierpinska, 2000).

Específicamente, para los conceptos de vectores li y de conjunto de vectores ld, en las investigaciones realizadas con una diversidad de marcos teóricos (Chargoy, 2006; Kú, Trigueros y Oktaç, 2008; Oropeza y Lezama, 2007; Saldanha, 1995), se logra poner en evidencia que incluso los estudiantes exitosos en los cursos de Álgebra Lineal no logran la comprensión del concepto. En relación con el concepto de espacio vectorial Parraguez (2013), Parraguez y Oktaç (2010), Rodríguez, Parraguez y Trigueros (2018), muestran que la construcción del concepto espacio vectorial se logra mediante la coordinación de las operaciones suma y multiplicación por escalar. Por otro lado, Parraguez y Bozt (2012), ponen en evidencia, a través de la teoría de los Modos de Pensar (Sierpinska, 2000), que la comprensión de los conjuntos li/ld se logra en un trabajo articulado de combinación lineal y sistemas de ecuaciones lineales.

Dado el escenario de resultados que las investigaciones mencionadas anteriormente nos muestran en relación con las dificultades intrínsecas que los tópicos de álgebra lineal, y particularmente las que los conceptos li/ld y espacio vectorial generan en un aprendiz, se hace necesario seguir indagando en estas temáticas. Y es en beneficio de los futuros profesionales el preguntarse: ¿Cómo contribuye el trabajo con conjuntos de vectores li/ld en la construcción del significado de las operaciones suma y multiplicación por escalar del espacio vectorial?

Con la respuesta a la pregunta anterior, la principal contribución de este artículo, en el campo de la Matemática Educativa de pregrado, es mostrar cómo estudiantes de Álgebra Lineal entienden y le dan significado a las operaciones que definen al espacio vectorial, cuando trabajan con conjuntos li/ ld en espacios vectoriales con unas operaciones bien particulares.

2. Objetivo de la investigación

Con la finalidad de alcanzar una respuesta a la pregunta que guía la investigación, el objetivo de la presente radica en describir las estructuras matemáticas que los aprendices ponen en juego para la construcción o reconstrucción de significados de las operaciones suma y multiplicación por escalar del espacio vectorial.

Antes de exponer el marco teórico, vamos a presentar un análisis teórico de la estructura de espacio vectorial, a través de las operaciones suma y multiplicación por escalar, el cual será la base para la interpretación del significado de las operaciones de un espacio vectorial.

3. Análisis teórico de la estructura espacio vectorial

Los diferentes tipos de estructuras algebraicas están sujetos a la naturaleza de las propiedades que se cumplen para la o las operaciones en un conjunto dado. Así, un espacio vectorial V sobre un cuerpo K es una estructura algebraica donde se definen dos operaciones –suma y multiplicación por escalar– que, a diferencia del anillo y del cuerpo, una de esas operaciones –multiplicación por escalar– relaciona elementos de dos conjuntos, V y K, para operarlos (Figura 1).

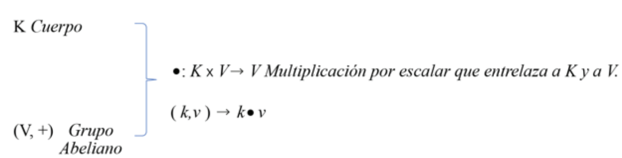

Figura 1. Operación entre los elementos de V y K.
Fuente: Elaboración propia.

La mayoría de los libros de textos de Álgebra Lineal se adhiere a una definición de espacio vectorial, como la de la Figura 2, en la cual no se hace explícita la definición de las operaciones suma y multiplicación por escalar como función.

Definición Sea V un conjunto sobre el cual se definen dos operaciones, llamadas *suma* y *multiplicación por un escalar*. Si **u** y **v** están en V, la *suma* de **u** y **v** se denota mediante **u** + **v**, y si c es un escalar, el *múltiplo escalar* de **u** por c se denota mediante c**u**. Si los siguientes axiomas se cumplen para todos **u**, **v** y **w** en V y para todos los escalares c y d, entonces V se llama ***espacio vectorial*** y sus elementos se llaman ***vectores***.

1. **u** + **v** está en V. — Cerradura bajo la suma
2. **u** + **v** = **v** + **u** — Conmutatividad
3. (**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**) — Asociatividad
4. Existe un elemento **0** en V, llamado ***vector cero***, tal que **u** + **0** = **u**.
5. Para cada **u** en V, existe un elemento −**u** en V tal que **u** + (−**u**) = **0**.
6. c**u** está en V.
7. c(**u** + **v**) = c**u** + c**v** — Cerradura bajo multiplicación escalar
8. $(c + d)$**u** = c**u** + d**u** — Distributividad
9. $c(d$**u**$)$ = (cd)**u** — Distributividad
10. 1**u** = **u**

Figura 2. Definición de espacio vectorial.

Fuente: Poole (2011, p. 447).

Con base en la definición de la Figura 2, para determinar un espacio vectorial se consideran dos conjuntos no vacíos: V (cuyos elementos son vectores) y K, un Cuerpo o Campo que también está dotado de otras dos operaciones, esto es K (+, ·). Las dos operaciones que definen a V, las haremos explícitas para su análisis. *La suma de vectores* será descrita mediante la función +: V×V → V, anotada por *(x, y)* → *(x+y)* y que satisface los cinco primeros axiomas de la Figura 2 , y la *multiplicación por escalar* será descrita como una función fija •: K×V → V, anotada por (α, x)→ α•x y que también satisface los otros cinco axiomas de la Figura 2 –pero axiomas diferentes a los de la operación anterior–.

