



ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

ERRORES QUE COMETEN LOS ESTUDIANTES DE TERCERO Y CUARTO AÑO DE ENSEÑANZA MEDIA EN VISTAS ORTOGONALES DE FIGURAS GEOMÉTRICAS 3D

ERRORS MADE BY THIRD AND FOURTH YEAR HIGH SCHOOL STUDENTS IN ORTHOGONAL VIEWS OF 3D FIGURES

Brahiam Ramírez Jofré
brahiam.ramirez@pucv.cl

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

Marcelo González Díaz
marcelo.gonzalez.d@mail.pucv.cl

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

Ricardo Zambrano Reyes
ricardo.zambrano@pucv.cl

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

RESUMEN

El artículo presenta resultados de una investigación cualitativa cuyo objetivo es estudiar errores que cometen alumnos de tercer y cuarto año de enseñanza media (16-18 años) en el dibujo de vistas ortogonales de figuras 3D y del proceso de dibujar figuras desde vistas ortogonales. La fundamentación teórica se basa en la teoría de los registros de representación semiótica (TRRS) y habilidades de manipulación mental. La recolección de datos se ha obtenido de las respuestas de 30 estudiantes de dos establecimientos chilenos a un cuestionario de cuatro partes que ha pretendido evidenciar los procesos de visualización, habilidades y razonamiento espacial. Como resultado, se han obtenido 11 tipos de respuestas diferentes para cada una de las vistas ortogonales analizadas, presentando mayor error de representación en vistas superiores (66,4% de error) y vistas traseras (63,2% de error), y con el 56,4% de las respuestas diferentes a la correcta en el apartado principal del cuestionario, evidenciando dificultades en habilidades espaciales y de manipulación mental.

PALABRAS CLAVE:

Geometría 3D, Vistas ortogonales, Aprendizaje de la geometría.

ABSTRACT

The article presents the results of a qualitative research whose objective is to study errors made by high school students (16-18 years old) in the drawing of orthogonal views of 3D figures and the process of drawing figures from orthogonal views. The theoretical foundation is based on the TRRS and mental manipulation skills. Data collection was obtained from the responses of 30 students from two Chilean schools to a four-part questionnaire that sought to demonstrate the processes of visualization, skills, and spatial reasoning. As a result, 11 different types of responses were obtained for each of the orthogonal views analyzed, with the greatest error of representation in top views (66.4% error) and back views (63.2% error), and with 56.4% of the responses different from the correct one in the main section of the questionnaire, showing difficulties in spatial skills and mental manipulation.

KEYWORDS:

3D Geometry, Orthogonal Views, Geometry Learning.

1. Introducción

Esta investigación se centra en errores que surgen de estudiantes de tercer y cuarto año de enseñanza media al realizar proyecciones ortogonales de figuras geométricas tridimensionales (3D). La justificación de dicha investigación se basa en sustentos teóricos sobre el concepto de proyecciones ortogonales, sus vistas, las dificultades de sus representaciones, la didáctica asociada al objeto matemático en el currículo ministerial chileno e investigaciones al respecto.

Para comenzar, en Fujita et al. (2017) se plantea una investigación en escuelas japonesas, cuyo objetivo ha sido estudiar cómo escolares (455 estudiantes de 12 a 15 años) emplean las habilidades de razonamiento espacial para resolver problemas que implican representaciones 2D de cuerpos geométricos 3D. Se trabaja en torno a cuatro tipos de razonamiento en geometría 3D: representación de objetos 3D, estructuración espacial, conceptualización de propiedades matemáticas y medición. Estos se relacionan con habilidades espaciales como la visualización espacial (codificación), orientación o el razonamiento analítico espacial basado en propiedades de los objetos (descodificación). Los resultados de esta investigación presentan que hay errores del 99% (grado 7), 96% (grado 8) y 76% (grado 9), que corresponden a una respuesta incorrecta influenciada por el conocimiento intuitivo y la información visual que se les entrega. Los autores concluyen que tanto la visualización espacial como el razonamiento analítico espacial basado en propiedades de los objetos tienen un rol importante, pero que, sin el conocimiento específico del dominio apropiado, el razonamiento de los estudiantes puede verse influenciado por la apariencia visual de la geometría. El estudio evidencia que los estudiantes fallan en resolver problemas dado que la manipulación mental de las representaciones no ha sido efectiva, mientras que los que sí logran manipularlas, han podido razonar para obtener las soluciones correctas a los problemas planteados.

Por su parte, Kok (2020) lleva a cabo una investigación cualitativa en la que se congregan datos de 100 estudiantes. Estos manifestaron dependencia de un objeto concreto para realizar la transición de 2D a 3D. Además, se planteó que la habilidad visoespacial es relevante para dicho proceso ya que la capacidad de utilizar un sistema de imágenes espaciales está vinculada con las habilidades de los estudiantes. Esto se refleja en la capacidad de imaginar el objeto y manipularlo. Así, este autor sugiere que en las aulas debe existir material didáctico para abordar el contenido matemático de geometría, y de este modo, complementar las habilidades visoespaciales.

Finalmente, Saralar et al. (2018) presentan una investigación cualitativa basada en investigaciones previas realizadas por los mismos autores sobre la comprensión de formas tridimensionales. El sustento de este estudio es en torno a los procesos del pensamiento (habilidades, razonamiento y

visualización espacial) de los estudiantes cuando resuelven problemas con figuras 3D. Una vez que estos procesos del pensamiento fueron estudiados, se procede con los errores en dos tipos de representaciones bidimensionales de formas policúbicas: dibujos ortogonales y dibujos isométricos. Con tal fin, estudian los errores de 199 estudiantes de séptimo nivel académico en Turquía, en una sesión de 80 minutos con un cuestionario de 10 preguntas que se basa en pruebas estandarizadas del Ministerio de Educación Nacional de Turquía (2016). A partir de los resultados obtenidos (66% de respuestas correctas en vistas ortogonales y 34% de respuestas correctas en el dibujo isométrico), los autores concluyen que los alumnos de séptimo grado tienen dificultades para construir representaciones en 2D de las formas 3D.

Los estudios presentados comparten que no es sencillo llevar figuras 3D a 2D, ya sea por la información que se pierde en una proyección ortogonal, el desarrollo de razonamiento al interpretar una figura 3D que es representada en un medio 2D (impresa) o porque el alumno necesita de ciertas habilidades visoespaciales. Para Fujita et al. (2017), en la geometría se necesitan distintas representaciones, ya que los estudiantes presentan problemas al manipular la representación geométrica, incluso generando una dificultad en el tipo de visualización que se les presenta. Así, se centran en el razonamiento de los alumnos frente a una figura y a un problema, por lo que cada imagen que se presenta es relevante para que el alumno logre desarrollar la actividad de manera satisfactoria con las herramientas que le entregan y las habilidades que ha desarrollado.

A partir de lo anteriormente descrito, se establece como problema de investigación el reconocer los errores de los estudiantes en su visualización espacial y en la representación de vistas ortogonales de figuras geométricas. Esto se sintetiza ante la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué errores cometen los estudiantes en tercer y cuarto año de enseñanza media al representar las vistas ortogonales de objetos geométricos tridimensionales?

Antes de exponer el marco teórico que permite responder la pregunta planteada, se presenta brevemente en qué niveles educativos y cómo se abordan las figuras 3D en el currículo chileno.

2. Las figuras geométricas 3D en el currículo chileno

En el primer año de enseñanza básica en Chile los estudiantes (6-7 años) deben identificar las figuras 3D en el entorno y relacionarlas con objetos concretos (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2021a). En el nivel siguiente, el alumno debe “describir, comparar y construir figuras 3D” (MINEDUC, 2012a, p. 232), identificando las caras de cada figura (partes planas), y construir figuras 3D con material concreto (MINEDUC, 2021b). Al identificar las caras, se espera que

continúen en tercer año con la construcción de figuras tridimensionales a partir de figuras bidimensionales (2D) (MINEDUC, 2012a). En el cuarto nivel, se enseñan las vistas 2D de una figura 3D, identificando tres vistas: frontal, superior y lateral (MINEDUC, 2012b). En quinto año se plantea que se describan las caras de las figuras 3D para comprobar sus intersecciones (vértices) y las aristas (para comprobar perpendicularidad). Además, se realizan cortes a los cuerpos geométricos para ver la figura 2D resultante (MINEDUC, 2021c).

