



# ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO E TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS NO CONTEXTO DO ENSINO REMOTO: UMA PROPOSTA AMPARADA PELO GEOGEBRA PARA O ENSINO DE VOLUME

INGENIERÍA DIDÁCTICA PARA LA FORMACIÓN Y TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS EN EL CONTEXTO DE LA ENSEÑANZA A DISTANCIA: UNA PROPUESTA APOYADA EN EL SOFTWARE GEOGEBRA PARA LA ENSEÑANZA DE VOLUMEN

*DIDACTIC ENGINEERING FOR TRAINING AND THEORY OF DIDACTIC SITUATIONS IN THE CONTEXT OF REMOTE TEACHING: A PROPOSAL SUPPORTED BY GEOGEBRA SOFTWARE FOR VOLUME TEACHING*

Rosalide Carvalho de Sousa  
rosalidecarvalho@hotmail.com  
Secretaria de Educação do Estado do Ceará,  
Sobral, Brasil

Francisco Régis Vireira Alves  
fregis@ifce.edu.br  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia  
do Estado do Ceará, Fortaleza, Brasil

## RESUMO

O presente trabalho apresenta uma contribuição da Engenharia Didática de Formação (EDF) articulada com a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e o software GeoGebra no ensino de Geometria Espacial. O objetivo é apresentar uma proposta didática para o ensino remoto de Volume de Sólidos Geométricos como suporte ao professor de matemática, de modo a promover uma atividade que possibilite ao aluno interpretar e resolver situações-problema por meio da movimentação da construção no GeoGebra. Para estruturar esta pesquisa, utilizaram-se as quatro fases da Engenharia Didática (ED), a saber: Análise preliminar, Análise a priori, Experimentação, Análise a posteriori e validação. A aplicação ocorreu on-line, via Google Meet, com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública no interior do Ceará, Brasil. Verificou-se que o uso da EDF aliada à TSD e com o aporte do GeoGebra, possibilita ao docente a compreensão de ações que ocorrem no interior da sala de aula, antevendo os possíveis comportamento dos alunos, além de, desenvolver o ensino de conceitos geométricos através de várias linguagens, como a visual, verbal, geométrica e textual.

## PALABRAS CLAVE:

*Engenharia Didática de Formação, Ensino de Volume, Teoria das Situações Didáticas, GeoGebra.*

## RESUMEN

El presente trabajo presenta un aporte de la Ingeniería Didáctica Educativa (EDF) articulada con la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) y el software GeoGebra en la enseñanza de la Geometría Espacial. El objetivo es presentar una propuesta didáctica para la enseñanza a distancia de Volumen de Sólidos Geométricos como apoyo al docente de matemáticas, con el fin de promover una actividad que permita al estudiante interpretar y resolver situaciones problema a través del movimiento de la construcción en GeoGebra. Para estructurar esta investigación se utilizaron las cuatro fases de la Ingeniería Didáctica (ED), a saber: Análisis preliminar, Análisis a priori, Experimentación, Análisis a posteriori y Validación. La aplicación se realizó en línea, a través de Google Meet, con estudiantes del curso de Licenciatura en Matemáticas en una universidad pública del interior de Ceará, Brasil. Se encontró que el uso de EDF combinado con TSD y con el aporte de GeoGebra, permite al docente comprender acciones que ocurren dentro del aula, anticipándose a los posibles comportamientos de los estudiantes, además de desarrollar la enseñanza de conceptos geométricos a través de diversos lenguajes, tales como visuales, verbales, geométricas y textuales.

### PALABRAS CLAVE:

*Ingeniería Didáctica para Formación, Enseñanza de Volumen, Teoría de Situaciones Didácticas, GeoGebra.*

## ABSTRACT

The present work presents a contribution of Didactic Engineering for Training (EDF) articulated with the Didactic Situations Theory (TSD) and the GeoGebra software in the teaching of Spatial Geometry. The objective is to present a proposal of a didactic situation for the remote teaching of Volume of Geometric Solids as a support to the Mathematics teacher, in order to promote an activity that allows the student to interpret and solve problem situations through the movement of the construction in GeoGebra. To structure this research, the four phases of Didactic Engineering (DE) were used, namely: Preliminary analysis, A priori analysis, Experimentation, a posteriori analysis and validation. The application took place online via Google Meet, with students of the Mathematics Degree course at a public university in the interior of Ceará, Brazil.

### KEYWORDS:

*Didactic Engineering for Training, Volume Teaching, Theory of Didactic Situation, GeoGebra.*

## 1. Introdução

A busca por metodologias e recursos didático-pedagógicos que potencializem o ensino de Geometria há muito desperta o interesse e motiva estudos entre educadores e pesquisadores da educação. Há décadas se discute, na literatura, maneiras de aproximar os conhecimentos científicos estudados na sala de aula das práticas do cotidiano, na tentativa de ressignificar o ensino para que o aluno adquira as habilidades matemáticas necessárias para uso no dia a dia, ao mesmo tempo que se tenta acompanhar a velocidade com que os recursos tecnológicos evoluem.

Diante do contexto atual, frente às mudanças provocadas pela pandemia da Covid-19, a educação, principalmente a pública, mostrou-se despreparada para implementar metodologias e recursos tecnológicos capazes de inserir o ensino no mundo das tecnologias digitais, de modo a provocar mudanças no comportamento dos estudantes e docentes, o que remete à discussão da formação de professores de matemática, em especial, para o ensino de geometria. Desse modo, Sousa e Alves (2021) ressaltam que:

[...] a Tecnologia Digital da Informação e Comunicação (TDIC), configura-se como um recurso valioso para o desenvolvimento do ensino e aprendizagem da matemática, pois [...] é nessa disciplina que as tecnologias têm sido desenvolvidas com mais força, privilegiando o docente dessa área, que pode contar com uma série de recursos, como calculadoras, jogos eletrônicos, ambientes virtuais e softwares direcionados à construção dos saberes matemáticos. (p. 2)

Sendo assim, percebeu-se a importância de realizar um estudo acerca do ensino de Volume de Sólidos Geométricos. Para tanto, buscou-se, na literatura, trabalhos que retratassem como esse conteúdo é ensinado nas escolas, de que maneira ocorre sua abordagem nos livros didáticos e quais ferramentas tecnológicas são utilizadas nesses livros para auxiliar o ensino e a aprendizagem desses conceitos.

O conteúdo de Volume, presente nos livros didáticos do Programa Nacional do Ensino Médio (PNLD), geralmente, é abordado de forma técnica, pouco contextualizada, priorizando fórmulas e cálculos sintetizados, com atividades que enfatizam as aplicações algébricas, limitando, desse modo, a visualização espacial do aluno, primordial para a compreensão de tal conceito. Observou-se, também, que tanto os exercícios propostos quanto as questões

resolvidas nas duas coletâneas analisadas não articulam o novo saber com os conhecimentos prévios dos alunos, não relacionando a matemática dos anos iniciais àquelas estudadas no ensino médio.

Ademais, Costa et al. (2009) afirmam que existem alguns fatores que ocasionam dificuldades no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos geométricos, são eles: ausência de atividades com Geometria de posição e com Desenho Geométrico, desvalorização das representações bidimensionais e tridimensionais das figuras geométricas, na exposição das aulas, valorização mecanizada dos conceitos geométricos, ausência de atividades com Geometria Espacial Métrica e de percepção, dificultando a representação mental de objetos.

Diante do exposto, percebeu-se a necessidade de elaborar e executar um ensino que promova a contextualização, de modo a conduzir o estudante à reflexão e compreensão do assunto abordado. Assim, relacionou-se, nessa investigação, o uso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação como estratégia para formular situações didáticas que estimulem o desenvolvimento das habilidades do estudante no estudo do conceito de Volume.

Partindo dessa premissa, o presente artigo apresenta uma proposta fundamentada na Teoria das Situações Didáticas (TSD) com o propósito de criar um recurso didático-pedagógico, que propicie a comunicação, entre a tríade professor-aluno-conhecimento matemático. De acordo com Camilo et al. (2020), construir essas situações didáticas, de modo dinâmico e eficaz, oferece à tríade, do processo de ensino e aprendizagem, um contributo para o desenvolvimento do ensino de Matemática, especialmente o de Geometria.

Diante do exposto, buscou-se responder ao seguinte questionamento: *É possível realizar a transposição empírica dos conceitos geométricos para a geometria dedutiva, na resolução de problemas, por meio do ensino remoto?*

Portanto, este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta didática, modelada pelo *software* GeoGebra, a partir da Teoria das Situações Didáticas e estruturada na Engenharia Didática de Formação (EDF). Como justificativa, partiu-se da necessidade de ampliar as reflexões sobre o ensino do conceito de volume, despertando mudanças na ação de ensinar e na abordagem da Geometria Espacial como um todo, diversificando a prática pedagógica dos professores que ensinam matemática, possibilitando

a interpretação e resolução de situações-problema pelos alunos, nesse caso específico, do conteúdo de volume.