Mirando con más detalle la definición de la Figura 2, ella nos muestra que un espacio vectorial sobre un cuerpo K es una estructura algebraica provista de dos operaciones (una suma de vectores y una multiplicación por escalar), las cuales entrelazan a K y a V a través de los axiomas (Figura 3) que son requeridos para transformar a [K(+, ·), (V, +),•] en un todo único, estructuralmente hablando.

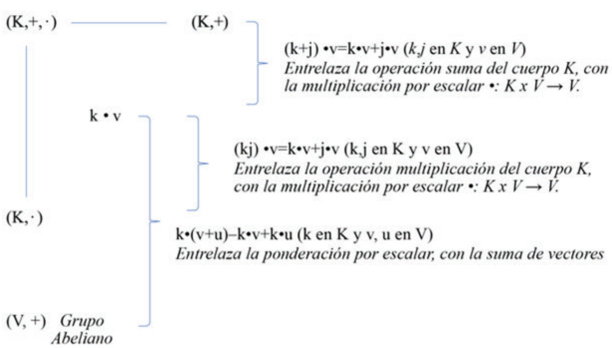

Figura 3. Necesidad de axiomas para entrelazar a [K, (V, +)] y [K, (V, •)].

Fuente: Elaboración propia.

Detenerse a realizar esta reflexión permite mirar la estructura de [K(+, ·), (V, +), •] como un todo integrado, donde la necesidad de algunas propiedades axiomáticas contribuye a un entrelazamiento algebraico entre las operaciones que participan en la definición de espacio vectorial. Otros axiomas, sin embargo, obedecen a otra naturaleza, como, por ejemplo: *Existe un elemento* $1 \in K$ *tal que, para todo v en V*, 1•v=v *(identidad escalar)*, es parte del requerimiento para que el grupo K-{0} realice una acción[1] sobre el conjunto V.

En la teoría de los espacios vectoriales existe un concepto importante que pone de relieve las operaciones del espacio vectorial; ese concepto es el de combinación lineal de vectores, y en el contexto de esta investigación lo acotaremos a conjuntos li/ld.

Consideremos un conjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$

(V espacio vectorial sobre K), entonces cuando la ecuación vectorial:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \vec{0} \ (\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_1 \in K)$$

tiene al menos la solución trivial:

$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ y esta es la única solución, entonces se dice que *S* es un *conjunto li.* Si hay otras soluciones (además de la trivial) entonces *S* es un *conjunto ld*.

Para poner a prueba las definiciones anteriores, nos situaremos en el espacio vectorial de las funciones continuas $C([0,1], \mathbb{R})$ consideraremos f y g dos vectores de $C([0,1], \mathbb{R})$ con la suma y multiplicación por escalar usuales para las funciones, definidos por $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{2x}$

Entonces, ¿ f y g son li o ld?

Para responder, formamos la ecuación vectorial: $\alpha e^x + \beta e^{2x} = 0 (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, la cual es válida para todo $x \in [0,1]$, en particular, para:

$$x = 0: \qquad \alpha + \beta = 0$$

$$x = 1: \qquad \alpha e + \beta e^2 = 0$$

De donde el determinante asociado al sistema de ecuaciones homogéneo $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha e + \beta e^2 = 0 \end{cases}$

[1] *Una* ***acción*** *de un grupo* $(G,*)$ *sobre un conjunto X es una aplicación* $\phi : G \times X \to X$ *que cumple:*

a) $\forall x \in X, \phi(e,x) = x$ *donde* e *es el elemento neutro del grupo.*

b) $\forall x \in X; \forall g,h \in G, \phi(g * h, x) = \phi(g, \phi(h,x))$

es $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e & e^2 \end{vmatrix} = e^2 - e = e(e-1) \neq 0$

por ende la solución del sistema es única $\alpha = \beta = 0$ y trivial.

Luego los vectores f y g son li.

Puestos en escena la definición de espacio vectorial y la de conjuntos li/ld, nuestra interrogante de investigación se enfoca en la construcción del significado de las operaciones suma y multiplicación por escalar del espacio vectorial, a través de conjuntos li/ld.

Para dar respuesta a dicha pregunta, se va a situar la investigación en el escenario de la construcción mental de conjuntos li/ld, poniendo de relieve las operaciones suma y multiplicación por escalar de un espacio vectorial.

4. Teoría

4.1. Acción, proceso, objeto, esquema

La teoría APOE, a través de su operacionalización en investigaciones de diversos tópicos (álgebra lineal, álgebra abstracta, cálculo, probabilidades, etc.), ha demostrado ser un marco teórico cognitivo-constructivista bastante exitoso para mostrar la construcción de conceptos en los estudiantes (Arnon et al., 2014).

El marco teórico APOE está compuesto de cuatro construcciones mentales: *acciones, procesos y objetos*, que luego se organizan en *esquemas* (Asiala et al., 1996; Dubinsky y McDonald, 2002), de ahí el acrónimo APOE. En el contexto del álgebra lineal, por ejemplo, una construcción de *acción* de *n-upla* podría darse al "tomar una cantidad específica de números y colocarlos en un orden particular" (Arnon et al., 2014, p. 20). Otro ejemplo: un estudiante muestra una construcción *acción* de *suma* de vectores si al considerar 2 vectores explícitamente del espacio vectorial, se realiza la adición y se verifica que el resultado es un elemento de dicho espacio.