Según las bases curriculares (MINEDUC, 2012a, 2015, 2019), en sexto año se trabaja con áreas de cuerpos 3D (cubos y paralelepípedos), lo que luego se complementa en octavo año con prismas y cilindros, en noveno nivel (primer año de enseñanza media) con conos y en décimo nivel (segundo año de enseñanza media) con esfera. Mientras, en el séptimo nivel no se trabaja con figuras 3D, al igual que en tercer y cuarto año de enseñanza media, que son los dos últimos niveles de la educación escolar obligatoria; sin embargo, se imparten cursos optativos como el curso de Geometría 3D.

El curso Geometría 3D abarca contenidos en torno a isometrías, vectores, representaciones digitales, áreas y volumen de figuras rotadas y/o trasladadas en el espacio, y relaciones entre figuras 3D y 2D (MINEDUC, 2019). Este último punto se aborda al “resolver problemas que involucren relaciones entre figuras 3D y 2D en las que intervengan vistas, cortes, proyecciones en el plano o la inscripción de figuras 3D en otras figuras tridimensionales” (MINEDUC, 2019, p. 279).

Por último, el MINEDUC (2021d) propone que se utilicen proyecciones para crear ilusiones de profundidad y así “ver un espacio tridimensional en una superficie plana bidimensional” (p. 154). Su objetivo es conectarla con el entorno y el arte, por lo que solicitan al estudiante dibujar las rectas proyectivas e identificar las caras de figuras dependiendo del tipo de proyección que tenga.

3. Marco teórico

La proyección ortogonal es la descripción de un cuerpo tridimensional en un plano bidimensional. Específicamente corresponde a proyecciones planas paralelas ortogonales, que es identificar cada vista que se proyecta del cuerpo en el plano bidimensional (vistas ortogonales), donde las rectas proyectantes son todas paralelas entre sí y perpendiculares a un plano. Estas vistas suelen ser: frontal, superior, posterior, inferior, lateral izquierda y lateral derecha (Casas et al., 2015), por lo que este proceso es un cambio de dimensiones para representar a un mismo objeto.

Se ha planteado que una de las problemáticas de las proyecciones ortogonales paralelas es que son poco realistas debido a que se pierde la noción de profundidad haciendo que el cerebro presente dificultades para interpretar la tridimensionalidad

(Casas et al., 2015). Aquellas dificultades pueden venir acompañadas de una incorrecta manipulación mental del objeto o indicando que no se ha accedido a él por medio de la información que se tiene, causando errores en el tratamiento o conversión de este objeto; aquello es profundizado con las acepciones propias de la teoría de los registros de representación semiótica (TRRS).

3.1 Teoría de los registros de representación semiótica (TRRS)

Las representaciones son diferentes maneras de mostrar un objeto y la semiótica es el estudio sobre los sistemas de signos que permitirán al estudiante la comunicación, modos de producción, funcionamiento y recepción de información (entendiendo los signos como un significado otorgado). Así, Duval (1999) plantea que no se puede hacer aprehensión de un concepto si no hay una representación de él, presentando dos tipos de representaciones:

- Representación mental: conjunto de imágenes que se tiene sobre un objeto.
- Representación semiótica: conjunto de signos mediante los que las personas manifiestan las representaciones mentales y las comparten (visibilizan) utilizando diferentes registros para aquello (tabular, numérico, algebraico, gráfico, pictórico y lenguaje natural).

Duval (1999) hace énfasis en la semiosis, que se define como la aprehensión o producción de una representación semiótica; también se considera la noesis como la aprehensión conceptual de los objetos representados. Indica que no existe el proceso de noesis si no está la semiosis involucrada.

Para trabajar en torno a representaciones, se considera un proceso abordado por:

- Formación: identificar una representación en un registro.
- Transformación: cambio de representación.
- Conversión: transformación externa en el sistema semiótico, cambiando de registro, pero sin cambiar de objeto.
- Tratamiento: transformación interna en el sistema semiótico, no se cambia de registro ni de objeto.

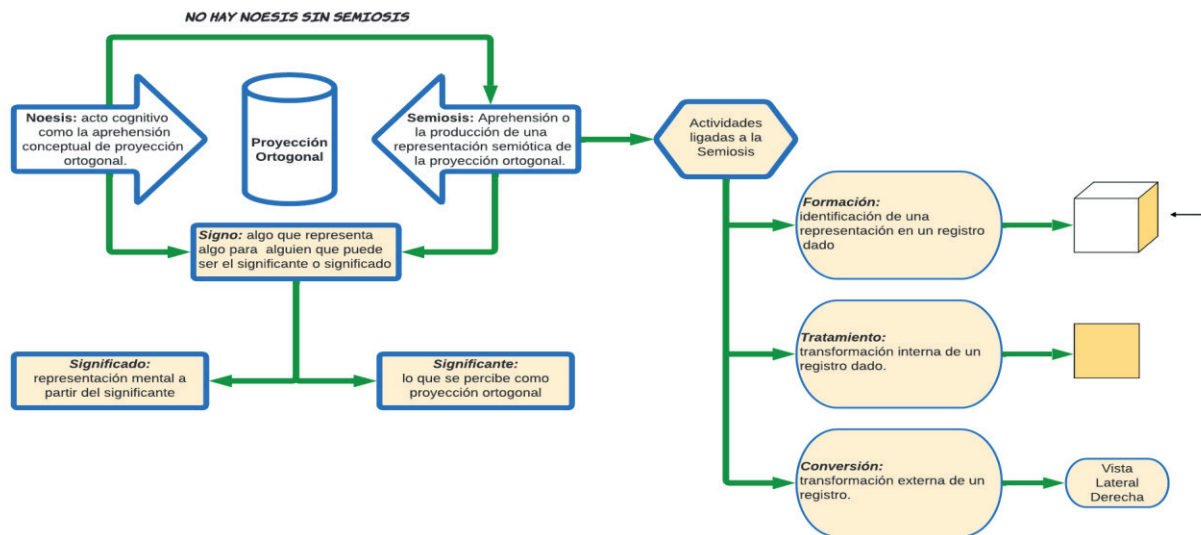


Figura 1. Actos cognitivos según la TRRS en la proyección ortogonal
 Nota. Creado a partir de la información obtenida de Duval (1993).

Callone y Torres (2013) plantean que “cada alumno efectúa una comprensión diferente de cualquier otra comprensión porque todo intento de dar significado se apoya no solo en los materiales de aprendizaje (representaciones externas), sino en los conocimientos previos activados para tal fin” (p. 289), por lo que se ha empleado la TRRS para identificar en diversas representaciones de cuerpos geométricos, cuyo registro es el pictórico, las vistas posibles que infiere el alumno, recolectando información mental de un registro (semiosis) cuyo proceso se debe introducir con la aprehensión de los conceptos matemáticos involucrados del cual podrían resultar errores.

3.2 Consideración de errores para la clasificación de respuestas

La representación mental es la agrupación de conceptualizaciones e imágenes que tiene un sujeto al verse enfrentado a un objeto o situación que debe interpretar (Duval, 1993). Dicha agrupación puede tener dos implicancias: que los estudiantes generen propiedades del objeto matemático al pasar de un tipo de representación; y que el alumno no manipule mentalmente la información que ha recolectado de la figura, generando una representación errónea en alguna de ellas. Por ello, se considera error toda aquella representación pictórica que no es una equivalencia entre la figura 3D y sus vistas representadas en 2D.

La distinción de error y dificultad que alude la investigación hace referencia a lo expuesto por Gotte (2019) en torno a estos dos conceptos:

- Error: práctica que lleva en su naturaleza conceptos equivocados o procedimientos no consolidados, que se pueden presentar a través de las producciones de los estudiantes.

- Dificultad: limitante de comprensión de conceptos o ejecución correcta de una tarea, pudiendo manifestarse por medio de errores.

En esta investigación el objetivo es identificar los errores de los estudiantes en su visualización espacial y en la representación de vistas ortogonales de las figuras geométricas, no así la naturaleza del error, por lo que para la interpretación de los errores se tendrán en consideración: la visualización, habilidades y/o razonamiento espacial empleado por el estudiante.

