SOCIEDAD CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA CHILENA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN 2452-5448

https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i2.102

APRENDIZAJE DE NÚMEROS RACIONALES A PARTIR DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

LEARNING OF RATIONAL NUMBERS THROUGH SEMIOTICS REPRESENTATIONS

Dafne Aguilar Terrones
dafne.aguilar@alumno.buap.mx
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

José Gabriel Sánchez Ruiz
josegsr@unam.mx
Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México

Gladys Denisse Salgado Suárez
gladys.salgado@udlap.mx
Universidad de las Américas Puebla, Puebla, México

RESUMEN

A pesar de los grandes esfuerzos en tiempo y dedicación para lograr los aprendizajes esperados del currículo escolar, los números racionales siguen siendo un tema de alta complejidad para los estudiantes de bachillerato porque apenas si llegan a la comprensión de los conceptos más básicos y elementales. A partir de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Raymond Duval, se diseñaron e implementaron tres estrategias de enseñanza basadas en distintas representaciones semióticas con los planteamientos de la Ingeniería Didáctica para favorecer el aprendizaje de los números racionales en estudiantes de primer año de bachillerato. Además, se diseñó y aplicó una misma actividad que sirvió como pretest y postest para comparar resultados y podernos dar cuenta de si la estrategia didáctica ayudó a la adquisición del concepto de número racional. A partir de los resultados obtenidos, pudimos concluir que las actividades sirvieron para incrementar el aprendizaje del concepto de número racional.

PALABRAS CLAVE:
Números racionales, Representaciones semióticas, Ingeniería didáctica, Estrategia didáctica.

ABSTRACT

Despite the great efforts in time and dedication to achieve the expected learnings contained in the school curriculum, rational numbers continue to be a highly complex subject for high school students because they barely understand the most basic and elementary concepts. Based on Raymond Duval's Theory of Semiotic Representation Records (TRRS), three teaching strategies based on different semiotic representations were designed and implemented with Didactic Engineering approaches to favor the learning of rational numbers in first year high school students. In addition, the same activity was designed and applied, which served as pretest and posttest to compare results and to be able to realize if the didactic strategy helped the acquisition of the concept of rational number. From the results obtained, we were able to conclude that the activities served to increase the learning of the concept of rational number.

KEYWORDS:
Rational Numbers, Semiotic Representations, Didactic Engineering, Didactic Strategy.

Recibido: 9 de febrero de 2022 , Aceptado: 16 de junio de 2022

1. Problemática

Dentro de las matemáticas, los números racionales constituyen un campo numérico de gran importancia, tanto desde el punto de vista matemático, como por su utilidad en el procesamiento e interpretación de situaciones de la vida cotidiana (Obando, 2003).

Existe una vasta cantidad de ejemplos que muestran las dificultades, por ejemplo: la fracción se piensa como dos números naturales separados por una "rayita" (vínculo) y no como una relación cuantitativa entre la parte y el todo; o el error común de los alumnos al sumar varias fracciones sumando numeradores y denominadores respectivamente. Existen otras que se mencionan en la Tabla 1.