La construcción mental *proceso* se puede evidenciar en un estudiante, cuando él puede "imaginar en su mente un procedimiento, sin tener que hacer necesariamente todos sus pasos explícitamente, y por lo tanto puede pensar en revertirlo y coordinarlo con otros *procesos*" (Dubinsky y McDonald, 2002, p. 3). En otras palabras, un *proceso* es una *acción interiorizada*. La interiorización es un mecanismo mental que "le permite al estudiante ser consciente de una acción, reflexionar sobre ella y combinarla con otras *acciones*" (Dubinsky, 1991, p. 107). Por ejemplo, una construcción *proceso* de *axioma* se muestra cuando un estudiante es capaz de explicar cómo cada axioma se verifica (sin tener la necesidad de realizar cálculos) para que un conjunto dado con operación suma y multiplicación por escalar sea un espacio vectorial.

Finalmente, el mecanismo de *encapsulación* logra una construcción mental *objeto*, es decir, la realización de "una estructura dinámica de *proceso*, a una estructura estática a la que se pueden aplicar las *acciones*" (Arnon et al., 2014, p. 21). En este sentido, la encapsulación es un mecanismo mental a través del cual un *proceso* (una operación o *acción interiorizada*) se transforma en un ente conceptual con derecho propio (un objeto). En el contexto del álgebra lineal, y de acuerdo al objetivo propuesto en esta investigación, con la construcción *objeto* se espera evidenciar que un estudiante sea consciente de los muchos *procesos* y transformaciones asociadas a los conjuntos li/ld, para dar significados a las operaciones del espacio vectorial. Por ejemplo, una construcción *objeto* de *combinación lineal* se evidencia cuando un estudiante determina si dos conjuntos de vectores diferentes forman dos subespacios vectoriales equivalentes.

4.2. Una descomposición genética para las operaciones suma y multiplicación por escalar de un espacio vectorial

Una descomposición genética (DG) es un modelo cognitivo que describe las construcciones y los mecanismos mentales (junto con las relaciones entre estos componentes) que desarrolla un estudiante para construir un concepto. Una DG propone hipotéticamente una descripción de las *acciones* en los *objetos* mentales existentes, los medios por los cuales estas *acciones* son interiorizadas como *procesos* mentales y también por los cuales estos *procesos* se encapsulan en *objetos* mentales (Arnon et al., 2014), cuando se considera el concepto de las operaciones suma y multiplicación por escalar de un espacio vectorial, que es el foco del presente escrito.

En la Tabla 1 se presenta, basándose en el análisis teórico de la estructura espacio vectorial, una DG del esquema de las operaciones de un espacio vectorial a [K(+, ·), (V, +,),•], utilizando como indicadores los conjuntos li/ld y el vector cero de V.

Construcción mental	Indicadores de la construcción mental
Acción	• La *acción* de escribir la combinación lineal igual al cero vector, para espacios vectoriales con operaciones usuales. • La *acción* de resolver el sistema homogéneo de ecuaciones $AX = 0$

Proceso	• La *acción* de escribir la combinación lineal igual al cero vector para espacios vectoriales con operaciones no usuales. • Repetir (y reflexionar sobre) las *acciones* de resolver el sistema homogéneo de espacios vectoriales con operaciones no usuales. • Repetir (y reflexionar sobre) el efecto de la *acción* total de variar el sistema de ecuaciones lineales a uno no homogéneo, $AX=b$, con $b\neq 0$ • Interiorización de que "b" del sistema $AX=b$, se relaciona con el vector nulo del espacio vectorial.
Proceso →Objeto	• Encapsulación del *proceso* resolver el sistema homogéneo de espacios vectoriales con operaciones no usuales en el *objeto* conjuntos li/ld de vectores. • Coordinación de los *procesos* combinación lineal igual que el cero vector para espacios vectoriales con operaciones no usuales y resolución del sistema, $AX=b$ con $b\neq 0$ • La *acción* de construir una combinación igual al cero vector para operaciones no usuales en el *objeto* conjuntos li/ld de vectores.
Objeto→Esquema	• Capacidad de dar significados a las operaciones del espacio vectorial, para que los axiomas que lo definen sean los coordinadores de los *procesos* de la suma y multiplicación por escalar. • Capacidad para articular la naturaleza del vector nulo con el elemento neutro del grupo abeliano (V, +) inserto en el espacio vectorial (V, +, •).

5. Método

Desde el paradigma cualitativo, la metodología será de carácter explicativo e interpretativo; a su vez se ha escogido el estudio de caso (Stake, 2010) como método para alcanzar el objetivo propuesto, porque permite una indagación en profundidad de una realidad específica y en un periodo de tiempo.

Los criterios seguidos para la conformación de los dos casos fueron: (a) Ser estudiante de primer año de universidad; (b) Haber sido estudiante de un curso de Álgebra Lineal y (c) Accesibilidad de los investigadores. Los casos quedaron constituidos tal como se presenta en la Tabla 2.

Tabla 2

Participantes y casos de estudio

Fuente: Elaboración propia.