3.2.1 Visualización, habilidades y razonamiento espacial

Para Duval (2005), la manera matemática de ver las figuras se basa en la descomposición de formas conocidas, disminuyendo sucesivamente la dimensión; en este proceso la percepción puede causar problemas al momento de visualizar las figuras. Dicha visión del objeto (percepción) es la información directa que se extrae de él, teniendo que manipularlo físicamente, pero no se consigue una aprehensión completa; en cambio, la visualización es la representación semiótica de un objeto (Duval, 2002).

Para complementar la definición de visualización se considera la confeccionada por Arcavi (2003):

Es la habilidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, uso y reflexión de imágenes y diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y entendimientos avanzados. (p. 217)

En torno a las habilidades espaciales, se han adaptado a la investigación 5 habilidades visuales espaciales planteadas por Miragliotta et al. (2017):

- Organización visual: reconocer propiedades de la figura no visible en totalidad, como aquello producido por la imposibilidad de la manipulación física de la figura 3D para obtener vistas.
- Escaneo visual: reconocer las propiedades de la figura a partir de su representación icónica.
- Generación de la imagen: producir mentalmente las propiedades espaciales (forma, posición y tamaño).
- Reconstrucción visual: reconstruir la figura a partir de las representaciones dadas, tal como presentar vistas de un objeto 2D y que se deba dibujar en su representación 3D.
- Manipulación de la imagen: usar propiedades de idealidad, abstracción, generalidad y perfección de la figura o manipular la forma, posición o tamaño para llevarla de una figura a otra nueva. Aquello es evidenciado en el resultado del cambio de dimensiones.

En el caso del razonamiento espacial, se tendrá presente la definición de Clements y Battista (1992), considerado como “el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan representaciones, relaciones y transformaciones mentales de los objetos espaciales” (p. 420).

De este modo, para responder la pregunta de investigación, se plantea estudiar los errores que cometen los estudiantes en representaciones de vistas ortogonales de objetos geométricos tridimensionales desde la TRRS.

4. Metodología

La metodología de la investigación llevada a cabo es de carácter cualitativo, es decir, se ha enfocado en comprender el objeto de estudio en profundidad de un grupo de estudiantes, mediante la recolección de datos empíricos, auténticos del mundo real (Yin, 1994) e interpretación de datos cualitativos desde la TRRS.

Con tal fin, se ha usado la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995) como la metodología de la investigación, considerando los siguientes 4 pasos:

- Análisis preliminar, llevado a cabo desde el currículo escolar chileno y desde el conocimiento esperado del alumno debido a su trayectoria de educación. Aquello fue analizado para presentar la problemática y para confeccionar el instrumento de recolección de datos.
- Análisis *a priori* (Anexo 1), correspondiente a respuestas hipotéticas de los estudiantes antes de la implementación del instrumento; se basó en los resultados de la Agencia de Calidad de la Educación (2019), conocimientos personales debido a las modificaciones de las preguntas y a

los resultados de la investigación de Saralar et al. (2018).

- Experimentación, cuya etapa consistió en implementar el cuestionario en dos cursos del sistema educativo chileno, sin clases previas ni intervención de los investigadores.
- Análisis *a posteriori* y evaluación, llevado a cabo en el análisis de resultados, cuyo fin fue contrastar con el análisis *a priori*, definir nuevas respuestas encontradas y justificarlas desde la TRRS, cuantificando la cantidad de respuestas para complementar al análisis cualitativo.

4.1 Sujetos y proceso de recolección de datos

Se han considerado como sujetos de la investigación 30 estudiantes de tercero y cuarto año de enseñanza media (entre 16 y 18 años), en específico del curso optativo de Geometría 3D; el grupo ha tenido conocimientos previos del contenido a preguntar.

La recolección de datos se ha realizado en una sesión de 60 minutos en dos establecimientos educacionales de la ciudad de Viña del Mar, entre octubre y noviembre de 2022. Durante la sesión se llevó a cabo la implementación de un cuestionario de cuatro partes, diseñado con preguntas de pruebas estandarizadas (algunas textuales y otras modificadas), que presentamos a continuación.

Los datos recolectados son de carácter primario (extraídos directamente por los investigadores). No se contemplaron entrevistas, observaciones, intervenciones docentes ni registro audiovisual durante la sesión.

4.2 Instrumento de recogida de datos

El instrumento de recolección de datos (cuestionario) se secciona en cuatro partes:

4.2.1 Primera parte (P1)

Consiste en que los alumnos establezcan la cantidad de cubos que componen una figura. La Agencia de Calidad de la Educación (2019) establece esta pregunta, cuyo enfoque es evaluar los objetivos de aprendizaje relacionados con el concepto de volumen de cuerpos geométricos; para la finalidad de la investigación, se considera el uso de la habilidad espacial para poder descomponer la figura en cada uno de los cubos.

El propósito de las preguntas (separadas en partes “a” y “b”) es conocer el razonamiento que tendrán los estudiantes ante una pregunta de descomposición de una figura policúbica, considerando que se trabajarán con figuras similares en las partes 3 y 4 (P3 y P4).

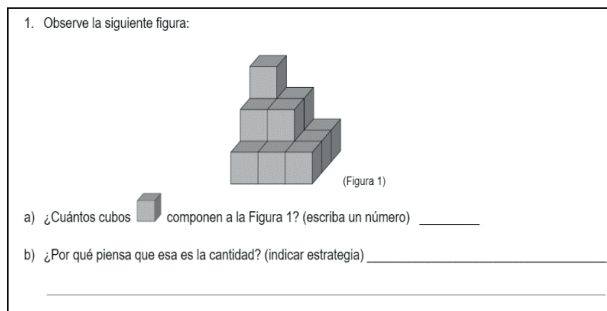


Figura 2. Pregunta 1 (P1)

Nota. Adaptado de Agencia de Calidad de la Educación (2019, p. 34).

4.2.2 Segunda parte (P2)

Esta parte hace referencia a la visualización espacial y su objetivo es identificar si los estudiantes logran plantear vistas diferentes a las que se trabajarán en el cuestionario (superior, frontal, derecha, izquierda, trasera) por medio de una pregunta de selección múltiple con opción de dibujar otra respuesta.

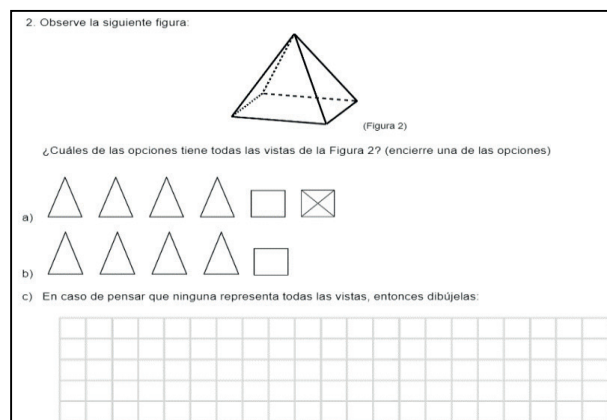


Figura 3. Pregunta 2 (P2)

Nota. Adaptado de Agencia de Calidad de la Educación (2019, p. 28).

4.2.3 Tercera parte (P3)

Se basa en el cuestionario creado por Saralar et al. (2018). Las primeras tres partes (P3.1 - P3.3) se consideran las vistas: derecha, izquierda, superior y frontal. La P3.4 y P3.5 contempla la vista trasera (modificando el cuestionario original, descartando la vista derecha), como se solicita en la Figura 4, debido a que se busca interpretar la capacidad del alumno ante una manipulación más compleja de la figura y la representación resultante de aquella manipulación (cinco partes en total de la P3).

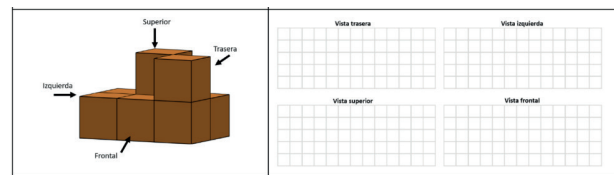


Figura 4. P3.3: Representar por medio de dibujo las vistas indicadas de la figura

Nota. Adaptado de Saralar et al. (2018).