Tabla 1

Dificultades estudiantiles con respecto a números racionales

Tipo de dificultad	Dificultad específica	Autor y año
Conceptos erróneos	1. La fracción se piensa como dos números naturales separados por una "rayita". 2. Conceptualizar fracciones impropias: ¿por qué el numerador es mayor que el denominador? 3. Identificar de entre un grupo de números reales, cuáles son racionales. 4. Establecer relación de orden entre números fraccionarios y representarlos en la recta numérica. 5. Entender que hay un número infinito de números entre dos fracciones o decimales.	1, 2: Obando (2003). 3, 4: Cabañas (2004). 5: McMullen et al. (2018).
Carente dominio de propiedades	1. En la suma de fracciones, sumar numeradores y denominadores entre sí, es decir, uso del modelo lineal aditivo como algoritmo. 2. Aplicar mal las propiedades de la suma y la multiplicación, así como la ley de los signos y potenciación, en problemas y operaciones aritméticas. 3. Diferencia de los números racionales con respecto a números naturales.	1: Obando (2003); Cabañas (2004). 2: Cabañas (2004). 3: Geary et al. (2017); González-Forte et al. (2019); Smith (1995); Van Dooren et al. (2015).
Dificultad por sus múltiples representaciones	1. No aceptan la congruencia geométrica en las partes para garantizar su igualdad, es decir, dificultad en identificar en modelos las partes de un todo (gráficos, pictográfico, geométrico). 2. Transformar números decimales a fracciones-	1: Obando (2003); Cabañas (2004). 2: Cabañas (2004).
Lenguaje matemático	1. No identifican el uso del paréntesis como algoritmo de la multiplicación. 2. Dificultad en la traducción del lenguaje matemático al común.	1, 2: Cabañas (2004).

Nota. Elaboración propia.

A partir de esto surge el siguiente *Objetivo General*:

Implementar estrategias didácticas siguiendo el currículo escolar para la enseñanza de los números racionales, fomentando la evocación y transformación de imágenes mentales y haciendo uso de distintas representaciones semióticas para disminuir las dificultades presentes en los estudiantes de primero de bachillerato.

2. Marco teórico

2.1 Semiosis y pensamiento humano

El enfoque semiótico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas nació a raíz de la dificultad sobre la compresión y la necesidad de recurrir a otros tipos de representación que constituyen al lenguaje de la matemática (Cervantes et al., 2017). La Teoría de Registros de Representaciones Semióticas (TRRS) fue creada por Raymond Duval.

Esta teoría sostiene que no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación. Los registros de representación semiótica constituyen los grados de libertad de los que puede disponer un sujeto para objetivarse él mismo una idea aún confusa, para explorar las informaciones o, simplemente, para comunicarlas a un interlocutor (Duval, 2017). Dichas representaciones se expresan a través de cuatro registros: lenguaje natural (representación oral, escrita), numérica (entera, fraccionaria, decimal), figural o gráfica (lineales, planas o espaciales) y alfanumérica (algebraicas) (Díaz-Godino et al., 2015).

El interés fundamental para los investigadores en didáctica de la matemática es la adquisición del concepto matemático por parte del alumno, lo que se denomina noética; ahora bien, no hay noética sin semiótica, es la semiótica la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noética (Oviedo et al., 2012). Los sistemas semióticos deben permitir cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación (Figura 1) (Duval, 2017): En primer lugar, la formación consiste en constituir una marca que sea identificable como una representación de alguna cosa en un sistema determinado. Después, el tratamiento consiste en transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias del sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. Finalmente, la conversión también es una transformación de las representaciones producidas en un sistema de representaciones hacia otro sistema, de manera tal que estas últimas permitan explicar otras significaciones relativas a aquello que es representado. La relación entre semiosis y noesis concierne únicamente a los sistemas que permiten estas tres actividades cognitivas de representación y no a todos los sistemas semióticos.

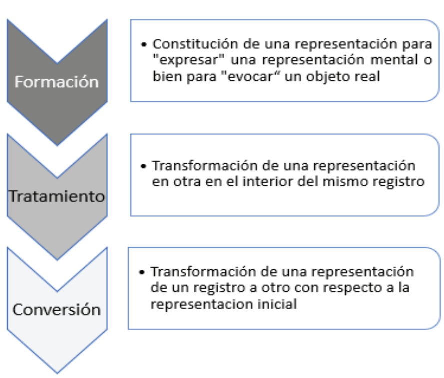


Figura 1. Actividades cognitivas de representación inherentes a la semiosis. Nota. Elaboración propia.