Casos	Participantes	Nivel	Características	Identificación
Caso I	4 estudiantes de Ingeniería	Universitario	Ha aprobado la asignatura de Álgebra Lineal y se ha eximido de dar examen.	E1, E2, E3, E4.
Caso II	4 estudiantes de Pedagogía en Matemáticas	Universitario	Ha aprobado la asignatura de Álgebra Lineal.	E5, E6, E7, E8.

5.1. Recogida de datos

En esta indagación se utilizó como instrumento de recogida de datos un cuestionario escrito, constituido por dos actividades que se describen en la Tabla 3.

Tabla 3

Actividades del cuestionario

Fuente: Elaboración propia.

Actividad	Preguntas
A1	Sea $C([0,1],\ \mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas y si consideramos f y g dos vectores de $C([0,1],\ \mathbb{R})$ definidos por $f(x)=e^x$ y $g(x)=e^{2x}$ ¿ f y g son li o ld?
A2	Sea $V=\{(a,b):a,b\in\mathbb{R}^+\}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, con las operaciones: **Suma de vectores:** $(a,b)+(c,d)=(ac,bd)$; $(a,b),(c,d)\in V$ **Multiplicación por escalar:** $k(a,b)=(a^k,b^k)$; $k\in\mathbb{R}$ y $(a,b)\in V$ Estudiar la dependencia lineal de los subconjuntos de V dados por: (i) S1={(2,1),(3,2)} (ii) S2={(1,1),(2,1)}

Las dos actividades diseñadas permiten a los estudiantes situarse en las construcciones descritas en la Tabla 1 para las operaciones de un espacio vectorial –Acción, Proceso, Proceso→Objeto, Objeto→ Esquema–, para dar respuestas a las actividades que se plantean.

6. Evidencias

Entre otras respuestas, esperamos de los estudiantes lo que sigue: (a) que utilicen como estrategias en sus respuestas los diferentes indicadores que se describen en la Tabla 1 para las construcciones mentales, (b) que utilicen el concepto de cero vector y combinación lineal para determinar si los conjuntos dados son li/ld, y (c) que determinen, a través de la solución de sistemas de ecuaciones lineales, si los conjuntos dados son li/ld.

Con la finalidad de mostrar un trabajo representativo de lo realizado por los estudiantes de los casos de estudio, es que hemos seleccionado algunos episodios de sus argumentos observables en las dos actividades.

6.1. Primera actividad

La pregunta que se plantea en la actividad A1 se puede responder mostrando que la combinación lineal de las funciones es igual a cero. Sin embargo, como veremos más adelante, bajo esta pregunta es posible apreciar tipos de respuestas factibles de ser clasificadas de acuerdo con las construcciones mentales que suponen: *acción en vías de alcanzar un proceso* y un *proceso encapsulado en un objeto*, todos ellos con relación a la posibilidad de caracterizar, a través de un sistema de ecuaciones, a un conjunto de vectores li. Consideramos que el estado de construcción mental *acción* en vías de alcanzar *proceso* puede evidenciarse cuando el estudiante sabe que, para analizar la dependencia lineal de un conjunto, se debe determinar un sistema de ecuaciones lineales, pero muchas veces en este estado de construcción los estudiantes no logran plantear una adecuada combinación lineal y su justificación se reduce a procedimientos algebraicos. Un ejemplo de este tipo de estructura de construcción mental se puede ver en la resolución de E2, quien procede de una manera mecánica –de acuerdo con un algoritmo previamente construido–, que describe como un criterio: *si el determinante es cero: es ld, y si es distinto de cero: es li.* E2 calcula el determinante y obtiene una expresión no nula, concluye así que el conjunto es li, como se muestra en la Figura 4.

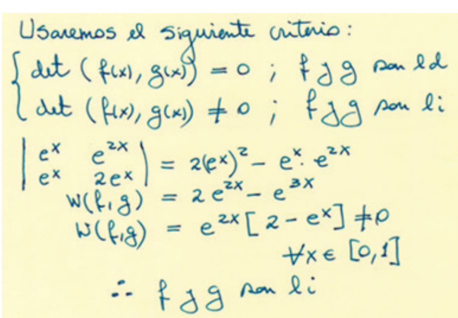

Figura 4. E2 muestra una estructura de construcción mental acción en vías de llegar a ser proceso para caracterizar un determinante asociado a un conjunto de vectores li.
Fuente: Datos de la investigación.

Otro tipo de respuesta a la actividad A1 da cuenta de la estructura mental proceso para el mismo concepto anterior. Para analizar la dependencia lineal de un conjunto, E6 recurre a la definición *un conjunto finito de vectores es ld si existen escalares que permiten que el vector nulo sea combinación lineal de los vectores del conjunto, de tal manera que al menos uno de los escalares sea no nulo*, entonces E6 se plantea primeramente una ecuación y luego el sistema de ecuaciones asociado. En esta situación, en general los estudiantes tienden a resolver el sistema escalonando la matriz o bien utilizando otros métodos de resolución de sistemas. Esta técnica, si bien resulta efectiva, muchas veces es engorrosa de seguir y termina convirtiéndose en una herramienta muy compleja para llegar a una conclusión. Esto fue lo que le sucedió a E6, pero no tuvo éxito al momento de aclarar la relación entre los escalares de la combinación lineal, entonces abandonó el procedimiento a medio camino, indicando (ver Figura 5) que para resolver el sistema hay que darle valores a un parámetro. Interpretamos esta manera de proceder como una estructura de construcción mental *proceso*, pues aunque se tiene conocimiento de la propiedad y esta se pone en ejecución de manera operativa, no se logra una reconstrucción funcional y práctica de las transformaciones necesarias para dar una respuesta a A1, es decir, la elección de la estrategia no es la más pertinente en función del tipo de problema y, por lo tanto, E6 no alcanza la estructura de construcción *objeto*, como se muestra en la Figura 5.