Corroborando com o escopo anterior, Alves (2019) ressalta que o GeoGebra tem potencial para proporcionar ao docente maneiras de estimular os alunos a realizarem a “exploração dinâmica das propriedades numéricas e geométricas, de modo que a visualização, percepção e intuição desempenhe um papel essencial para a evolução da aprendizagem de todos os envolvidos em cada situação didática” (p. 115). Assim, para estruturar a proposta didática, selecionou-se um problema do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) que contemplasse o conteúdo de Volume de Sólidos Geométricos, objeto matemático dessa investigação. Tal escolha se deu, por tratar-se de uma prova que contempla uma extensa variedade de questões com esse tema, além de ser um exame que possui grande impacto na educação brasileira, haja vista ter como propósito principal avaliar o desempenho do aluno ao final do Ensino Médio e, portanto, direcionar políticas públicas para esse setor.

Convém ressaltar que a escolha da metodologia da EDF ocorreu por ter-se como público-alvo alunos de um curso de Licenciatura em Matemática e, portanto, professores em formação inicial, além de criar um recurso didático para o ensino do conceito de Volume. Ademais, essa metodologia propicia, segundo Almouloud e Silva (2012), a construção de situações de sala de aula, em que o docente é conduzindo a descrever ações implementadas para intermediar o ensino, para o qual é necessário planejar e prever os obstáculos que podem surgir no desenvolvimento das situações, que dificultam a condução do processo de construção dos saberes pelos alunos.

Fortalecendo o trecho anterior Tempier (2013) ressalta que uma pesquisa pautada na EDF visa ao desenvolvimento de recursos para professores, que promovam subsídios para realização de pesquisas sobre a transposição didática de conceitos matemáticos estudados. Os pesquisadores deste trabalho concordam com Alves e Catarino (2017), no esteio do pensamento, de que a EDF proporcionará compreender o processo de aprendizagem e aquisição das competências profissionais do professor, um campo que ainda apresenta muitas lacunas para o entendimento da formação do docente de matemática e sua importância no contexto da educação.

Convém ainda, demarcar alguns pressupostos relacionados com as duas engenharias. Enquanto na ED o *design* de investigação propicia realizar uma prática de intervenção controlada, acerca do entendimento

dos fenômenos de ensino e aprendizagem, com maior atenção às ações realizadas pelos estudantes, na EDF o interesse se volta para “modelizar, compreender, prever e antever” a função do docente em torno do processo e do sistema educativo (Alves e Catarino, 2017, p. 133).

Assim, a organização do percurso metodológico foi fundamentada nas fases da Engenharia Didática (ED), clássica, a saber: análises preliminares, análise *a priori*, experimentação, análise *a posteriori* e validação.

Para tanto, realizou-se uma formação com 10 alunos do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), Brasil, por meio da plataforma *on-line* do *Google Meet*. Para estruturar, e organizar o encontro, foram utilizados outros recursos, tais como: *software* GeoGebra em celulares e computadores e, o aplicativo de mensagens do *WhatsApp*.

## 2. Referencial Teórico

### 2.1 Engenharia Didática de Formação (EDF)

A Engenharia Didática (ED), clássica ou de 1ª geração, teve origem na França, com Brousseau (1965), sendo amplamente difundida nos anos 80 por Chevallard (1982) e por Artigue (1989), além do próprio Brousseau. Surgiu como uma metodologia de pesquisa que aproxima os fenômenos didáticos das ações docentes no interior de uma sala de aula. De acordo com Artigue (1995), o termo ED deu-se da comparação do pesquisador didático com o trabalho de um engenheiro que, para realização de um projeto, necessita conhecer, elaborar, executar e fundamentar uma teoria na sua implementação.

A Engenharia Didática, na concepção de Perrin-Glorian (2009), possibilita uma relação entre a pesquisa e o ensino e, portanto, propôs o estudo e a elaboração de uma transposição didática para o ensino, ao mesmo tempo em que, também, estudou outros fenômenos didáticos mais gerais, permitindo o enriquecimento e a ampliação das teorias conhecidas, provocando uma mudança de interesse no público-alvo, culminando no surgimento da Engenharia Didática de 2ª geração ou Engenharia Didática de Formação, com foco no papel do professor.

Desse modo, a EDF apresenta “por primeiro objetivo o desenvolvimento de recursos (ou objetos de aprendizagem) para o ensino regular, ou formação de professores” (Almouloud e Silva, 2012, p. 28), podendo, assim, estabelecer vários níveis de construção, incluindo situações de sala de aula, na qual o

professor é orientado a descrever as ações adotadas para intermediar o ensino. Alves (2018) corrobora com os autores, ao relatar que a EDF tem foco no papel e na função desempenhada pelo professor, uma vez que faz parte de suas funções elaborar modelos capazes de realizar uma transposição didática, provocando mudanças que promoverão transformações no conhecimento matemático, possibilitando, assim, ao aprendiz compreender as situações de ensino.

A EDF tem um grau de complementariedade com a ED, de 1ª geração, que segundo Almouloud (2011), procura aproveitar o que se produz na primeira, adequando-a às necessidades do professor. Sendo assim, evidencia-se que esses estudos se caracterizam por experimentos, nos quais o professor desempenha o papel de um engenheiro, concebendo, executando, observando e analisando sequências de ensino (Artigue, 1995).

Nesse sentido, essa pesquisa segue as etapas da ED, a saber: Análises prévias ou preliminares; Concepção e Análise *a priori*; Experimentação; Análise *a posteriori* e validação. Observe o esquema na Figura 1.

Figura 1. Esquema das etapas da Engenharia Didática



Nota. Elaborado pelo(s) autor(es) (2021).

Na Figura 1, apresentou-se a visualização das fases da ED que revela um posicionamento estrutural dessa investigação. Desse modo, iniciou-se essa pesquisa pela etapa das análises preliminares, na qual procurou-se direcionar os estudos nas perspectivas que envolvem o objeto matemático dessa pesquisa, como por exemplo, análise da metodologia didática empregada no ensino desse conceito e seus efeitos na aprendizagem, uma análise das concepções dos alunos, quais dificuldades e obstáculos podem inviabilizar sua evolução, a análise do público-alvo e onde a pesquisa será aplicada. Assim, essa primeira fase tem como função subsidiar o professor (pesquisador), no que concerne ao conhecimento geral do objeto da pesquisa, possibilitando a elaboração e a construção de um recurso que vise à apropriação de saberes matemáticos pelos discentes, promovendo meios que possibilitem a superação dos obstáculos identificados por meios da construção das situações didáticas.

Tais situações atuam sob o controle das variáveis didáticas, definidas pelo pesquisador, característica da segunda etapa, a análise *a priori*. Essas variáveis são identificadas como macrodidáticas e microdidáticas. Artigue (1995) denomina as variáveis macrodidáticas, ou globais, quando relacionadas à organização geral da engenharia, e, as microdidáticas, ou locais, àquelas que tratam da organização de uma sessão didática, sendo esta utilizada na concepção da sequência de ensino. Esse foi o momento em que, também, formulou-se a situação didática do ENEM, com o amparo do software GeoGebra.

No terceiro momento, tem-se a fase da Experimentação, conhecida como a fase clássica da ED, que se constitui na aplicação da situação didática com os sujeitos envolvidos na pesquisa e na coleta de dados obtidos por meio de fotos, áudios, vídeos, escritas, relatos, entre outros, para serem analisados na última fase da engenharia.

Na etapa final, análise *a posteriori* e validação, faz-se uma análise dos dados coletados, proveniente da confrontação com hipóteses levantadas no momento da análise *a priori*, sendo avaliado se o procedimento obteve êxito ou falhas. Para uma abordagem mais profunda das etapas da ED, recomenda-se a leitura de Artigue (1995).

Na sessão subsequente, apresenta-se a Teoria das Situações Didáticas em suas quatro fases, tendo em vista estruturar um recurso didático-pedagógico para o ensino de matemática, capaz de repercutir na formação e no aperfeiçoamento de professores.

## 2.2 Teoria das Situações Didáticas (TSD)

A TSD é um modelo teórico desenvolvido na França por Guy Brousseau, por volta de 1980, com o intuito de propiciar a criação de um ambiente de ensino e aprendizagem matemático que relacione professor, aluno e saber (Figura 2).

Figura 2. Triângulo Didático de Brousseau



Nota. Elaborado pelo(s) autor(es) (2021).