El pasaje de una representación a otra mediante la conversión se hace de manera espontánea cuando ambas representaciones son congruentes, es decir, cuando se cumplen los siguientes tres criterios y, al no cumplirse alguno, no se genera congruencia (Duval, 2017):

- Correspondencia semántica entre las unidades significantes que se asocian de un registro a otro.
- Univocidad semántica, la cual consiste en que a cada unidad significante del registro de salida le corresponde una única unidad significante en el registro de llegada.
- Conservar el orden, se refiere a una correspondencia entre registros, al organizar las unidades significantes.

3. Metodología

Los informantes fueron un grupo conformado por catorce estudiantes de primer año de bachillerato, pertenecientes a la escuela Woodcock The British School, ubicada en la junta auxiliar de Momoxpan en el municipio de San Pedro Cholula. El análisis de la investigación fue de tipo cuantitativo. La validación de pretest y postest, así como la validación de las actividades, se realizó mediante el juicio de expertos. A consecuencia de la pandemia previamente vivida, la aplicación de las actividades 1, 2 y 5 se realizaron mediante formularios virtuales con respuesta de selección múltiple. Las actividades 3 y 4 se realizaron en el salón de clases virtual mediante la cuantificación de respuestas correctas por parte de los estudiantes, así como la fluidez en el desarrollo de las actividades. La secuencia didáctica se diseñó a partir de la Ingeniería Didáctica.

3.1 Ingeniería Didáctica

La Ingeniería Didáctica surgió a principios de la década de 1980 y se ha desarrollado continuamente desde entonces. De acuerdo con Artigue (2014), en la comunidad educativa denota principalmente una metodología de investigación basada en el diseño controlado, la experimentación de secuencias de enseñanza y la adopción de un modo interno de validación basado en la comparación entre los análisis a priori y a posteriori de estos. Sin embargo, desde su aparición, la expresión "ingeniería didáctica" también se ha utilizado para denotar actividades de desarrollo, refiriéndose al diseño y construcción de recursos educativos basados en resultados de investigación, así como al trabajo de los ingenieros didácticos (Artigue, 2014).

3.2 Fases de la Ingeniería Didáctica

Según Artigue et al. (1995), este proceso consta de cuatro fases. A continuación, se explican las fases con base en el trabajo de Pérez (2020).

3.2.1 Fase 1. Análisis preliminar

El objetivo es identificar y describir los obstáculos epistemológicos, didácticos y/o cognitivos que se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Este análisis está constituido por un conjunto de análisis en relación con el objeto matemático, como la enseñanza tradicional, las concepciones del alumno y las dificultades u obstáculos que determinan su evolución. Así mismo, en esta fase se describe el grupo de alumnos con los cuales se experimentará la propuesta didáctica, tal como la edad, género y conocimientos previos sobre el tema.

3.2.2 Fase 2. Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas

Esta fase tiene dos objetivos: el primero, concerniente al diseño de las actividades o sesiones de la propuesta didáctica, y el segundo, pertinente al análisis a priori, en el cual se deben considerar los resultados que se esperan de los alumnos, las intervenciones del profesor, y prever y analizar las dificultades que podrían enfrentar durante la resolución de las actividades.

3.2.3 Fase 3. Experimentación

Se refiere a la puesta en marcha de las actividades diseñadas, a la experimentación misma, en la cual se da la interacción propuesta por el profesor del alumno con el medio. Así mismo en esta fase se establece el contrato didáctico y se llevan a cabo los registros de las observaciones realizadas.

3.2.4 Fase 4. Análisis a posteriori y validación

Esta fase está constituida por el conjunto de datos recogidos durante la experimentación, tal como lo son las producciones de los alumnos hechas dentro o fuera de las sesiones, así como los resultados obtenidos por instrumentos externos a la propuesta didáctica. En tanto a la validación, Artigue et al. (1995) mencionan "que la confrontación de los análisis a priori y a posteriori, fundamentan en esencia la validación de las hipótesis formuladas" (p. 48). Esto se da en la comparación entre los comportamientos esperados y los que realmente sucedieron durante la experimentación.