4.2.4 Cuarta parte (P4)

Se enfoca en el proceso inverso de la parte 3, aquello implica que el alumno debe construir la figura 3D basándose en las vistas ortogonales (4 preguntas).

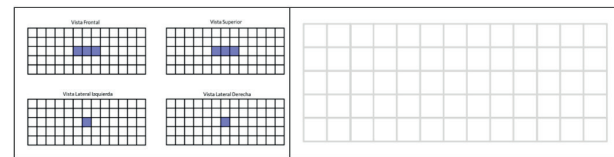


Figura 5. P4.1: Representar por medio de dibujo la figura a la que le corresponden las vistas presentadas

Nota. Adaptado de Saralar et al. (2018).

5. Resultados y discusión

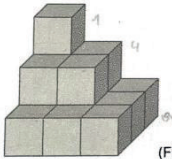
Tras la implementación del cuestionario a los 30 estudiantes, estos fueron analizados teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:


- Los alumnos tienen asociado un número único entre 1 y 30, el cual será su identificador para los casos que se expondrán (A1-A30).
- Las respuestas anticipadas en el análisis a priori se presentan en el Anexo 1 y las no anticipadas continúan con la enumeración respectiva, considerada en el análisis a priori.
- La parte P3 del cuestionario es el enfoque de esta investigación, por lo que los resultados referidos a esta parte se presentan con mayor detalle y las conclusiones son enfocadas en esta.

5.1 Parte 1 del cuestionario

23 de 30 estudiantes responden que la figura está compuesta por 14 cubos. Esta situación alude al razonamiento geométrico que tiene una persona, el cual es planteado en Duval (1993) como el proceso donde se visualiza, se construye y se razona, haciendo énfasis en las representaciones visuales. Se presentan dos tipos de argumentos a continuación:


1. Observe la siguiente figura:



a) ¿Cuántos cubos  componen a la Figura 1? (escriba un número) 14

b) ¿Por qué piensa que esa es la cantidad? (indicar estrategia) Multiplique el total de cubos de cada lado en cada "piso" de la figura y luego los sumo


Figura 6. Respuesta de A16 a la P1
Nota. A16 argumenta que su estrategia fue hacer multiplicaciones: $3 \cdot 3, 2 \cdot 2, 1 \cdot 1$.
Luego, suma los resultados previos: $9+4+1=14$.

a) ¿Cuántos cubos  componen a la Figura 1? (escriba un número) 14

b) ¿Por qué piensa que esa es la cantidad? (indicar estrategia) fui separando capa por capa y viendo los cubos laterales, para así multiplicarlos y sumarlos.

Figura 7. Respuesta de A22 a la P1
Nota. A22 justifica con respecto al resultado de una manipulación mental de la figura, la cual pudo ser descompuesta por tres etapas para estimar la cantidad de cubos. Se alude al uso de habilidades espaciales para reconocer propiedades de la figura, generar una imagen descompuesta y manipularla.

La respuesta esperada 1.a.2 se evidenció en tres respuestas, esto es debido a que no se puede manipular la figura. Se evidencian argumentos como el de a continuación:

a) ¿Cuántos cubos  componen a la Figura 1? (escriba un número) 9

b) ¿Por qué piensa que esa es la cantidad? (indicar estrategia) Ya que son los cubos que se alcanzan a ver. No se puede asegurar de que hay o no cubos detrás.

Figura 8. Respuesta de A29 a la P1
Nota. Argumenta con respecto a que no hay cómo asegurar que la figura tiene elementos detrás, esto indica que el estudiante, al no poder manipular la figura, solo considera lo que ve sin hacer suposiciones de aquello que no tiene como evidencia.

La respuesta esperada 1.a.3 se encontró en dos oportunidades: contando un cubo que estaría compuesto por 4 cubos más pequeños, los dos estudiantes aluden al cubo que está oculto. A13 lo identifica como la conformación de 8 cubos y A4 lo identifica como el cubo "tapado por el resto".

Otras respuestas son:

1.a.4: 10 cubos, por suma errónea de cubos visibles contando dos veces un cubo de la base.

1.a.5: 13 cubos, con base de 9 cubos y suma los cubos visibles sobre la base (4 cubos).

El porcentaje por respuestas obtenidas se tabula a continuación:

Tabla 1. Tipo de respuesta encontrada y su frecuencia porcentual de la P1
Nota. Los porcentajes se redondean al primer decimal.

Respuesta	%
1.a.1	76,7
1.a.2	10,0
1.a.3	6,7
1.a.4	3,3
1.a.5	3,3

5.2 Parte 2 del cuestionario

25 de 30 alumnos consideran que la alternativa "a" (2.a.1) es la correcta, esto indica que se identifican 6 vistas.

La respuesta 2.b.1 se presenta en cuatro oportunidades, ninguna posee justificación y se puede aludir a que el alumno identificó caras y no vistas. También aparece una respuesta no anticipada (2.c.6) que se evidenció en una oportunidad, en la cual el alumno dibuja una séptima vista (Figura 9). Esta vista corresponde a una proyección plana paralela ortogonal ya que se trazan rectas proyectantes que son paralelas entre sí y perpendicular a la superficie de proyección (definición que trabaja Casas et al., 2015) esto conlleva a que el alumno realizara esta proyección (implícita) e identificara la vista; dicha sospecha de acción se encuentra en que el dibujo no tiene noción de profundidad.

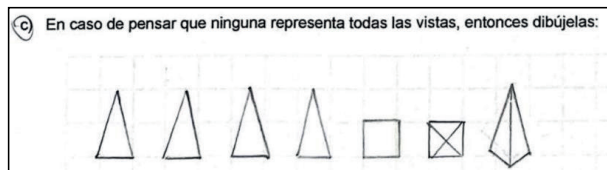


Figura 9. Respuesta de A4 a la P2

La parte 2 del cuestionario se resume a continuación:

Tabla 2. Tipo de respuesta y su porcentaje de la P2

Respuesta	%
2.a.1	83,3
2.b.1	13,3
2.c.6	3,3

5.3 Parte 3 del cuestionario

Para considerar un tipo de respuesta se contabiliza cada una de las vistas, por lo que un estudiante puede entregar hasta cuatro tipos de respuesta por una figura (20 respuestas máximo por estudiante para P3). En este tipo de respuesta se considera la noción de representación en 2D con profundidad por medio de oscurecer las caras de cada cubo dependiendo del plano en el cual se encuentre, resultando que el 43,6% de las respuestas son correctas en la P3.

5.3.1 Respuesta 3.1

En la Figura 10 se aprecia que A12 ha marcado tres tipos de profundidad (graduando el oscurecimiento); en la vista superior el alumno oscurece solo los cuadrados

superiores de la figura que están en segundo plano (este tipo de vista [superior] tiene 66,4% de error). En la vista frontal identifica una cara de un cubo que está atrás que el resto de las caras, esta vista (frontal) posee un 56,3% de errores en su representación.

El tipo de respuesta 3.1 es un tratamiento de la figura 3D manteniendo el registro, empleando un razonamiento geométrico en este tratamiento para manipular la representación pictórica que ve en una superficie plana. Esta es una ilusión óptica, la cual es favorecida por las texturas, líneas y formas para que nuestro sistema visual interprete la sensación de espacio y profundidad activando la percepción sensorial tridimensional (Mimbrero, 2017), lo que contribuye a interpretar que el alumno posee habilidades de visualización espacial, logrando manipular la figura para representarla en otra dimensión sin perder la noción de qué figura está representando.

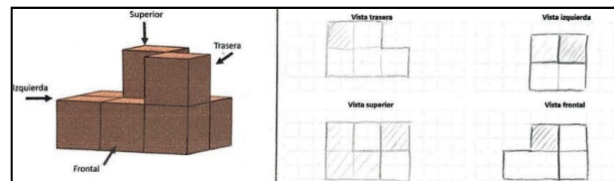


Figura 10. Respuesta de tipo 3.1 de A12 a la P3.4

5.3.2 Respuesta 3.2

El intercambio de vistas se evidencia en la Figura 11, en la cual A14 intercambia la vista derecha con la izquierda. Este tipo de respuesta evidenció la más baja frecuencia con dos casos (0,3% de las respuestas), ambas del A14, el cual manipuló incorrectamente la representación y tuvo problemas con la visualización espacial rotándola incorrectamente (Jaimes y Romo [2013] han asociado que este error es causal de una dificultad en la orientación espacial), por ende, no se consigue una representación semiótica dado a que no se evidencia su correcta manipulación.