Essa relação didática, segundo Sousa et al. (2021), dá-se a partir de um meio organizado pelo professor, propiciando interações que estimulem o aprendizado dos discentes, levando em consideração os elementos humanos, professores e alunos, mediadas pelo saber, caracterizando os elementos não-humanos que determinam o modo como essas relações irão se desenvolver. Nesse sentido, é essencial a participação do docente, haja vista que faz parte de suas atribuições escolher o problema, determinar de que modo a mediação ocorrerá e como organizá-la para estabelecer essa tríade. Para Almouloud (2007), a mediação do professor estabelece uma relação apoiada em três hipóteses, como segue:

1. O aluno aprende adaptando-se a um *milieu* que é fator de dificuldade, de contradições, de desequilíbrio [...]. Esse saber, fruto da adaptação dos alunos, manifesta-se pelas respostas novas, que são a prova da aprendizagem.
2. [...] O professor deve criar e organizar um *milieu* que seja suficiente para desenvolver situações de provocar essas aprendizagens.
3. A terceira hipótese postula que esse *milieu* e essas situações devem engajar os conhecimentos matemáticos envolvidos durante o processo de ensino e aprendizagem (Almouloud, 2007, pp. 32-33).

Assim, observa-se que essas hipóteses dão suporte ao professor para organizar um ambiente que vise a ensinar conteúdos matemáticos que promovam o aprendizado e suscitem as ações discentes frente aos problemas propostos.

No entanto, durante esse processo de organização do meio, algumas variáveis podem surgir, apresentando-se de dois modos: situação didática e situação adidática. De acordo com Alves et al. (2020), a primeira consiste na interação do aluno em uma situação de jogo ocorrendo, sempre que há, uma intenção do professor de desenvolver um aprendizado. Na segunda, o aluno evolui por seu próprio mérito para desenvolver a aprendizagem, mediante as regras do jogo, anteriormente estabelecidas pelo docente. Portanto, uma situação adidática se torna indispensável em situações didáticas, possibilitando ao aprendiz agir, formular hipóteses, validar e, finalmente, o professor procederá à institucionalização do saber.

Para analisar as relações entre as atividades de ensino, e o conhecimento matemático, os pesquisadores utilizaram as etapas da TSD de ação, formulação, validação e institucionalização, descritas a seguir, de acordo com Brousseau (1986).

*Situação de Ação:* Essa é uma situação em que o saber do objeto estudado se manifesta por meio da reflexão, simulação na tentativa de estabelecer estratégias de resolução, dentro de um esquema de adequação com o meio, tomando as decisões necessárias para solucionar o problema.

*Situação de Formulação:* É uma situação que relaciona a interação de dois ou mais alunos com o milieu. Esse é o momento da troca de informações entre os participantes com o intuito de formular uma resolução para a situação-problema, podendo ocorrer por meio de uma linguagem escrita ou oral, sem o uso explícito da linguagem matemática formal. Nesse ambiente, a comunicação é essencial para o sucesso na formação de um saber direcionado.

*Situação de Validação:* Em uma dialética de validação, os alunos, também, tentam estabelecer a validade do conhecimento, convencendo os interlocutores da veracidade de suas soluções, fazendo uso de uma linguagem matemática mais apropriada como, por exemplo, demonstrações ou provas. Nesse momento acontece a organização do que foi estudado e analisado pelos alunos, ou seja, se houve a construção de um novo saber.

*Situação de Institucionalização:* essa é uma situação em que ocorre a passagem do conhecimento individual para a dimensão histórica, estabelecendo a convenção social e revelando a intenção do professor. Nessa fase, o docente reassume o controle da sessão didática, promovendo um levantamento de todos os dados apresentados pelos discentes. E, por fim, sintetiza todas as informações e estratégias, formalizando em um único modelo de resolução matemática.

Portanto, a TSD assume o caráter de fundamentar a concepção e proposição da situação-problema utilizada na experimentação dessa pesquisa. No entanto, devido à condição de isolamento social imposta pela pandemia, foram necessárias mudanças no processo de ensino, migrando para modalidade remota. Assim, no tópico seguinte, traz-se uma síntese do ensino remoto e sua aplicação em tempos de pandemia.

### 2.3 Ensino de Volume

O tema Áreas e Volumes está presente em situações do cotidiano, exercendo papel de destaque em diversas profissões, tais como: a agricultura, construção civil, artes, medicina, engenharia, entre outras. Ressalta-se, também, que o assunto faz parte do currículo da educação básica. Sendo assim, é importante relacionar a matemática com outras áreas do conhecimento e

com o entorno social do aluno. Portanto, as grandezas geométricas referentes ao comprimento, área e volume apresentam conhecimentos relevantes às vivências de um indivíduo em sociedade, justificando-se assim a importância desse assunto no processo de ensino e aprendizagem da educação básica.

Ademais, as instruções normativas presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o ensino básico (2018) têm como finalidade nortear e estruturar os currículos escolares. O documento propõe que a Geometria seja apresentada do seguinte modo: “No que se refere a grandezas e medidas, os estudantes constroem e ampliam a noção de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, e obtêm-se expressões para o cálculo da medida de área de superfícies planas e da medida de volume de alguns sólidos geométricos” (BNCC, 2018, p. 527).

Com isso, o ensino de “Volume” assume uma importância ainda maior no cenário escolar. Desse modo, a maneira como o tema é apresentado aos alunos pelos professores é motivo de inquietação entre os estudiosos e pesquisadores da educação, há bastante tempo. Um dos motivos que podem ser relacionados para tal, são as deficiências apresentadas pelos aprendizes, no que diz respeito aos conceitos básicos da Geometria Plana. Outro fato a ser considerado nesse processo são as dificuldades conceituais dos próprios professores em conceitos básicos da Geometria Plana e Geometria Espacial (Costa et al., 2009).

Situações como essas conduzem à reflexão sobre a formação dos professores de matemática, pois segundo Pavanello (2001), o professor ao ministrar sua aula não atenta para a necessidade de “[...] trabalhar relações existentes entre figuras, fato esse que não auxilia o aluno a progredir para um nível superior de compreensão de conceitos” (p. 183). Isso pode prejudicar a apropriação de conhecimentos geométricos por parte dos alunos, impedindo que as habilidades e competências desses conceitos sejam consolidadas, comprometendo a preparação dos discentes na continuação da formação estudantil, como também no exercício do trabalho e cidadania. No trabalho de Vuelma et al. (2011), eles observaram que os alunos possuem poucos conhecimentos geométricos, pois mesmo reconhecendo figuras planas, aplicam as fórmulas com dificuldades e, portanto, não conseguem identificar quais devem ser usadas na resolução do problema e menos ainda reconhecem nas figuras, as medidas que são importantes para o cálculo.

Desse modo, verifica-se que houve poucas

mudanças na metodologia empregada para o ensino do conteúdo de “Volumes” e da matemática como um todo, refletindo numa aprendizagem deficiente de tais conceitos. Assim, é notório que mudanças precisam ocorrer no processo de ensino e que elas perpassam diretamente pela formação de professores, uma vez que se faz necessário desenvolver trabalhos que articulem a matemática com as ciências, para ajudar a compreender a matemática do cotidiano. Ademais, é importante também direcionar um olhar investigativo do domínio do professor em relação ao referido conteúdo, uma vez que a maioria dos estudos presentes na literatura que tratam desse tema, foca na aprendizagem do aluno.

## 2.4 Ensino Remoto

O início da pandemia fez pesquisadores e educadores voltarem os olhos para o ensino remoto e as tecnologias na educação. Foi necessário repensar o ensino e os meios para que a escola chegasse aos alunos. Em razão disso, foi preciso recorrer às diversas ferramentas tecnológicas disponíveis, tais como: atividades *on-line*, plataformas digitais, aulas gravadas, mídias sociais, aulas síncronas, *softwares* educativos, entre outros.

Assim sendo, torna-se essencial refletir e esclarecer a educação mediada pelo ensino remoto. De acordo com Moreira e Schlemmer (2020): “O Ensino Remoto ou Aula Remota se configura então, como uma modalidade de ensino ou aula que pressupõe o distanciamento geográfico de professores e estudantes” (p. 8), ocorrendo de modo virtual e síncrono, com foco centrado nas informações e no modo como elas são transmitidas.

Diante desses acontecimentos, o professor teve que estabelecer novas estratégias de ensino, utilizar recursos digitais, mobilizar novos conhecimentos; enfim, buscar ferramentas que possibilitem estabelecer uma interação com o estudante, na tentativa de minimizar os impactos negativos que essa modalidade pode causar na aprendizagem. No entanto, ainda há muitos obstáculos para que o ensino remoto consiga atingir todo o público-alvo necessário. Para Sousa e Alves (2021), existem dificuldades que precisam ser sanadas, tais como: muitos alunos não têm acesso à internet, computadores e celulares, impossibilitando participar das aulas remotas; os professores foram sobrecarregados no planejamento e execução de aulas nessa modalidade, pois tiveram que destinar horas de pesquisa na busca de informações e metodologias para serem aplicadas em suas aulas e, ainda, arcaram com todas as despesas que esse sistema exige: internet, computador, celular,

energia, entre outros, causando uma sobrecarga de trabalho que, conseqüentemente, trará danos físicos e psicológicos na vida do educador.