4. Diseño de actividades

Las actividades se planearon y diseñaron a partir del enfoque de la Ingeniería Didáctica para crear una secuencia didáctica que consistió en un conjunto de cinco actividades, de las cuales la primera fungió como análisis preliminar y la quinta como análisis a posteriori y validación de la investigación.

4.1 Actividad 1 vs 5: Conocimientos previos vs Conocimientos adquiridos

Esta actividad se diseñó con el fin de comparar los conocimientos previos versus los conocimientos adquiridos en los informantes (ver Anexo 1). Cada reactivo se creó a partir de dos vertientes: la tabla de dificultades recopiladas de la literatura y de los conocimientos esperados que marca el currículo escolar de primero de bachillerato. Los temas por evaluar fueron:

- Identificación de números racionales dentro de un grupo de números reales.
- Operaciones con fracciones que cuentan con distintos e iguales denominadores.
- Conversión de fracciones mixtas a fracciones impropias y viceversa.
- Aplicación correcta de las propiedades de números racionales.
- Resolución de problemas con fracciones.
- Simplificación de fracciones y fracciones equivalentes[1]

4.2 Actividad 2: Simplificación y equivalencia de fracciones

Esta actividad se diseñó para ayudar a comprender al informante las relaciones que se generan entre dos números racionales mediante fracciones con igual numerador y denominador utilizando operaciones aritméticas de multiplicación o división entre sí, con el fin de obtener múltiplos o submúltiplos del número racional analizado (ver Anexo 2).

La actividad se trató de un juego que se dividió en dos etapas. La primera etapa consistió en relacionar ejercicios de simplificación de fracciones y fracciones equivalentes, y la segunda en el reforzamiento de la actividad anterior, teniendo el mismo objetivo, pero

[1] Este tema no se ve de manera independiente en el currículo escolar, simplemente se encuentra inmerso en los demás.

el tipo de respuesta fue dicotómica. El enfoque que se utilizó en el diseño de la actividad 2 de manera completa, es decir, incluyendo las dos etapas, fue basado en la TRRS.

A partir de los cuatro tipos de representación semiótica, cada ronda del juego de la primera etapa fue diseñada con una representación distinta fomentando la trasformación de los números racionales mediante tratamientos. Y como ronda final, es decir, en la quinta ronda, se presentaron los cuatro lenguajes para fomentar el uso de las transformaciones mediante la conversión.

La etapa dos de la actividad se diseñó a partir de los cuatro sistemas de representación semiótica, los cuales generan 16 posibles transformaciones entre conversiones de un sistema a otro y tratamientos dentro de cada sistema (Figura 2).

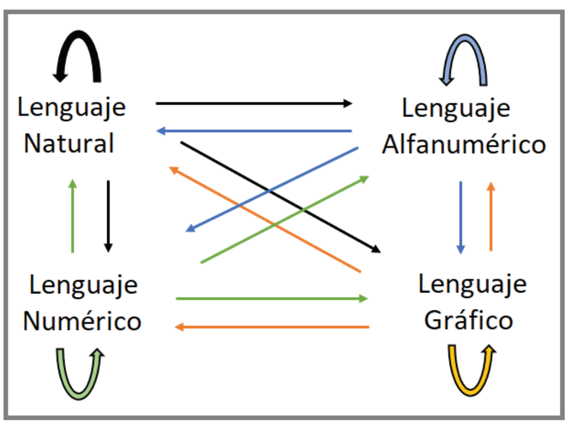


Figura 2. Tratamientos y conversiones entre distintos RRS.
Nota. Elaboración propia.

El orden de los ítems fue propuesto de tal manera que estuvieran representados los cuatro reactivos juntos pertenecientes a cada representación semiótica. Los primeros cuatro ítems muestran el lenguaje natural, los siguientes cuatro, el lenguaje alfanumérico, después, el lenguaje gráfico y finalmente, los últimos cuatro, el lenguaje numérico.