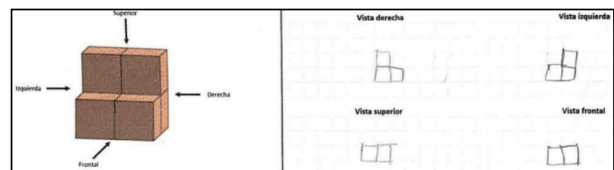


Figura 11. Respuesta de tipo 3.2 de A14 a la P3.3 en vistas derecha e izquierda

5.3.3 Respuesta 3.3

El 6,5% de respuestas en la P3 aluden a una representación de vistas en 3D. Hay estudiantes que trabajaron todas las vistas en 3D y otros que hacen la combinación entre vistas 2D y 3D, para aquello se evidencia la respuesta de A18 que en la vista frontal dibuja la misma figura que se presenta.

Aquello es causante del no logro de la manipulación mental de la figura, además de que no se consigue la deconstrucción dimensional de ella, siendo que la figura está compuesta por cubos, figura que es conocida por el estudiante.

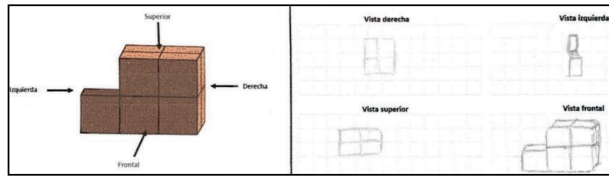


Figura 12. Respuesta de tipo 3.3 de A18 a la P3.2 en vista frontal
Nota. El estudiante en la vista izquierda trata de hacer una representación con perspectiva, aludiendo a una figura 3D.

5.3.4 Respuesta 3.4

Dibujar la cara sobresaliente de la figura ocurrió en diez ocasiones, y se interpreta como la incorrecta manipulación mental completa de la figura y la representación del objeto, lo que está causando que en la vista se pierda información, por lo que el proceso de 2D a 3D lo hará difícil (o casi imposible) con su planteo. Además, la distorsión de las dimensiones verifica que el alumno no logra rotar la figura mentalmente y se queda con la información visual de ella. Se considera que se ha tenido una percepción errada del objeto, extrayendo información visual sin lograr la habilidad de visualización (Duval, 2002).

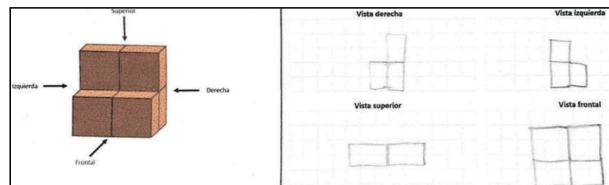


Figura 13. Respuesta de tipo 3.4 de A3 a la P3.3 en vista superior

5.3.5 Respuesta 3.5

Se considera que el tipo de respuesta 3.5 se debe a que el alumno cambia el método de representación del objeto geométrico y emplea una posible proyección plana oblicua de ampliación (Casas et al., 2015), evidenciada en el 16,8% de las respuestas. Aquello se debe al no dominio de habilidades espaciales y de capacidad de visualización, ya que distorsiona las proporciones de un objeto conocido (cubos).

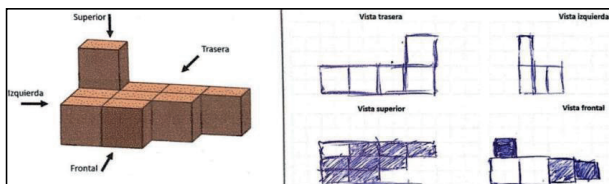


Figura 14. Respuesta de tipo 3.5 del A1 a la P3.5 en vista izquierda

5.3.6 Respuesta 3.6

El 2,6% de las respuestas evidencian que posiblemente los alumnos puedan hacer un tratamiento de la figura, sin embargo se representa sin respetar cuadrículas alterando la forma de la figura original.

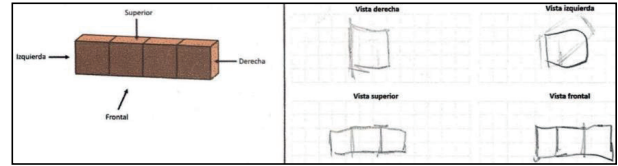


Figura 15. Respuesta de tipo 3.6 de A15 a la P3.1 en vista izquierda
Nota. Se distorsiona la figura en todas sus vistas, además presenta un error de dimensión en vistas superior y frontal.

5.3.7 Respuesta 3.7

El estudiante da una respuesta similar a la 3.1, sin embargo, no representa la noción de profundidad por medio de bosquejos; esta situación reúne el 17,8% de las respuestas (segunda mayoría). La dificultad en el razonamiento espacial en el alumno no se evidencia en este tipo de respuestas, sino que es la técnica de sombreado que permite entregar la sensación de espacio y profundidad (aquello es definido en Mimbrero [2017] y es considerado para esta investigación como una técnica que favorece la aprehensión de un objeto). Dado a que no se profundizó en la respuesta del alumno, no se puede extraer si hay insuficiencia de dominio de habilidades espaciales y/o de visualización; sin embargo, no atiende a la técnica de sombreado que puede favorecer a los cambios de dimensiones y a la manipulación mental del objeto con perspectiva.

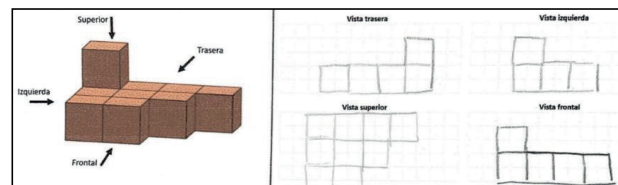


Figura 16. Respuesta de tipo 3.7 de A13 a la P3.5

5.3.8 Respuesta 3.8

El 4% de las respuestas no se categorizaron ya que no se interpretó la intención del estudiante. Aquello se refleja en la Figura 17, en la que un estudiante ha presentado una distorsión en las vistas superior y frontal, lo que se asocia a que intenta representar la profundidad por medio de una perspectiva (proyección plana perspectiva); sin embargo, la figura del plano trasero no posee dimensiones que permitan tener noción correcta de la figura inicial. Este tipo de respuestas obtiene diversas interpretaciones, desde respuestas como la ejemplificada hasta figuras que están completamente incorrectas ya que no poseen ninguna relación con la figura inicial (considerada

como la no aprehensión del concepto reflejada en un mal tratamiento de la figura).

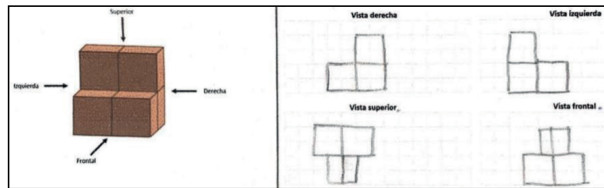


Figura 17. Respuesta de tipo 3.8 de A19 a la P3.3 en vista superior y frontal

5.3.9 Respuesta 3.9

El 2,1% de las respuestas posee una rotación en la representación de las vistas, esta situación se produce al cometer una equivocación en la manipulación y rotación mental de la figura, por lo que, al ser externalizada, se asocia a que el estudiante no ha logrado una completa aprehensión del objeto para poder representarlo.

La Figura 18 corresponde a una respuesta del tipo 3.9 efectuada en la vista superior y frontal; se evidencia que A5 identifica la profundidad asociándola con oscurecer caras, sin embargo, esta acción se hizo identificando la profundidad de manera errada.

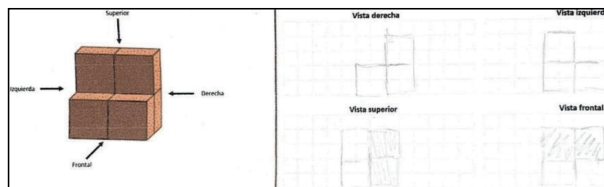


Figura 18. Respuesta de tipo 3.9 de A5 a la P3.3 en vista superior y frontal

5.3.10 Respuesta 3.10

El 2,4% de las respuestas presenta una reflexión de las vistas, esta situación es similar al planteo de una respuesta del tipo 3.9, producida por la manipulación errónea de la representación mental. En la situación ejemplificada, el estudiante ha confundido la posición de una de las caras de un cubo.