Diante do cenário da pandemia, o ensino de matemática, assim como os outros, necessitou de grandes transformações. Para o planejamento e execução das aulas remotas foi necessário o uso de recursos tecnológicos, possibilitando uma maior interação dos alunos com os conteúdos estudados. Nesse sentido, Gonçalves e Cunha (2021) enfatizam que o uso das mídias tecnológicas, enquanto mídia educativa, permitem que ela seja produzida e usada para ajudar a suavizar a Matemática e tornar seu estudo mais agradável e interessante. Para Sousa e Alves (2021) a compreensão desses ambientes e a correta aplicação de ferramentas tecnológicas pode ser um aliado valioso no ensino remoto, “deixando para trás a velha didática de memorização de fórmulas matemáticas” (p. 3) proporcionando, assim, o verdadeiro propósito docente que é intermediar o acesso do aluno ao conhecimento.

Em virtude do exposto, evidenciam-se algumas fragilidades na educação, mostrando a necessidade de mudanças, de modo que o estudante possa desempenhar seu papel enquanto protagonismo na apropriação do saber. Assim, procurou-se, nesse trabalho, relacionar a TSD ao ensino remoto, fazendo uso do aplicativo de mensagem de *WhatsApp* e do *software* GeoGebra, que pode ser acionado tanto no celular quanto no computador, haja visto que plataformas e aplicativos como esses podem favorecer a união da tecnologia com a Matemática ampliando o alcance de alunos e permitindo a personalização dos saberes.

No escopo seguinte, trazem-se os procedimentos metodológicos deste trabalho, almejando responder à questão desta pesquisa e alcançar o objetivo proposto.

### 3. Procedimentos Metodológicos

Esta é uma pesquisa de cunho qualitativa, fundamentada na Engenharia Didática (ED) com ênfase na Engenharia Didática de Formação (EDF), sendo essa última vista como uma extensão da primeira engenharia, na qual buscou-se analisar as percepções de docentes em formação inicial, acerca do uso de um recurso didático no contexto do ensino do conteúdo de volume. Portanto, a metodologia da EDF segue o roteiro da ED que foi alicerçada em suas quatro fases, para estruturar a aplicação desta investigação.

### 3.1 Análise preliminar

Na primeira etapa da ED, análises preliminares, com o intuito de verificar, na literatura, como o objeto matemático dessa investigação é tratado no processo de formação docente, elencaram-se autores como Douady e Perrin-Glorian (1989), Costa et al. (2009), Figueiredo et al. (2014), Awila (2017), entre outros. Todos esses estudos recomendam a necessidade da apropriação dos conceitos de grandezas geométricas e volume de sólidos, tanto na formação de professores quanto na aprendizagem dos alunos da educação básica.

Ainda na etapa das análises preliminares, procurou-se realizar, também, uma análise dos livros didáticos inscritos no PNLD e da matriz de referência do ENEM, com o intuito de verificar como eles abordam o volume de sólidos geométricos, com a intenção de avaliar os conhecimentos prévios dos discentes sobre o objeto matemático dessa investigação, como também o modo em que tal assunto é tratado na referida avaliação externa (ENEM). Desse modo, selecionaram-se 02 (dois) livros didáticos e 01 (uma) matriz de referência, conforme apresenta-se no Quadro 1.

Quadro 1. Livros selecionados para análise

Livro	Autores	Ano	Volume	Editora
Luiz Roberto Dante	Matemática: Contexto & Aplicações	2016	2 e 3	Ática
Gelson Iezzi; Osvaldo Dolce; David Degenszajn; Roberto Pérego; Nilze de Almeida.	Matemática: Ciências e Aplicações	2017	2	Saraiva
Matriz do ENEM	Brasil	2009	-	-

Nota. Elaborado pelos autores.

A escolha dos referidos livros ocorreu por serem obras adotadas por escolas do Ensino Médio, além de fazerem parte do acervo disponibilizado pelo PNLD. Os livros apresentam linguagens simples, com exercícios tradicionais, porém, procuram desenvolver a capacidade reflexiva, o trabalho cooperativo e



trazem como sugestões a utilização de ferramentas tecnológicas como calculadoras, *softwares* dinâmicos, planilhas eletrônicas, dentre outros.

No que tange à abordagem do conteúdo de Volume de Sólidos, verificou-se que tais exemplares apresentam o cálculo de área de figuras poligonais de forma clara e precisa, as fórmulas são deduzidas e muito bem explicadas. Geralmente, os professores seguem a sequência de distribuição dos conteúdos nos livros didáticos: teoria, demonstração e exercícios, supervalorizando fórmulas, ao invés de desenvolver as noções intuitivas de conceitos geométricos. No próximo tópico, faz-se uma análise mais detalhada sobre essas obras, enfatizando o ensino de Volumes.

### 3.1.1 Livro 1: Matemática: Contexto & Aplicações

Este livro didático faz parte do acervo proposto pelo PNLD para escolas públicas, sendo adotado por várias delas. Seu layout é dinâmico, com bom uso das cores, trazendo na abertura de seus capítulos a ilustração de objetos ou imagens rurais e urbanas, acompanhadas

de uma breve descrição associada ao conteúdo matemático da unidade, proporcionando ao discente a leitura, a análise e a reflexão do tema abordado em cada divisão. Convém ressaltar que o assunto de Corpos Redondos é tratado no volume 3 da coletânea; por esse motivo, realizou-se, também, uma análise desse exemplar.

Na Figura 3, tem-se uma abordagem sobre o Volume do Cone, em que se inicia o tópico fazendo um paralelo da Pirâmide e do Cone no plano horizontal, a partir do princípio de Cavalieri, onde é possível observar a relação entre os volumes do prisma e da pirâmide de mesma altura e mesma área da base, constatando que os dois objetos possuem volumes iguais. Dando prosseguimento, tem-se a dedução da fórmula para o cálculo do volume do Cone por meio do princípio de Cavalieri. Finalizando o capítulo, o livro traz um texto sobre a Geometria e conhecimento científico, mostrando a evolução do ser humano na busca por esses conhecimentos, desde os gregos até a Geometria que se estuda atualmente.

Figura 3. Volume do cone

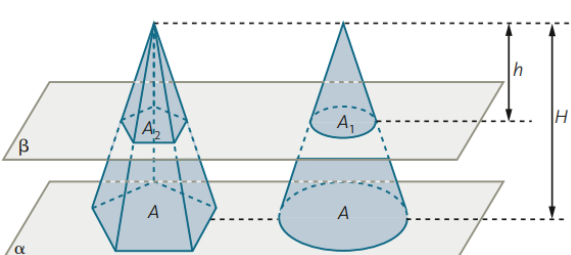
### Volume do cone

Mais uma vez usaremos o princípio de Cavalieri.  
 Consideramos um cone de altura  $H$  e base de área  $A$  contida em um plano horizontal  $\alpha$ .  
 Também consideramos uma pirâmide de altura  $H$  e base de área  $A$  contida em  $\alpha$ .  
 Se um plano horizontal  $\beta$  com distância  $h$  dos vértices secciona os dois sólidos, determinando regiões planas de áreas  $A_1$  e  $A_2$ , temos:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{h^2}{H^2} \text{ e } \frac{A_2}{A} = \frac{h^2}{H^2} \Rightarrow \frac{A_1}{A} = \frac{A_2}{A} \Rightarrow A_1 = A_2$$

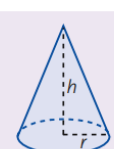
Pelo princípio de Cavalieri podemos afirmar que o cone e a pirâmide iniciais têm o mesmo volume. Como já sabemos o volume da pirâmide  $\left( V = \frac{AH}{3} \right)$ , o volume do cone também é o mesmo.

Então, para um cone circular de raio  $r$  e altura  $h$ , podemos dizer que:



$$V_{\text{cone}} = \frac{\text{área da base} \cdot \text{altura}}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} A_b h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$


Nota. Dante (2016, p. 80).

No que concerne ao aspecto didático-metodológico, mantém-se a sequência: demonstrações – exercícios resolvidos – exercícios de fixação, das mais simples até as complexas, com poucas questões contextualizadas, exceto quando se trata daqueles exercícios referentes ao ENEM. As demonstrações dos conceitos são detalhadas, trazendo uma contextualização sobre cada tópico e apresentando a dedução da fórmula.

Referente ao volume 2, dessa coletânea, a abordagem didática segue a mesma sequência descrita no escopo anterior. No entanto, ao final do capítulo de Poliedros e Prismas há uma seção intitulada “Pensando no ENEM”, com exercícios sobre o tema estudado na unidade. Para finalizar, o livro traz exercícios complementares, com questões de vestibulares tradicionais e do Exame Nacional do Ensino Médio.

Convém salientar que, apesar do autor declarar, em nota de edição, que a coleção traz questões contextualizadas, estas não aparecem em toda a extensão do livro. Tanto no livro 2 quanto no 3, apareceram em alguns casos e, dentre elas, as mais utilizadas são relacionadas ao ENEM.