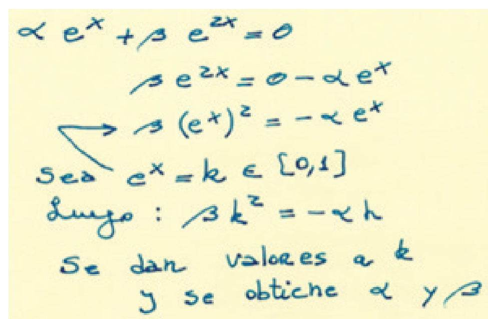

Figura 5. E6 muestra una estructura de construcción mental proceso para caracterizar el sistema de ecuaciones lineales asociado a un conjunto de vectores ld.
Fuente: Datos de la investigación.

Además de las estructuras de construcción mental antes mencionadas, se evidenció que, si el estudiante lograba expresar y caracterizar el sistema de ecuaciones asociado a la combinación lineal de un conjunto de vectores li de manera relativamente inmediata, entonces había encapsulado el *proceso* en el *objeto* para el concepto conjunto de vectores li. Para ilustrar esto, se utilizará la respuesta de E5, quien expresa la combinación lineal de las funciones y las iguala a cero y, dando valores a los escalares, determina si son li/ld. Luego señala que f y g son li, como se puede observar en la Figura 6.

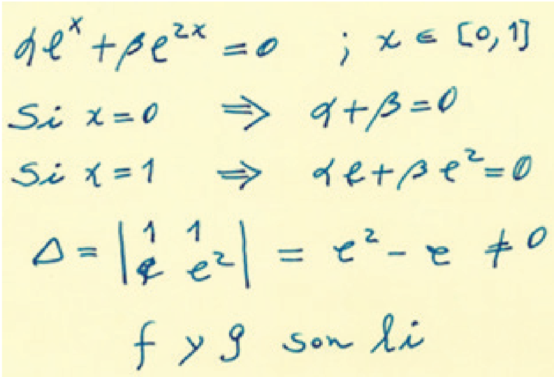

Figura 6. E5 muestra una estructura de construcción mental objeto para el concepto conjunto de vectores li.
Fuente: Datos de la investigación.

6.2. Segunda actividad

Para abordar el concepto de los conjuntos li/ld, los estudiantes también evidenciaron que se debe volver sobre algunos conceptos –como conocimiento previo–, como el de combinación lineal entre vectores de un conjunto y el de sistemas de ecuaciones lineales. El *proceso* expresar un vector cualquiera como combinación lineal de los vectores de un conjunto, se debe coordinar con el *proceso* determinar el vector nulo del espacio vectorial, para dar paso a la estructura de construcción mental *proceso* de expresar el vector nulo como combinación lineal de los vectores de un conjunto. La situación de la actividad A2 fue diseñada con el propósito de visualizar esta coordinación. En esta actividad se inquiere sobre la capacidad del estudiante para analizar si los subconjuntos de vectores de un espacio vectorial son li/ld, donde la suma está definida como producto y la multiplicación por escalar, como una operación potencia.

El estudiante E1, por ejemplo, considera el conjunto S1 y plantea una igualdad a partir de la suma de los vectores del conjunto y la iguala al vector nulo. El problema es que no repara en el hecho de que el vector nulo bajo esta operación suma es (1,1) y no (0,0). Al hacer la operatoria E1 obtiene una afirmación contradictoria, pues las potencias resultan igual a cero, como se muestra en la Figura 7. Lo mismo ocurre para el otro conjunto. Lo anterior es evidencia de que E1 tiene dificultades para alcanzar la construcción mental *proceso* de determinar el vector nulo del espacio vectorial V, que fue definido específicamente con operaciones suma y multiplicación por un escalar no usual. Al no contar con esta estructura cognitiva, E1 tampoco puede evidenciar el mecanismo de coordinación, de modo que abruptamente sus cálculos lo llevan a decir que el sistema de ecuaciones no tiene solución y no logra concluir si el conjunto S1 es li/ld. Específicamente en la Figura 7 es posible apreciar la ausencia de la estructura de construcción mental proceso para el concepto neutro aditivo del grupo abeliano (V,+) del espacio vectorial V, mediante el desarrollo de la actividad A2 del cuestionario.

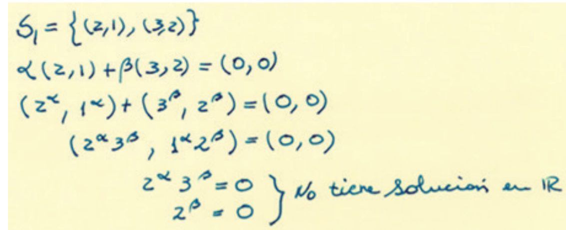

Figura 7. E1 muestra una estructura de construcción mental acción, la cual no logra interiorizarse en un proceso para determinar el vector nulo del espacio vectorial.
Fuente: Datos de la investigación.