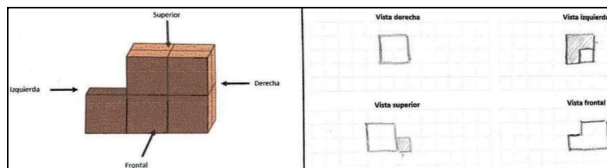


Figura 19. Respuesta de tipo 3.10 de A17 a la P3.2 en vista superior

5.3.11 Respuesta 3.11

El 2,4% de las respuestas tienen un error en representar la profundidad, esto se evidencia en situaciones como en la Figura 20, en la cual el estudiante emplea un color más oscuro para representar una vista más cercana en la vista superior pero en la vista frontal no hace coincidir la misma noción de profundidad por la tonalidad del color, ya que en la vista superior el color más oscuro representa la cara más cercana y en la vista frontal no es así, oscureciendo con la misma intensidad caras de cubos que no están en la misma posición.

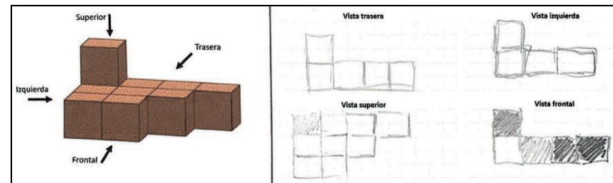


Figura 20. Respuesta de tipo 3.11 de A7 a la P3.5 en vista frontal

La parte 3 del cuestionario se resume a continuación:

Tabla 3. Porcentajes de respuestas a la Parte 3, según su clasificación

Tipo de respuesta	%
3.1	43,6
3.2	0,3
3.3	6,5
3.4	1,7
3.5	16,8
3.6	2,3
3.7	17,8
3.8	4,0
3.9	2,1
3.10	2,4
3.11	2,4

5.4 Parte 4 del cuestionario

5.4.1 Respuesta 4.1

El 51,8% de respuestas demuestra que los estudiantes tienen desarrollada su habilidad espacial, en donde existe precisión entre la relación visual y la espacial. Además, complementando con Tristancho et al. (2019), estos tipos de estudiantes evidencian que pueden transformar las percepciones y recrear las figuras geométricas con base a su experiencia visual. Junto a eso, Duval (2002) señala que el dominar el cambio de dimensiones sin una manipulación física implica tener una capacidad de visualización.

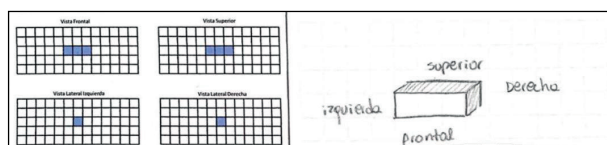


Figura 21. Respuesta 4.1 de A17

5.4.2 Respuesta 4.2

9,8% de respuestas representan a la vista frontal, superior, lateral izquierda o lateral derecha en 2D, causando que no representen una figura en 3D como se esperaba dado a una mala manipulación del objeto.

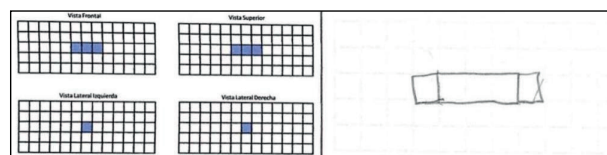


Figura 22. Respuesta 4.2 de A26

5.4.3 Respuesta 4.3

En el 12,5% de veces se dibuja una de las vistas en 3D. Para Duval (1999) se debe identificar la representación del registro para que posteriormente se realice la transformación interna en base a ella. En este caso, el estudiante identificó la vista frontal y, apoyándose en ella, realizó la transformación para construir la figura policúbica, ignorando las otras vistas proporcionadas.

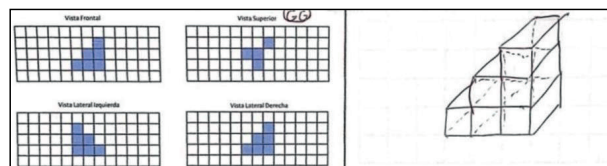


Figura 23. Respuesta 4.3 de A21

5.4.4 Respuesta 4.4

La respuesta 4.4 está presente 4 veces (3,6%). En esta, los estudiantes intercambian las vistas reflejado en un tratamiento visual con el que los alumnos reorganizan las vistas realizando una incorrecta transformación interna de este cuerpo geométrico.

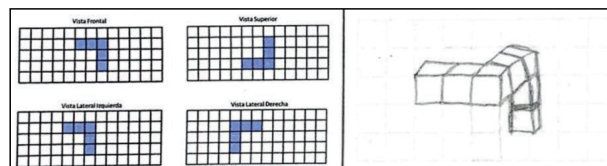


Figura 24. Respuesta 4.4 de A8

5.4.5 Respuesta 4.5

La respuesta 4.5 está presente el 6,3% de las veces, evidenciando la representación de una de las vistas 2D. Esta respuesta es similar a lo que ocurrió en la 4.2 y 4.4: los estudiantes no manipulan el objeto debido a que no lograron llegar a él con las representaciones entregadas.

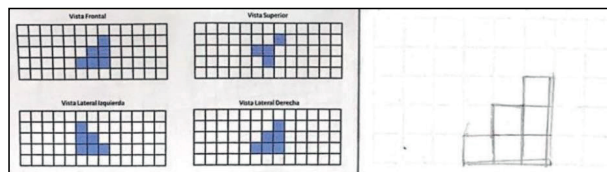


Figura 25. Respuesta 4.5 de A4

5.4.6 Respuesta 4.6

En 6,3% de las respuestas los estudiantes alteran las dimensiones del cuerpo geométrico. Según Fujita et al. (2020) esto sucede debido a que los estudiantes, al carecer de habilidades espaciales, manipulan las propiedades que cumple el objeto matemático adaptándolas a lo que ellos interpretan. Esto, debido a la influencia de la apariencia visual a causa de la ausencia de conocimiento específico del dominio apropiado.

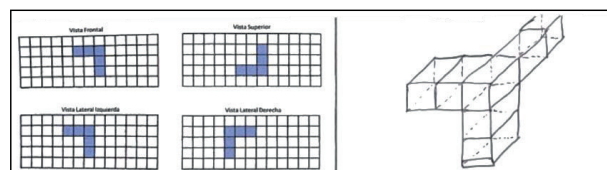


Figura 26. Respuesta 4.6 de A21

5.4.7 Respuesta 4.7

El 7,1% de las respuestas alude a que no se respetaron las cuadrículas ni la figura a base de cubos, por lo que el estudiante no está representando correctamente la figura, sin embargo, aquello no significa que no haya logrado acceder a ella.

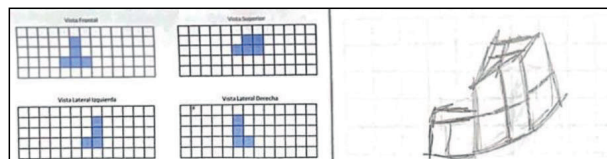


Figura 27. Respuesta 4.7 de A11

5.4.8 Respuesta 4.8

En tres ocasiones (2,7%) no se logra clasificar el tipo de respuesta entregada, como lo sucedido en la Figura 28.