Observou-se que, nos exemplares, não há sugestões metodológicas para que o professor utilize recursos tecnológicos no ensino de Geometria Espacial. Diante do exposto, apresenta-se o GeoGebra como ferramenta de auxílio ao docente para planejar, elaborar e executar o ensino de Geometria Espacial, no caso específico dessa investigação do conteúdo de Volume de Sólidos, visando apresentar uma proposta que possibilite ao aluno manusear, modificar, construir, visualizar e verificar propriedades e elementos dos sólidos, dentro de um ambiente de geometria dinâmica.

### 3.1.2 Livro 2: Matemática ciência e aplicações

Este é outro livro que faz parte da proposta presente no PNLD para o ensino médio das Escolas Públicas no triênio 2018-2020. Seu layout é dinâmico e de fácil interpretação. Sempre que possível, o início do capítulo é introduzido por situações do cotidiano, intercalando com a história da Matemática e, dessa forma, situando o aluno no processo de resolução de problemas, enfrentados pelo homem, ao longo do tempo. Na Figura 4, tem-se um recorte sobre como o livro trabalha tema do Volume da Esfera, demonstrando, detalhadamente, a dedução da fórmula para seu cálculo.

Figura 4. Volume da esfera – abordagem geométrica

**Volume da esfera**

O volume  $V$  de uma esfera de raio  $r$  é dado por:  $V = \frac{4\pi r^3}{3}$

**Demonstração:**  
 Vamos tomar um cilindro equilátero, cujo raio da base mede  $r$  e a altura mede  $2r$ .  
 Seja  $V$  o ponto médio do segmento  $MN$ , contido no eixo do cilindro. Desse cilindro retiramos dois cones cujas bases coincidem com as bases do cilindro. Esses cones têm como vértice comum o ponto  $V$ , e a medida de suas alturas é  $r$ , como mostra a sequência de figuras abaixo. O sólido geométrico obtido será indicado por  $G$ .

Considere agora uma esfera de raio  $r$  e o sólido  $G$  obtido anteriormente. Imagine que essa esfera seja tangente a um plano  $\alpha$  e que o cilindro original descrito tenha uma das bases contida em  $\alpha$ .

figura A – esfera      figura B – sólido  $G$       figura C

seção da esfera por  $\beta$       seção do sólido  $G$  por  $\beta$

Quando um plano  $\beta$ , paralelo a  $\alpha$ , intersecta a esfera a uma distância  $d$  de seu centro, ele determina nela um círculo de raio  $s$  cuja área é:

$$\pi s^2 = \pi \cdot (r^2 - d^2) \quad \text{① (Veja a figura A.)}$$

O plano  $\beta$ , naturalmente, também intersecta o sólido  $G$ , a uma distância  $d$  de  $V$ , determinando, como seção, uma coroa circular. Essa coroa circular é limitada por duas circunferências: uma de raio  $r$  e a outra de raio  $d$ , com  $r > d$ , cuja área é dada por:

$$\pi \cdot (r^2 - d^2) \quad \text{② (Observe nas figuras B e C que o triângulo VAB é isósceles e, portanto, AB = d.)}$$

Por ① e ②, concluímos que as áreas das seções na esfera e no sólido  $G$  são iguais. Logo, pelo princípio de Cavalieri, a esfera e o sólido  $G$  têm o mesmo volume.

O volume do sólido  $G$  pode ser calculado por:

$$V_G = V_{\text{cilindro}} - 2 \cdot V_{\text{cone}}$$

$$V_G = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 2r}{h} - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi \cdot r^2 \cdot r}{h} \Rightarrow V_G = 2\pi r^3 - \frac{2}{3} \pi r^3 \Rightarrow V_G = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Segue, daí, que o volume da esfera também é dado por:  $V_{\text{esfera}} = \frac{4\pi r^3}{3}$

Nota. Iezzi et al. (2016, pp. 215-216).

Na imagem da Figura 4, é possível observar que os autores tiveram o cuidado de mostrar a dedução da fórmula para o cálculo do Volume da Esfera de modo detalhado, com ilustrações, e explicar o passo a passo do raciocínio geométrico até chegar à dedução algébrica da fórmula matemática, finalizando com um exemplo em que é possível empregar a fórmula apresentada para solucionar o problema. Convém ressaltar que, mesmo a explicação sendo bem rica no detalhamento, torna-se difícil para o aluno visualizar e entender os conceitos em imagens estáticas. Sendo assim, apresenta-se a sugestão de trabalhar esse assunto através do software GeoGebra, pois o uso dessa ferramenta tecnológica possibilita ao aluno visualizar e movimentar o objeto em terceira dimensão, facilitando a compreensão do conteúdo. A abordagem, didático-metodológica, acompanha a sequência tradicional: demonstrações – exercícios

resolvidos – exercícios propostos, em que as atividades são distribuídas de acordo com o nível, indo das mais simples até as mais complexas. Um ponto bastante positivo, nesse livro, é que ele traz uma quantidade bem expressiva de questões contextualizadas, aproximando o tema com a realidade e oferecendo, ao discente, uma variedade de situações-problema que aproximam a matemática da escola com o cotidiano. O exemplar ainda apresenta a seção “Troque ideias”, com atividades para serem realizadas em grupo e, a seção “Aplicações”, com textos que empregam o conhecimento matemático em outros campos, por exemplo, estabelecendo uma ligação entre a Matemática e a Física ou a Matemática e a Economia, possibilitando o aprofundamento de alguns conceitos e a construção de outros.

Observou-se nessa obra que, em alguns momentos, os autores apresentam sugestões aos professores para o uso de recursos tecnológicos, como por exemplo, no capítulo sobre Trigonometria na Circunferência em que se tem o uso do GeoGebra para construção dos gráficos das razões trigonométricas; no entanto, no que tange ao capítulo de Geometria Espacial, não há nenhuma orientação ao uso de ferramentas tecnológicas. Partindo dessa premissa, enfatiza-se o uso do *software* GeoGebra para o ensino do conceito de Volume, tanto para a introdução do conteúdo quanto para auxiliar os alunos na resolução do exercício, em um ambiente de geometria dinâmica.

### 3.1.3 Matriz de referência do ENEM

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é um programa do governo federal, criado pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC), com o objetivo de avaliar o desempenho do aluno ao término do Ensino Médio, além de propiciar a oportunidade de ingressar no ensino superior, haja vista que seus resultados são usados como critério de seleção por várias universidades públicas e privadas. Tal avaliação possibilita ainda direcionar as políticas públicas brasileiras para o desenvolvimento da educação básica.

A matriz de referência do ENEM para a disciplina de Matemática reúne um conjunto de competências e habilidades que o estudante deve possuir sobre um determinado conteúdo, em cada série do Ensino Médio, que serão avaliados através de um teste padronizado.

Para realização da prova do ENEM, o conteúdo de Volume de sólidos aparece interligado ao tópico de Geometria Espacial. Desse modo, a matriz orienta que os estudantes saibam interpretar a localização de

objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional, consigam identificar características de figuras planas e espaciais, resolvam situações-problema do cotidiano que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.

A Geometria Espacial, presente nessa matriz, envolve problemas contextualizados com situações da realidade, aparecendo em questões que vão desde o reconhecimento de sólidos geométricos até suas principais propriedades e elementos. São recorrentes ainda em problemas envolvendo área total e volume de sólidos geométricos e suas planificações. Assim, nesse estudo, abordou-se o conceito de Volume de Cone e Esfera em uma situação didática do ENEM.

### 3.2 Análise a priori

Após o processo de análise textual dos livros didáticos e da matriz de referência, selecionou-se um problema do ENEM, envolvendo o conteúdo de Volume do Cone e da Esfera, que foi estruturado nas quatro fases da TSD e construído no GeoGebra por tratar-se de um *software* matemático que permite ao aprendiz movimentar figuras e objetos, realizando simulações que possibilitam melhorar a compreensão dos conteúdos matemáticos implícitos no enunciado da questão, além de propiciar ao professor um recurso tecnológico que pode auxiliá-lo no planejamento e na execução de práticas docentes.

Nessa fase, escolhem-se as variáveis globais e locais, já apresentadas nessa investigação. Utilizaram-se as variáveis locais por tratar-se de um público-alvo pequeno e não ter ocorrido comparação de resultados com outros dados externos. A questão proposta foi selecionada da prova do ENEM do ano de 2010 e será trabalhada com mais afinco nos resultados e discussão.

### 3.3 Experimentação

A aplicação da situação didática foi realizada na terceira etapa da ED, a experimentação, com um grupo de 10 (dez) alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú, localizada no município de Sobral, estado do Ceará, Brasil. Em virtude da pandemia da Covid-19, o processo ocorreu em um encontro virtual, por meio da ferramenta *Google Meet*, com duração de 120 minutos. Os futuros professores receberam a questão do ENEM, através do aplicativo de mensagem do *WhatsApp*, em pdf, além do arquivo da construção do problema no GeoGebra. Achou-se por bem, disponibilizar esses materiais para o grupo, também, por meio de links e *QR-Code*, na tentativa de garantir que todos

os participantes tivessem acesso aos recursos e dispositivos necessários para o desenvolvimento do experimento.