La actividad A2 es omitida por E8, y E2 vuelve a basar su respuesta en el concepto de determinante –argumento utilizado en la actividad A1–, sin embargo, a diferencia de A1, en A2 dispone los vectores de S1 en filas y procede a calcular el determinante, cuyo resultado lo categoriza en vectores li, según un criterio mecanicista que E2 escribe en la Figura 8. Esto último es evidencia de lo que Dorier (1995) llamó "obstáculo del formalismo".

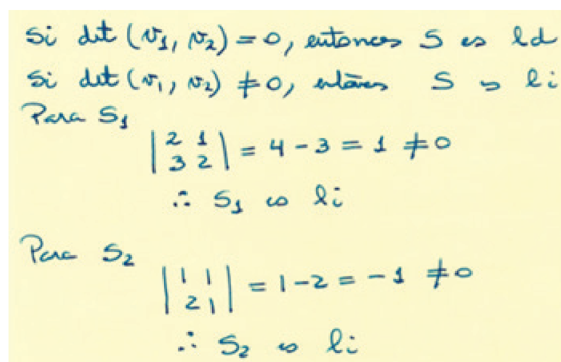

Figura 8. E2 muestra (nuevamente) una estructura de construcción mental acción en vías de llegar a ser proceso para caracterizar un determinante asociado a un conjunto de vectores li.
Fuente: Datos de la investigación.

El estudiante E4 no logra determinar adecuadamente el neutro aditivo para la operación suma definida en el espacio V, pero cuatro de los ocho estudiantes alcanzan la estructura *proceso* para determinar el vector nulo del espacio vectorial. Una muestra de esto último se puede apreciar en E3, quien primero plantea la combinación lineal pensando que el vector nulo es (0,0), pero luego reflexiona y decide determinar explícitamente el vector neutro aditivo del espacio vectorial, como se puede apreciar en la Figura 9.

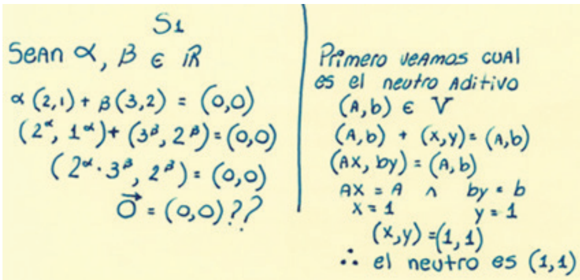

Figura 9. E3 muestra una estructura de construcción mental proceso para determinar el vector nulo del espacio vectorial V.
Fuente: Datos de la investigación.

De los seis estudiantes que sí reconocen adecuadamente que el vector neutro aditivo o nulo en el espacio vectorial V es (1,1) –y no (0,0)–, solo tres plantean a dicho vector nulo como combinación lineal de los vectores del conjunto para realizar un análisis de los escalares, es decir, han alcanzado el mecanismo de coordinación entre los *procesos* asociados a tales conceptos, como se puede evidenciar en los argumentos observables de E7, en la Figura 10.

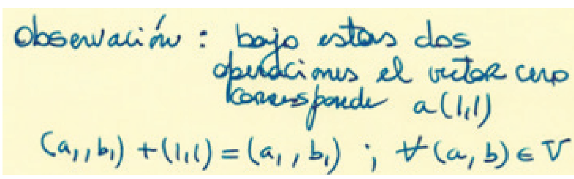

Figura 10. E7 muestra una coordinación entre las estructuras de construcción mental proceso expresar un vector cualquiera como combinación lineal de los vectores de un conjunto y determinar el vector nulo del espacio vectorial.
Fuente: Datos de la investigación.

El mecanismo de coordinación entre los *procesos* vector nulo y neutro aditivo de (V,+) tiene lugar en la medida en que el estudiante plantea directamente la combinación lineal de vectores de los conjuntos S1 o S2 y la iguala al vector nulo, que en este caso es el vector (1,1) –cuando se interpretan adecuadamente las definiciones de las operaciones involucradas en V–. El resultado de dicha coordinación es el *proceso* expresar el vector nulo como combinación lineal de los vectores de un conjunto, el cual a su vez se coordina con el *proceso* sistema de ecuaciones lineales, cuyo producto de esta coordinación es el *proceso* seleccionar la combinación lineal en que la solución del sistema es única y trivial. Un ejemplo de este encadenamiento de *procesos* lo evidencia E7, quien, con base en la expresión del vector nulo como combinación lineal de los vectores del conjunto S1, construye un sistema de ecuaciones. De este sistema, E7 infiere que ambos escalares son nulos, lo cual le permite concluir que los vectores de S1 son li, como se puede apreciar en la Figura 11.

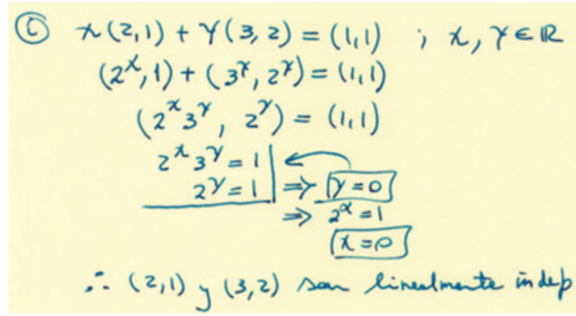

Figura 11. E7 muestra una coordinación entre las estructuras de construcción mental proceso expresar el vector nulo como combinación lineal de los vectores de un conjunto y sistema de ecuaciones lineales para el logro del proceso seleccionar la combinación lineal en que la solución del sistema es única y trivial.
Fuente: Datos de la investigación.