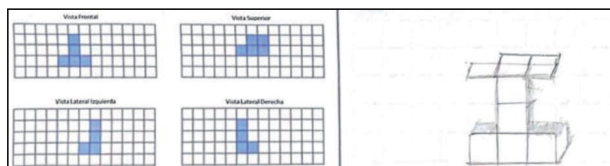


Figura 28. Respuesta 4.8 de A4

La parte 4 del cuestionario se resume a continuación:

Tabla 4. Porcentaje de respuestas de la P4, según su clasificación

Tipo de respuesta	%
4.1	51,8
4.2	9,8
4.3	12,5
4.4	3,6
4.5	6,3
4.6	6,3
4.7	7,1
4.8	2,7

5.5 Vistas ortogonales

Las vistas de la P3 presentan errores asociados a los expuestos anteriormente en la parte 5.3 de resultados y discusiones, adicionalmente se cuantifican a continuación:

Tabla 5. Porcentaje de errores en la P3, según vistas

Tipo de vista	% de error
Derecha	36,0
Frontal	56,3
Izquierda	55,6
Superior	66,4
Trasera	63,2

6. Conclusiones

El análisis de la parte principal de la investigación (P3) ha arrojado resultados favorables para atender a la diversidad de producciones y razonamientos que pueden surgir en el aula de clases ante actividades similares a las planteadas en el cuestionario de la investigación, estos son 11 diferentes tipos de respuestas que evidencian que el 56,4% de ellas no corresponden a una respuesta correcta (3.2 - 3.11). Aquel resultado implica que más de la mitad de los estudiantes no ha logrado comprender los objetos por medio de la representación entregada; Duval (1999) plantea que el centro de la comprensión en matemática es la representación y la visualización,

aquella interacción entre estos dos elementos es favorable para producir aprendizaje.

Se han encontrado problemas de visualización del objeto representado de manera icónica, y en la manipulación de la representación mental y la aprehensión del objeto para ser representado por medio de un tratamiento de la representación inicial. Hay estudiantes que pareciera que no comprenden la noción de vistas ortogonales, ya que hacen representaciones tridimensionales; luego, la P3.4 y la P3.5 reúnen el 52% de las respuestas erróneas. Esto es coincidente con la complejidad de las figuras con respecto a las demás, dada la incorporación de la vista trasera.

Se han evidenciado respuestas que validan el análisis a priori, presentando al menos una respuesta esperada (Anexo 1) en este. Por otra parte, los hallazgos de esta investigación confirman los resultados encontrados en Saralar et al. (2018) pese a la diferencia entre edades (y grado), por lo que se puede cuestionar sobre la efectividad de los métodos de enseñanza del contenido geométrico y la potencia de habilidades de razonamiento geométrico y espacial en la formación de los estudiantes en Chile.

Junto con el análisis a priori efectuado, se esperaba que los alumnos presentaran una mayor dificultad en las P3.4 y P3.5 ya que ambas preguntas consideran vistas traseras, esta vista es la menos accesibles para el alumno y debe emplear las habilidades de visualización para llegar a estas (organización visual para identificar la vista no accesible, escaneo visual para identificar propiedades de la figura, generación mental de la figura con sus características, y reconstruir visualmente una figura luego de la manipulación mental). Sin embargo, como se aprecia en la Tabla 5, esta vista a pesar de ser la menos accesible debido a que no se puede manipular la figura físicamente, presentó 63,2% de error (36,8% de respuestas correctas) no siendo la que mayor error tiene, ya que fue superada por la vista superior con el 66,4% de error en la representación de esta vista por los estudiantes en la P3. Aquella situación se puede atribuir a que la información recepcionada no fue suficiente para interpretar, manipular y manifestar representaciones del objeto (Duval, 1999).

En el caso de la P4, la mayoría de las respuestas representan una correcta representación de las figuras que aludían a las vistas, sin embargo, la segunda mayoría de respuestas está centrada en estudiantes que comienzan bosquejando una de las vistas en 3D y luego no interpretan el resto de las vistas.

Duval (1998), además, plantea que un dibujo (como el presentado a los estudiantes en el cuestionario) nos permite ver figuras en 1D o 2D y representaciones de figuras 3D en un medio 2D, por lo cual la percepción de cada una de estas figuras y su dimensión se basa en la interpretación del observador. Por tanto, el trabajo con estudiantes debiese ser estratégico para abarcar

el razonamiento espacial, el desarrollo de habilidades espaciales y de visualización.

Como docentes nos vemos enfrentados a presentar propuestas para superar los obstáculos en el aprendizaje de contenidos matemáticos que propone el currículo, por tanto, se debe considerar tener soluciones para subsanarlos; ya que interpretar representaciones no es una acción inmediata (Duval, 1998), sino que es un proceso de preparación para el estudiante el cual debe tener experiencias con el trabajo de representaciones y dominar el trabajo entre dimensiones. En este sentido, la presente investigación ha tratado de aportar a la problemática planteada y se espera subsanar las dificultades por medio de una propuesta con proyecciones de ser implementada en establecimientos educacionales de Chile y publicada en una instancia futura. Esta pretende ser por medio de la realidad virtual (VR), proponiendo hacer uso de algún software en el cual el alumno esté inmerso en una manipulación virtual de la figura por medio de lentes VR.

Referencias

- Agencia de la Calidad de la Educación. (2019). *Aprendiendo de los Errores: Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de 4º básico en las pruebas Simce y TIMSS y sus implicancias pedagógicas*. Agencia de Calidad de la Educación.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241. <https://doi.org/10.1023/A:1024312321077>
- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59). Grupo Editorial Iberoamérica.
- Callone C., y Torres, N. (2013). ¿Por qué las representaciones semióticas pueden ser obstáculos para la comprensión? Un estudio en el tema ácido-base. *Educación Química*, 24(3), 288-297. [https://doi.org/10.1016/S0187-893X\(13\)72478-9](https://doi.org/10.1016/S0187-893X(13)72478-9)
- Casas, S., Pareja, I., y Pérez, M. (2015). *Expresión gráfica*. Universidad de Valencia.
- Clements, D., y Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. (pp. 161-2004). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Duval, R. (1993). Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- Duval, R. (1998). Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp.173-201). Grupo Editorial Iberoamericana.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos de Aprendizajes Intelectuales*. Universidad del Valle.
- Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt (Ed.), *Representations and Mathematics Visualization* (pp. 311-335). North American Chapter of PME.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 18(10), 5-53.
- Fujita, T., Kondo, Y., Kumakura, H., y Kunimune, S. (2017). Students' geometric thinking with cube representations: Assessment framework and empirical evidence. *The journal of mathematical behavior*, 46, 96-111. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.03.003>
- Fujita, T., Kondo, Y., Kumakuram, H., Kunimune, S., y Jones, K. (2020). Spatial reasoning skills about 2D representations of 3D geometrical shapes in grades 4 to 9. *Mathematics Education Research Journal*, 32, 235-255. <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00335-w>
- Gotte, M. (2019). *Resoluciones de problemas de geometría especial: Errores y dificultades en futuros profesores de matemática* (Tesis de Magister, Universidad Nacional del Litoral). Repositorio Institucional de la Universidad Nacional del Litoral. <https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar:8443/bitstream/handle/11185/5808/Tesis.pdf>
- Jaimes, E., y Romo, A. (2013). Integrando el uso de habilidades espaciales y geométricas para el aprendizaje significativo del concepto de volumen de sólidos con estudiantes de dibujo técnico. *Revista Científica, [edición especial]*, 462-466.
- Kok, P. (2020). Pre-service Teachers' Visuospatial Cognition: 2D to 3D Transition. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 24(1), 1-14. <https://doi.org/10.1080/18117295.2020.1848279>
- Mimbrero, D. (2017). *El dibujo en perspectiva a mano alzada: una propuesta metodológica para la enseñanza de los sistemas de representación en bachillerato* (Tesis de magister, Universidad Politécnica de Madrid). Archivo Digital UPM. https://oa.upm.es/48387/1/TFM_DAVID_MIMBRERO_JIMENEZ.pdf
- Ministerio de Educación de Chile. (2012a). *Bases Curriculares: Primero a Sexto Básico*. Unidad de Currículum y Evaluación. <https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/2342/mono-1003.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Ministerio de Educación de Chile. (2012b). *Matemática: Programa de Estudio: Cuarto Año Básico*. Unidad de Currículum y Evaluación. <https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/644/MONO-148.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Ministerio de Educación de Chile. (2015). *Bases Curriculares: 7º básico a 2º medio*. Unidad de Currículum y Evaluación. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-34949_Bases.pdf
- Ministerio de Educación de Chile. (2019). *Bases Curriculares: 3º y 4º medio*. Unidad de Currículum y Evaluación. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-133992_recurso_10.pdf

Ministerio de Educación de Chile. (2021a). *Sumo Primero: 1° básico: Texto del Estudiante: Tomo 1. Unidad de Currículum y Evaluación*. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Tipo/Textos-escolares-oficiales/Textos-Escolares-elaborados-por-Mineduc/#doc_01

Ministerio de Educación de Chile. (2021b). *Sumo Primero: 2° básico: Texto del Estudiante: Tomo 2. Unidad de Currículum y Evaluación*. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Tipo/Textos-escolares-oficiales/Textos-Escolares-elaborados-por-Mineduc/#doc_02

Ministerio de Educación de Chile. (2021c). *Texto del estudiante: Matemática 5° básico*. Santillana.