Os futuros professores foram orientados a formarem 03 (três) equipes, distribuídas do seguinte modo: 02 (dois) grupos com 03 (três) membros e 01 (um), com 04 (quatro) participantes. No entanto, para este trabalho limitou-se a apresentar os resultados de apenas 01 equipe, devido a grande quantidade de dados analisados na investigação, e, também, a limitações de caracteres permitidos para o manuscrito. Os grupos criaram subgrupos, no *WhatsApp*, para promover as trocas de ideias e a construção de estratégias de resolução da situação-problema do ENEM. Torna-se importante ressaltar que o cancelamento de aulas presenciais, imposta pela pandemia, fez com que as fases da TSD fossem adaptadas à modalidade de ensino virtual, tencionando garantir a realização de todas as suas fases.

Para garantir que todos os dados fossem coletados, os licenciandos foram orientados a fazerem *screenshot* das conversas realizadas em seus respectivos grupos de *WhatsApp*, fotos e/ou gravações de vídeo das resoluções no caderno, da manipulação do objeto no GeoGebra e de quaisquer outras anotações realizadas pelos participantes. Cada equipe deveria escolher um representante para expor as resoluções por eles formuladas. Ao final do encontro, todos os registros deveriam ser enviados aos pesquisadores para a devida análise e validação. Esse processo assinalou nosso contrato didático.

Na última etapa, análise *a posteriori* e validação interna, característica da ED, ocorreu o estudo dos dados coletados, resultado da confrontação com as hipóteses previamente estabelecidas na análise *a priori*. A seguir, apresenta-se a situação didática aplicada nessa investigação e os resultados da análise realizada na última etapa da Engenharia Didática.

#### 4. Resultados e discussão

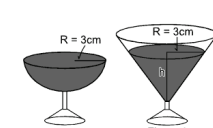
Norteadas pela pergunta central dessa pesquisa, tencionou-se que esse questionamento fosse respondido na etapa da experimentação, na qual a situação seria aplicada e, posteriormente, validada na análise *a posteriori*, última etapa da Engenharia Didática. Concretizaram-se as variáveis microdidáticas pela construção da situação didática de uma questão selecionada da prova do ENEM, modelada pelo GeoGebra, com o propósito de promover aos futuros professores, um mecanismo de auxílio para estruturar um modelo de resolução do problema proposto. Convém ressaltar que esses resultados são originados

de uma pesquisa de mestrado acerca de problemas do Exame Nacional do Ensino Médio, sobre conceito de volume de sólidos para o ensino de matemática e a formação de professores.

A questão foi retirada da prova do ENEM, ocorrida durante o ano de 2010, referente aos volumes da esfera e de um cilindro reto (Quadro 2).

Quadro 2. Questão de Volume do Enem caderno azul

Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.



Considere:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{e} \quad V_{\text{cone}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

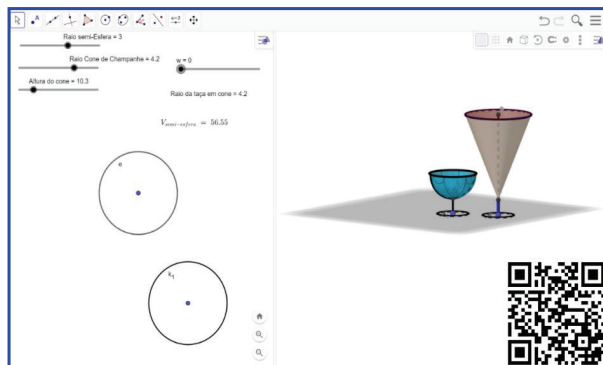
(A) 1,33.  
 (B) 6,00.  
 (C) 12,00.  
 (D) 56,52.  
 (E) 113,04.

Nota. Prova do Enem (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2010).

A aplicação da situação didática foi realizada na plataforma *Google Meet*, em que o problema e a construção no GeoGebra foram disponibilizados pelos pesquisadores por meio de *link* e *QR-Code*. Para garantir que todos os participantes tivessem acesso ao material, deduziu-se, por ser mais viável, dispor o pdf da questão do ENEM e o arquivo ggb da construção no *software*, por meio do aplicativo de *WhatsApp*.

Assim, os pesquisadores dispuseram um tempo para que os licenciandos mobilizassem seus conhecimentos matemáticos extraídos da leitura do problema. Os participantes, também, foram orientados a utilizarem o GeoGebra (Figura 5) para estabelecer estratégias de solução. Ademais, para que o leitor possa acompanhar a movimentação dinâmica da questão, disponibiliza-se na imagem o *QR Code* de acesso a construção no *software* GeoGebra.

Figura 5. Visualização do problema do ENEM no GeoGebra

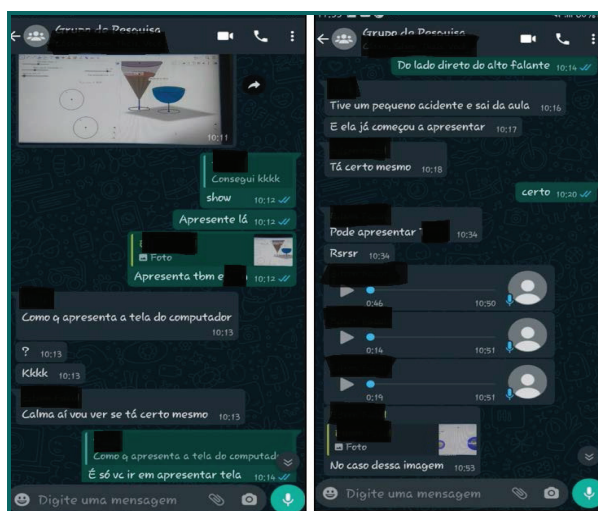


Nota. Elaborado pelo(s) autor(es) (2019).

Desse modo, os participantes realizaram a leitura do problema, acessaram o arquivo da construção no GeoGebra e iniciaram as primeiras conjecturas para estruturarem um esboço de resolução da situação proposta, caracterizando, portanto, a primeira fase da TSD, a dialética da ação. De acordo com Alves et al. (2020), nesse momento, os alunos, frente a uma situação didática, realizam procedimentos, planejam e formulam hipóteses, na tentativa de descobrir elementos e propriedades matemáticas que estão presentes no enunciado do problema. É importante salientar que nessa primeira fase da TSD não houve nenhum prejuízo com relação à aplicação presencial, haja vista que os participantes conseguiram ter acesso a todo o material necessário para realizar a atividade.

Após o primeiro contato com a situação-problema, os futuros professores iniciaram a troca de ideias no grupo de *WhatsApp* (Figura 6), tentando estabelecer diretrizes capazes de solucionar a questão, conforme pressupostos da análise *a priori*.

Figura 6. Dialética da formulação via *WhatsApp* do grupo 1



Nota. Dados da pesquisa (2020).

Diante do exposto, traz-se a transcrição das mensagens de áudio, trocadas pelo grupo, no momento da formulação. Para garantir o anonimato dos participantes, eles foram nomeados de P1, P2, P3 e P4.

P3: Como no caso, eu tenho que ter o mesmo volume, eu igualei o volume da esfera com o volume do cone.

P4: Eu fiz no GeoGebra, movimente aqui o raio dos controles deslizantes e coloquei o raio da semiesfera 3, como ele fala na questão. A do champanhe 3 e o raio da taça em cone 3. Aí, ele me deu o volume da semiesfera.

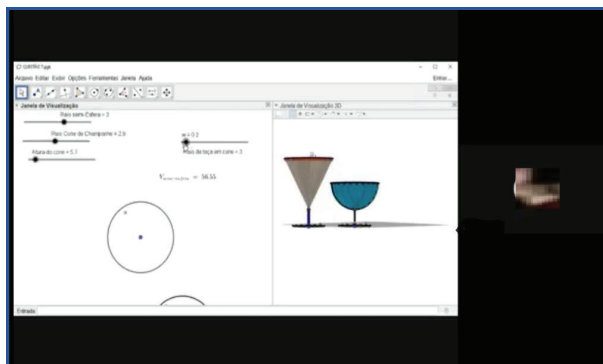
P1: Fiz as movimentações no GeoGebra, depois fiz o cálculo no caderno para comprovar. Achei o mesmo resultado.

P2: Fiz o cálculo no caderno, achei 6 para a altura.

Assim, os membros do grupo realizaram as trocas de informações via mensagem no celular e formularam seus modelos matemáticos de resolução. É conveniente ressaltar que os futuros docentes revelaram que usaram a construção no *software* GeoGebra para mobilizar os conhecimentos epistêmicos e pragmáticos que propiciassem a criação de um modelo algébrico de solução para a situação apresentada, conforme se evidencia na imagem dos diálogos do grupo exibida na Figura 7. Com relação à modalidade presencial, percebeu-se nessa segunda fase da TSD, que na aplicação remota não foi possível estabelecer um diálogo entre os participantes de modo a promover uma maior interação entre eles, pois para os pesquisadores, o contato visual no momento da manipulação no GeoGebra e da formulação do cálculo algébrico pode ser considerado um fator importante no processo de construção do conhecimento.