El *proceso* seleccionar la combinación lineal en que la solución del sistema es única y trivial se puede encapsular en el conjunto de vectores li como *objeto*. La encapsulación se evidencia en la medida en que el estudiante reconoce la independencia lineal descartando la dependencia lineal, o bien por simple inspección de las características de los vectores con respecto a la especificidad de las operaciones definidas para el espacio vectorial V.

El estudiante E7 muestra como resultado de la resolución de las actividades A1 y A2 una construcción mental *objeto* en relación con el procedimiento seleccionar la combinación lineal en que la solución del sistema es única y trivial. Esto último se sustentó también en el argumento que E7 utilizó para analizar la dependencia lineal del otro conjunto S2, en el cual E7 se basa en que *el vector nulo es un elemento de* S_2, como se puede observar en la Figura 12.

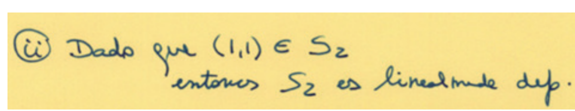

Figura 12. E7 muestra una estructura de construcción mental objeto para el concepto conjunto de vectores li.
Fuente: Datos de la investigación.

7. Discusión y conclusiones

El propósito de este estudio de investigación fue mostrar evidencias, con sustento teórico, de cómo contribuye el trabajo en dos actividades con conjuntos li/ld, en la construcción del significado de las operaciones suma y multiplicación por escalar del espacio vectorial. Al alero de la teoría APOE, el análisis de las dos actividades, aplicadas a los dos casos de estudio, mostró que los estudiantes evocan una diversidad de razonamientos observables a través de sus argumentos en A1 y A2, que correspondían principalmente a concepciones *proceso* y *objeto* en el modelo APOE. Sin embargo, durante el desarrollo de las actividades, mientras los participantes del estudio parecían mejorar y fortalecer sus concepciones de acuerdo con el modelo APOE, también hubo instancias donde ellos evocaron ciertas ideas falsas que parecían causar un obstáculo para alcanzar la construcción *objeto*, desde un *proceso*. Dichos conceptos erróneos incluyen, pero no se limitan, a:

- El cero vector de un espacio vectorial está constituido de ceros.
- El neutro aditivo y el cero vector son elementos diferentes en el espacio vectorial.
- El cero vector no es li, ni es ld, sino que es neutro.

La Tabla 4 resume la discusión del apartado anterior sobre las construcciones y mecanismos mentales que contribuyen a dar significado a las operaciones de un espacio vectorial.

Tabla 4

Construcciones mentales que contribuyen a dar significados a las operaciones de un espacio vectorial

Construcción mental	**Evidencias**	**Significado de las operaciones del espacio vectorial que se logra**
Proceso	• La construcción mental *proceso* de las operaciones de un espacio vectorial V, supone que el cero vector de un espacio vectorial se coordina con la propiedad de elemento neutro para (V,+). Además, el cero vector se utiliza para situar una referencia de los elementos del espacio vectorial, sin realizar la comprobación de que este cero vector es en realidad el elemento neutro del grupo abeliano (V,+) en el espacio [K(+, ·), (V, +), •]. • La construcción mental *proceso* de vectores li/ld explica que cuando una combinación lineal se iguala al cero vector, el sistema de ecuaciones lineales asociado, siempre tiene una única solución. • En la construcción *mental* proceso de las operaciones de un espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, la falsa creencia [el cero vector de $\mathbb{R}^2$ es (0,0) independiente de las operaciones que se definen en $\mathbb{R}^2$], se explica por las condiciones suficientes y necesarias para que (V,+) sea un grupo abeliano. • En la construcción *proceso* de conjuntos li/ld de vectores, la dependencia lineal se operacionaliza a través de un sistema de ecuaciones lineales.	Operaciones del espacio vectorial como *proceso*.
Objeto	• Conocimiento en estructuras algebraicas como *objeto*, que permiten desencapsularlo en el proceso cero vector, a través del elemento neutro del grupo abeliano (V,+) inserto en el espacio vectorial [K(+, ·), (V, +), •]. • Encapsulación del *proceso* de implicación [combinación lineal igual al cero vector $\Longrightarrow$ solución única y trivial del sistema de ecuaciones lineales] en el objeto conjunto li de vectores.	Operaciones del espacio vectorial como *objeto*.

	• Encapsulación del *proceso* de implicación [combinación lineal igual al cero vector $\Longrightarrow$ solución no única del sistema de ecuaciones lineales] en un objeto ld de vectores. • Coordinación de los *procesos* combinación lineal igual al cero vector para espacios vectoriales con operaciones no usuales y resolución del sistema $AX = b$, con $b \neq 0$, cuyo *proceso* resultante se encapsula en el *objeto* conjuntos li/ld. • La *acción* de construir una combinación igual al cero vector para operaciones no usuales sobre el *objeto* conjuntos li/ld. • Conocimiento de que las operaciones que definen al espacio vectorial existen y deben estar presente en todo momento cuando se trabaja con vectores y escalares.	
Esquema	• La coherencia del *esquema* de las operaciones del espacio vectorial [K(+, ·), (V, +), •] requiere de la asimilación del objeto conjuntos li/ld de vectores. • Conocimiento de que el cero vector es un vector ld. • Conocimiento de que un conjunto de vectores que contiene al cero vector, es un conjunto ld de vectores.	Operaciones del espacio vectorial como *esquema.*

Como producto de este estudio, en la Tabla 4 se propone una primera respuesta a la pregunta de investigación planteada, sobre cómo el trabajo con conjuntos li/ld contribuye a dar significado a las operaciones suma y multiplicación por escalar de un espacio vectorial.