Ministerio de Educación de Chile. (2021d). *Programa de Estudio: 3° y 4° Medio: Formación Diferenciada: Matemática: Geometría 3D. Unidad de Currículum y Evaluación*. https://www.curriculumnacional.cl/614/articulos-140147_programa_feb_2021_final_s_disegno.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Turquía. (2016). *Banco de exámenes de secundaria*. http://www.meb.gov.tr/meb_sinavindex.php

Miragliotta, E., Baccaglioni-Frank, A., y Tomasi, L. (2017). Apprendimento della geometria e abilità visuo-spaziali: un possibile quadro teorico e un'esperienza didattica. *L'Insegnamento Della Matematica e Delle Scienze Integrate*, 40(B), 339-360.

Saralar, I., Ainsworth, S., y Wake, G. (2018). Middle school students' errors in two-dimensional representations of threedimensional shapes. *Research in Mathematics Education*, 20(2), 1-3. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1482475>

Tristancho, J., Vargas, L., y Contreras, L. (2019). Desarrollo de habilidades espaciales en estudiantes de ingeniería mediante CAD especializado. *Scientia et Technica*, 24(1), 57-66. <https://doi.org/10.22517/23447214.20261>

Yin, R. (1994). *Case Study Research: Design and Methods*. Sage Publications.

Anexo

Análisis a priori

Confección de posibles respuestas con base a resultados previos obtenidos de la Agencia de Calidad de la Educación (2019), conocimientos personales de los investigadores ante las modificaciones intencionadas a las preguntas y resultados de la investigación de Saralar et al. (2018).

6.1 Pregunta 1 (P1)

1.a.1: 14.

1.b.1: Considera los cubos que se encuentran en la parte posterior de la figura que no se logran visualizar.

1.a.2: 9.

1.b.2: Considera los cubos que se logran visualizar en la figura, ya que no se puede asumir que en la parte posterior existen cubos.

1.a.3: 15.

1.b.3: Considera los cubos que se encuentran en la parte posterior y contabiliza un cubo de mayor tamaño formado a partir de ocho cubos pequeños.

6.2 Pregunta 2 (P2)

2.a.1: Respuesta experta, cuatro triángulos isósceles (vista frontal, izquierda, derecha y trasera), un cuadrado (vista inferior), un cuadrado con sus diagonales (vista superior).

2.b.1: Considera cuatro triángulos isósceles como las caras de la figura (vista frontal, lateral izquierda, lateral derecha y trasera) y la vista inferior (cuadrado).

2.b.2: Considera cuatro triángulos isósceles como las caras de la figura (vista frontal, lateral izquierda, lateral derecha y trasera).

2.c.1: No considera la vista superior.

2.c.2: Considera la base (vista inferior) como un triángulo.

2.c.3: Considera la vista superior como un triángulo con segmentos desde el centro de este hacia cada vértice.

2.c.4: Considera la base (vista inferior) como un triángulo y la vista superior como un triángulo con segmentos desde el centro hacia cada vértice.

2.c.5: Considera solo tres triángulos isósceles como las caras de la figura (vista diagonal derecha, vista diagonal izquierda y vista trasera).

6.3 Pregunta 3 (P3)

3.1 (respuestas expertas)

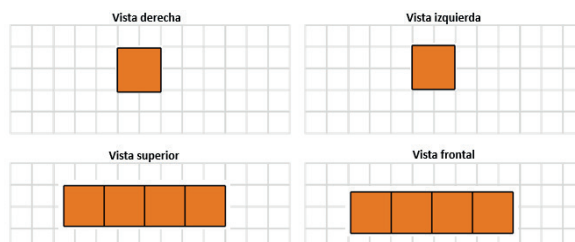


Figura 29. Respuesta experta pregunta P3.1



Figura 30. Respuesta experta pregunta P3.2

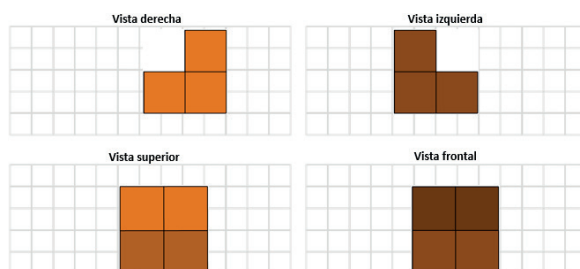


Figura 31. Respuesta experta pregunta P3.3

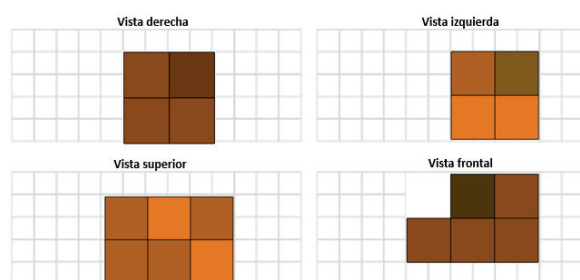


Figura 32. Respuesta experta pregunta P3.4

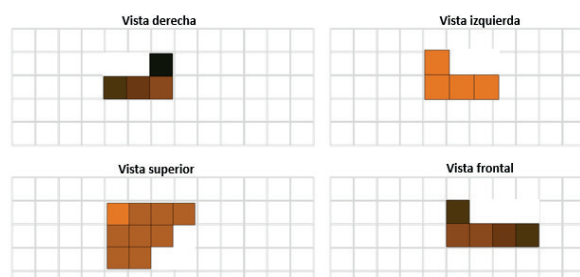


Figura 33. Respuesta experta pregunta P3.5

3.2: No dibuja correctamente los distintos tipos de vistas.

3.3: Representa las vistas mediante objetos tridimensionales, ya sea utilizando líneas segmentadas o líneas que inducen a la profundidad de una figura.

3.4: Solo se considera la cara más expuesta de la figura.

6.4 Pregunta 4 (P4)

4.1:

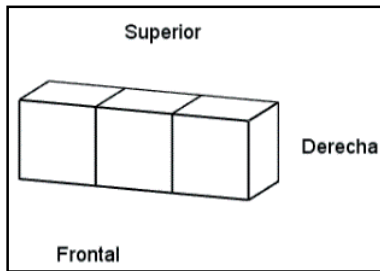


Figura 34. Respuesta experta pregunta P4.1

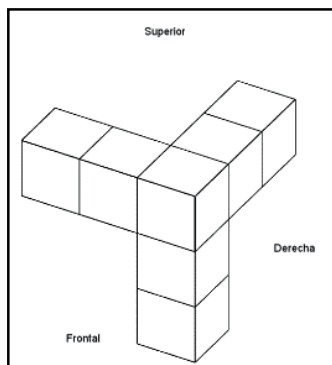


Figura 35. Respuesta experta pregunta P4.2

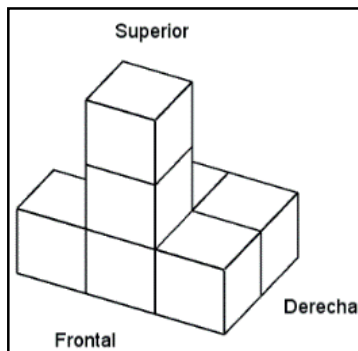


Figura 36. Respuesta experta pregunta P4.4

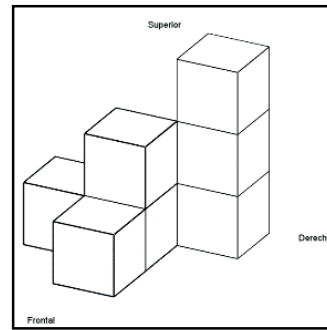


Figura 37. Respuesta experta pregunta P4.5

4.2: Une los diferentes puntos de vista, uno al lado de la otra en su forma bidimensional o tridimensional.

4.3: Dibuja vistas en 3D.

4.4: Confunde los distintos tipos de vistas al momento de dibujar el objeto tridimensional.

4.5: Dibuja vistas en 2D.