Em seguida, realizou-se a etapa da validação, na qual um representante do grupo expôs a todos os participantes, as estratégias que utilizou para solucionar o problema. Portanto, exibe-se a dialética de validação de um dos grupos, Figura 8.

Figura 7. Dialética da validação via Google Meet do grupo 1



Nota. Dados da pesquisa (2020).

Mediante o relato, captado no ambiente virtual, no momento da apresentação, percebe-se o uso do GeoGebra para estabelecer um modelo de resolução.

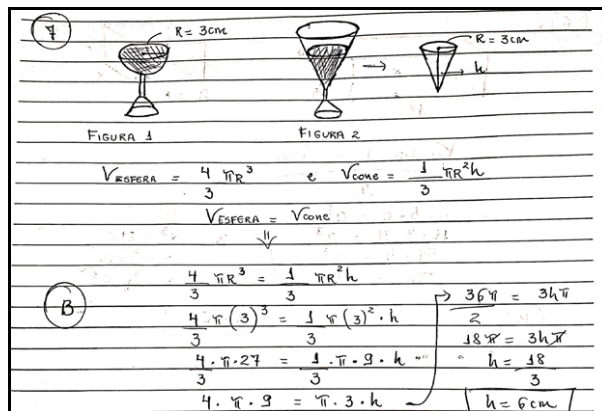
P4: Na questão ele fala que o raio da taça da figura 1 e da figura 2 são iguais. Então, eu movimente aqui, o raio dos controles deslizantes e coloquei o raio da semiesfera 3, como ele fala na questão. A da champanhe 3 e o raio da taça em cone 3 também. Ai aqui ele me deu o volume da semiesfera que é 56,55. Então eu fui mexendo aqui no controle deslizante da altura do cone, e quando eu cheguei na altura 6, foi mostrado o mesmo volume, igual ao volume da semiesfera. Portanto, a altura do champanhe é 6 cm.

Pelo exposto, verifica-se que os participantes do grupo manipularam a construção no GeoGebra para solucionar a questão e, posteriormente, realizaram os cálculos no ambiente lápis e papel para comprovar e instituir um modelo de escrita matemática para situação didática, de acordo com o que fora previsto na análise *a priori* (Figura 8). Analisando a apresentação desses futuros professores, foi possível perceber que eles já conseguem desenvolver certas habilidades na exposição da resolução, demonstrando preocupação em relacionar os conceitos implícitos no enunciado do problema com o modelo disponibilizado no computador, manifestando ações que podem ser usadas em sala de aula, contribuindo assim com suas formações profissionais, seguindo os pressupostos da EDF.

No entanto, é importante salientar, que mesmo tendo a exposição das resoluções pelos participantes, essa etapa perde um pouco da criticidade e do poder empírico que o debate presencial promove. A tela do computador distancia os sujeitos envolvidos, a dinâmica da discussão perde o vínculo entre os personagens e muitas vezes isso pode deixar dúvidas

do conteúdo no aluno, que acaba por se perder no processo, prejudicando seu desenvolvimento na construção dos saberes.

Figura 8. Modelização algébrica da solução do problema pelo grupo 1



Nota. Dados da pesquisa (2020).

Observa-se que, no modelo matemático apresentado pelo grupo, o primeiro passo foi igualar o volume das duas taças, pela expressão  $V_1 = V_2$ , de acordo com que foi previsto na análise *a priori*. Em seguida, aplicaram a fórmula do volume da esfera e do volume do cone na expressão, efetivando do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \pi R^3 &= \frac{1}{3} \pi R^2 h \\ \frac{1}{4} \pi (3)^3 &= \frac{1}{3} \pi (3)^2 h \\ \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 27 &= \frac{1}{3} \pi \cdot 9 \cdot h \\ 4 \cdot \pi \cdot 9 &= \pi \cdot 3 \cdot h \\ \frac{36}{2} \pi &= 3 \cdot h \cdot \pi \\ 18 \cancel{\pi} &= 3 \cdot h \cdot \cancel{\pi} \\ h &= \frac{18}{3} \\ h &= 6 \end{aligned}$$

Assim, o grupo concluiu que a taça em cone deveria ser cheia até a altura de 6 cm.

Vivenciadas as situações de ação, formulação e validação (situação adidática), a pesquisadora reassumiu as ações do encontro, fazendo um levantamento das estratégias de resolução expostas pelos participantes, esclarecendo as dúvidas e promovendo um novo saber. É importante ressaltar que os investigadores, também, exibiram a solução

por meio da manipulação no GeoGebra, confrontando o modelo matemático com o modelo gerado no computador, evidenciando a importância da mediação docente no momento da institucionalização, antevendo uma situação de aula ao futuro professor, enriquecendo, assim, o ambiente de formação. Assim como na etapa anterior, a falta de público presencial torna o debate menos intenso e a mediação do conhecimento perde um pouco de sua essência, uma vez que não se tem um efetivo diálogo entre os sujeitos envolvidos.

No que concerne ao uso do GeoGebra, os licenciandos afirmaram que ele foi um importante recurso tanto para formular a resolução quanto para comprovação da resposta, pois possibilita a visualização de propriedades e elementos matemáticos que permitem ajustar e apresentar um padrão de solução que promove uma resolução mais lógica e dedutiva, sendo este o ponto central dessa investigação.

Com relação à TSD, verificou-se que mesmo tendo alguns obstáculos nas vivências de suas etapas, uma vez que essa teoria fora pensada para ser trabalhada em aulas presenciais, foi possível visualizar e identificar todas as suas fases nas ações desenvolvidas pelos pesquisadores e pelos futuros professores, na aplicação remota, que aliada aos recursos tecnológicos educativos, possibilitou uma maior participação do aluno na apropriação de saberes matemáticos, consubstanciando-se, dessa maneira, um modelo didático promissor no processo de ensino e aprendizagem, tanto da educação básica quanto na formação docente.

## 5. Conclusão

Este trabalho teve como objetivo apresentar uma proposta didática, estruturada na TSD, fundamentada na EDF e modelado pelo *software* GeoGebra, com o intuito de oferecer ao professor, um suporte que o auxilie no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de Volume de Sólidos, ao mesmo tempo que incentive a autonomia do aluno na apropriação do conhecimento matemático.

Segundo as experiências dos pesquisadores, como professores da educação básica e superior, os alunos apresentam problemas de aprendizagem dos conteúdos envolvidos nessa pesquisa. Em relação à revisão bibliográfica, observaram-se duas características no ensino de Geometria Espacial: as dificuldades de compreensão de conceitos matemáticos que requerem um maior poder de abstração, especialmente aqueles relacionados ao cálculo de volume de objetos em terceira dimensão

e a falta de situações práticas relacionadas ao campo da atividade profissional do futuro professor nas aulas de Matemática.

O uso dos recursos tecnológicos facilitou a ocorrência das concepções perceptivas, discursivas e operatórias do volume do sólido geométrico representado no GeoGebra na resolução da situação, isto é, os participantes desenvolveram a visualização do objeto nesse *software* em perspectiva 3D para comparar o volume do recipiente, e, a partir de então, identificar a altura do líquido, apoiando-se nela para compreender os conceitos matemáticos implícitos no enunciado do problema. Assim, a utilização desse recurso, mostrou um meio de visualizar objetos de formas diferentes, com volumes iguais, facilitando a compreensão do conceito do volume do cone e da esfera.

Ademais, é importante destacar que os recursos tecnológicos utilizados foram fundamentais no desenvolvimento da pesquisa, como também para conceber um recurso didático-pedagógico que permitisse ao aprendiz um maior protagonismo na construção de novos saberes, haja vista a dificuldade de encontrar metodologias nos livros didáticos analisados, com sugestão para utilização de tecnologias para a exploração do conteúdo abordado, mostrando a importância da utilização do GeoGebra no ensino de Volume de Sólidos, podendo facilmente se estender a outros conteúdos matemáticos, em aulas remotas ou presenciais.

No que diz respeito à aplicação remota da pesquisa, é imperioso destacar que ela apresentou outro cenário aos professores em formação inicial, introduzindo em seus currículos um modelo de aula totalmente *on-line*, proporcionando um caráter de ineditismo nas vivências de um estudante de Licenciatura em Matemática. Além disso, este trabalho apresenta uma prática didática que pode servir de modelo para aulas em sistemas à distância, que promova um ensino matemático mais efetivo e fortaleça a autonomia do aprendiz.

Ressalta-se assim, a relevância de associar a TSD com o aporte do GeoGebra para a construção de situações didáticas que possibilitem ao docente desenvolver os conceitos de Geometria Espacial pela utilização de várias linguagens, como verbal, visual, geométrica e textual. Além de permitir a antecipação dos possíveis comportamentos do aluno, mediante uma situação de sala de aula, diminuindo, assim, as dificuldades cognitivas, epistemológicas e didáticas referentes ao tema abordado nesse estudo.