Entre los aportes que la investigación hace a la literatura, se pueden señalar que el cero vector es un indicador del estado de construcción de las operaciones suma y multiplicación de la estructura del espacio vectorial, y del rol que estas tienen para dar paso a la comprensión real de otros tópicos del álgebra lineal. En relación con esto último, cabe señalar que la evidencia encontrada no es suficiente para afirmarlo en su totalidad. Es necesario llevar a cabo más investigación que contemple entrevistas a un mayor número de estudiantes, para tener más evidencia que lo sustente.

Este primer estudio sobre conjuntos li/ld para interpretar el estado de construcción de las operaciones de un espacio vectorial proporciona nueva evidencia de que el uso de las estructuras de la teoría APOE permite determinar las construcciones que subyacen a las dificultades de los estudiantes y a las estrategias que ellos utilizan en el álgebra lineal.

Agradecimientos

La investigación presentada ha sido financiada parcialmente por CONICYT a través del Proyecto FONDECYT Nº 1180468. Agradecemos a los participantes por la buena disposición en la investigación y también al Núcleo de Investigación en Formación de Profesores en Matemática, código 039.439/2020.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., y Thomas, K. (1996). A framework for research and development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, E. Dubinsky y A. H. Schoenfeld (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II* (pp. 1-32). Providence: American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/cbmath/006/01

Chargoy, R. (2006). *Dificultades asociadas al concepto de base de un espacio vectorial* (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN, D.F., México.

Dorier, J. L. (1995). A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia mathematica*, *22*(3), 227-261. https://doi.org/10.1006/hmat.1995.1024

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E., y McDonald, M. A. (2002). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. En D. Hoton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level, New ICMI Study Series* (pp. 275-282). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_7

Harel, G. (1989). Applying the principle of multiple embodiments in teaching linear algebra: Aspects of familiarity and mode of representation, *School Science and Mathematics*, 89, 49-57. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1989.tb11889.x

Kú, D., Trigueros, M., y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la Teoría APOE. *Educación Matemática, 20*(2), 65-89. Recuperado desde http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262008000200004

Oropeza, C., y Lezama, J. (2007). Dependencia e independencia lineal: una propuesta de actividades para el aula. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 2*(1), 23-39. Recuperado desde http://ppct.caicyt.gov.ar/index.php/reiec/article/view/7363/6612

Parraguez, M. (2013). El rol del cuerpo en la construcción del concepto espacio vectorial. *Revista Educación Matemática*. México, *25*(1), 133-154. Recuperado desde http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v25n1/v25n1a6.pdf

Parraguez, M., y Bozt, J. (2012). Conexiones entre los conceptos dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en R^2 y R^3 desde los modos de pensamiento. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 7*(1), 49-72. Recuperado desde http://ppct.caicyt.gov.ar/index.php/reiec/article/viewFile/7476/6720

Parraguez, M., Lezama, J., y Jiménez, R. (2016). Estructuras mentales para modelar el aprendizaje del teorema de cambio base de vectores. *Enseñanza de las Ciencias, 34*(2), 129-150. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1950

Parraguez, M., y Oktaç, A., (2010). Construction of the vector space concept from the view point of APOS Theory. *Linear Algebra and its Applications, 432*(8), 2112-2124. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.06.034

Parraguez, M., y Uzuriaga, V. (2014). Construcción y uso del concepto combinación lineal de vectores. *Revista Scientia et Technica Año XIX, 19*(3), 329-334. Recuperado desde https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=84932139014

Poole, D. (2011). *Álgebra lineal. Una introducción moderna* (3º Ed.). México: Thomson.

Roa-Fuentes, S., y Parraguez, M. (2017). Estructuras mentales que modelan el aprendizaje de un teorema del álgebra lineal: Un estudio de casos en el contexto universitario. *Revista Formación Universitaria, 10*(4), 15-32. https://doi.org/10.4067/S0718-50062017000400003

Rodríguez, M., Parraguez, M., y Trigueros, M. (2018). Construcción cognitiva del Espacio Vectorial R^2. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(1), 57-86. https://doi.org/10.12802/relime.18.2113

Saldanha, L. A. (1995). *The Notions of Linear Independence/Dependence: A Conceptual Analysis and Students Difficulties* (Tesis de maestría). Concordia University, Montréal, Québec, Canada. Recuperado desde https://spectrum.library.concordia.ca/5241/

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students' thinking in Linear Algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209-246). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_8

Stake, R. E. (2010). *Investigación con estudio de casos* (5ª Ed.). Barcelona: Labor.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., y Arnon, I. (2002). *Learning Linear Algebra with ISETL*. Recuperado desde https://vdocuments.mx/learning-linear-algebra-with-isetl.html