Para conduzir essa investigação, buscou-se uma metodologia de pesquisa que auxiliasse os investigadores a compreender tanto os fenômenos do processo de ensino e aprendizagem de certo saber matemático, e no planejamento das ações e transposição didática do futuro professor, quanto para estudar os resultados após a exploração dos dados coletados. Assim, desenvolveram-se as quatro fases da ED, assumindo as etapas clássicas em caráter de complementariedade com a EDF que estuda o papel sistemático da atividade docente.

Reitera-se a importância da metodologia empregada para coleta e análise dos dados nesse processo investigativo. Tem-se a compreensão que a E.D juntamente com a E.D.F possibilitam ao docente elaborar um plano de ensino que conduza a formação, construção, observação e análise de situações didáticas que podem subsidiar as práticas de sala de aula.

Portando, acredita-se que por meio da situação proposta neste trabalho, que os futuros professores apropriaram-se de um recurso didáticos-pedagógico que propicia o planejamento e a execução de práticas docentes capazes de induzir os alunos a considerarem a movimentação e visualização dos sólidos geométricos como alternativa para compreender, estruturar e executar noções intuitivas do conceito de Volume e, assim, despertar seus conhecimentos epistêmicos e pragmáticos para demonstrar os teoremas necessários para solucionar a situação-problema proposta. Nesse sentido, a aceitação e participação dos licenciandos, durante o encontro, e a realização da situação didática possibilitaram concluir que o objetivo da investigação foi atingido.

Outrossim, convém ressaltar que alguns entraves surgiram durante a etapa da experimentação, devido à natureza remota da aplicação. Alguns participantes relataram oscilação no sinal da *internet* durante o experimento, dificultando a comunicação com o pesquisador e com os demais colegas para realização da segunda etapa da TSD, a formulação. Outro fato a considerar é que, nessa modalidade, a etapa da formulação perde um pouco de sua essência, uma vez que a forma virtual inviabiliza uma maior interação entre os participantes, além de dificultar que o pesquisador acompanhe, de modo mais efetivo, as ações dos estudantes para estabelecer estratégias de resolução, sendo que esse olhar pode ser considerado um fator importante para os resultados da investigação, havendo necessidade, talvez, de outros equipamentos e/ou aplicativos e, uma maior equipe para coleta de dados.

Conclui-se assim, que esse estudo traz contribuições relevantes à educação matemática e à formação de professores, estimulando a reflexão das práticas docentes e fortalecendo o uso de tecnologias digitais no processo formativo e na educação básica, de modo a promover mudanças no comportamento dos alunos, como sujeitos ativos na apropriação de conhecimentos matemáticos.



## Referências

- Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. UFPR. <https://doi.org/10.1590/S0101-32622008000100008>
- Almouloud, S. A. (2011). PCMA debate Engenharia Didática de Segunda Geração. [Entrevista concedida a] Ana Paula Machado & Laressa Santos. *Jornal da UEM, Maringá*, (102). <http://www.jornal.uem.br/2011/index.php/edicoes-2011/88-jornal-102-outubro-2011/781-pcm-debate-engenharia-didatica-de-segunda-geracao>
- Almouloud, S. A., e Silva, M. J. F. Da. (2012). Engenharia Didática: evolução e diversidade. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 7(2), 22-52. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p22>
- Alves, F. R. V. (2018). Engenharia Didática de Formação (EDF): sobre o ensino dos números (Generalizado) de Catalan (NGG). *Educação Matemática Pesquisa*, 20(2), 47-83. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i2p47-83>
- Alves, F. R. V. (2019). Visulng the Olýmpic Didactical Situation (ODS): Teaching Mathematics with support of the GeoGebra software. *Acta Didactica Napocencia*, 12(2), 97-116. <https://doi.org/10.24193/adn.12.2.8>
- Alves, F. R. V., e Catarino, P. M. M. C. (2017). Engenharia Didática de Formação (EDF): repercussões para a formação do professor de matemática no Brasil. *Educação Matemática em Revista - RS*, 18(2), 121-137.
- Alves, F. R. V., Sousa, R. C. De, e Fontenele, F. C. F. (2020). Didactical Engineering of the Second Generation: a proposal of the design and a teaching resource with the support of the GeoGebra software in Brazil. *Acta Didactica Napocencia*, 13(2), 142-156. <https://doi.org/10.24193/adn.13.2.10>
- Artigue, M. (1989). Ingenierie Didáctica. *Institute des Recherche des Mathématiques Rennes*, (S6), 124-128.
- Artigue, M. (1995). Ingenierie Didáctica. Em M. Artigue, R. Douady e L. Moreno (Eds.), *Ingeniería Didáctica em Educación Matemática: um esquema para la investigación y la innovación em la enseñanza y las matemáticas* (pp. 36-61). Grupo Editorial Iberoamérica.
- Awila, H. F. De. (2017). *Uma análise da contribuição do Geogebra como recurso interativo para o estudo de área e volumes* [Dissertação de Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria]. Repositório Digital da UFSM.
- Ministério da Educação do Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Educação é a base. Autor.
- Brousseau, G. (1965). *Les Mathématiques du Cours Préparatoire, Fascicule 1*. Dunod. <https://guy-brousseau.com/3144/les-mathematiques-du-cour-preparatoire-1965>.
- Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématique*. (Thèse doctorat, Université Bourdex I). Thèses en ligne (TEL).
- Camilo, A. M. S., Alves, F. R. V., e Fontenele, F. C. F. (2020). A Engenharia Didática articulada à Teoria das Situações Didáticas para o ensino da Geometria Espacial. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16(59), 64-82. <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/127>.
- Chevallard, Y. (1982). *Sur l'ingenierie didactique*. Irem: d'Aix Marseille.
- Costa, A. C., Bermejo, A. P. B., e Moraes, M. S. F. (2009). Análise do Ensino de Geometria. *X Encontro Gaúcho de Educação Matemática*, 1-10.
- Dante, L. R. (2016). *Matemática: Contexto & Aplicações*. Ática.
- Douady, R., e Perrin-Glorian, M. J. (1989). Um processo d'apprentissage du concept d'airesurface plane. *Educational Studies in Mathematics*, 20(4), 387-424. <https://doi.org/10.1007/BF00315608>
- Figueiredo, A. P. N. B., Bellemain, P. M. B., e Teles, R. A. M. (2014). Grandeza Volume: um estudo exploratório sobre como alunos do ensino médio lidam com situações de comparação. *Bolema*, 28(50), 1172-1192. <https://doi.org/10.36397/emteia.v11i2.247850>
- Gonçalves, F. D. S. L., e Cunha, D. S. (2021). O Ensino Remoto Emergencial e o Ensino da Matemática: percepção dos estudantes e professores de matemática durante a pandemia do Novo coronavírus na cidade de Desterro-PB. *EAD em Foco – Revista Científica em Educação a Distância*, 11(1), 1-13. <https://doi.org/10.18264/eadf.v11i1.1505>.
- Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R., e Almeida, N. (2016). *Matemática: ciências e aplicações*. Saraiva.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. (2010). *Provas do ENEM*. Ministério da Educação do Brasil. <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>

Moreira, J. A., e Schlemmer, E. (2020). Por um novo conceito e paradigma de educação digital online. *Revista UFG*, 20, 1-35. <https://doi.org/10.5216/revufg.v20.63438>

Pavanello, M. R. (2001). Geometria: Atuação de professores e aprendizagem nas séries iniciais. Em *anais do I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática, Curitiba*, (pp. 172-183).

Perrin-Glorian, M. J. (2009). L'ingénierie didactique a l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formação des enseignants. Em C. Margolinas et al. (Org.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques, XV<sup>e</sup> École d'Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme)*. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (pp. 57-78). La Pensée Sauvage.

Sousa, J. R., Moll, V. F., Gusmão, T. C. R. S., e Roseira, N. A. F. (2021). Contribuições do (Re)Desenho de tarefas para aproximação da matemática com entorno social da escola. *Revista Práxis Educacional*, 15(33), 444-471. <https://doi.org/10.22481/praxisedu.v15i33.5299>.

Sousa, R. C., e Alves, F. R. V. (2021). Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação: um modelo para o ensino remoto de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 17(63), 1-21. <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/448>.

Tempier, F. (2013). *La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource* [Thèse doctoral, Université Paris-Diderot - Paris VII]. Thèses en ligne (TEL).

Vuelma, C. A., Garcia, V. C., e Trevisan, V. (2011). Ensino de áreas e volumes: articulação do mundo físico com os objetos geométricos e suas representações. Em V. C. V. Garcia., E. Z. Búrigo, M. V. A. Basso e M. A. Gravina (Eds.), *Reflexões e pesquisa na formação de professores de matemática* (pp. 197-228). Evangraf UFRGS.