4.3 Actividad 3: Propiedades de los números racionales

Esta actividad fue diseñada como un juego con el objetivo de mejorar la comprensión de las propiedades de los números racionales en el estudiante a partir de los distintos registros de representación semiótica (ver Anexo 3). Para desarrollarse, requirió del uso de siete propiedades de los números racionales, las cuales fueron explicadas mediante el uso de las fracciones que aparecen en cada carta. En el diseño, cada carta requirió de conversiones y tratamientos entre números racionales.

Finalmente, se les presentó a los sujetos de estudio el resto de las propiedades, las cuales no fueron utilizadas en el juego, para plantearles la siguiente pregunta: ¿Por qué no fueron incluidas estas propiedades? Esto, con el fin de que ellos reforzaran su razonamiento sobre la aplicación de las propiedades.

4.4 Actividad 4: Situación en contexto

Esta actividad fue diseñada a partir del enfoque que tiene el currículo escolar SEP de primero de bachillerato (ver Anexo 4). Dicho currículo plantea "situaciones en contexto", las cuales consisten en mostrar problemáticas reales que existen en el país, fundamentadas con estadísticas actuales, haciendo hincapié en que son los medios de comunicación quienes construyen y divulgan esa información entre la sociedad.

Por tal motivo, se decidió crear una situación en contexto relacionada con la pandemia a partir del virus SARS-Cov-2, con el fin de concientizar sobre la problemática que significa enfermarse. Se les planteó a los sujetos que analizaran los quehaceres del hogar que diariamente realizan versus los que harían si alguien en su hogar se enfermara. Esta situación fue desarrollada en una tabla de frecuencias mediante los números racionales. Cabe señalar que en esta actividad las frecuencias no reciben este nombre, aunque por definición lo son, porque al ser los números racionales el primer tema del currículo escolar en primero de bachillerato, aún no se cuenta con el conocimiento de las medidas de tendencia central, debido a que ese tema se ve posteriormente dentro del mismo semestre.

Esta actividad se diseñó con el fin de evocar la imaginación mental para lograr identificar los quehaceres realizados por los sujetos diariamente en su hogar y posteriormente contabilizarlos mediante transformaciones hacia elementos numéricos. Dichas transiciones requirieron de distintos registros de representación semiótica para lograrlo. A partir del lenguaje natural, el cual fue dado en la situación en contexto, los sujetos tuvieron que convertir esos quehaceres en lenguaje numérico y finalmente desarrollar la tabulación mediante el lenguaje gráfico.

5. Análisis de resultados

5.1 Actividad 2: Simplificación y equivalencia de fracciones

Los resultados se muestran mediante las Figuras 5, 6, 7, 8 y 9, en donde cada una de ellas describe los porcentajes obtenidos por cada una de las rondas.

5.1.1 Primera etapa del juego

En la primera ronda del juego, más del 75% de los sujetos de estudio lograron relacionar las parejas de cartas. De acuerdo con la Tabla 1, no presentaron dificultad en conceptualizar fracciones impropias. Sin embargo, en la relación correcta de cartas, las cuales fueron uno con tres, los porcentajes correctos fueron los menores y se atribuye a que presentaron dificultad en encontrar la fracción equivalente mediante números menores tanto en el numerador como en el denominador. Esta dificultad no se encontró de manera común en la literatura (Figura 3).

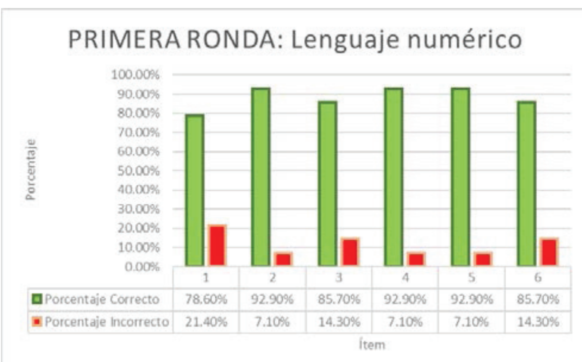


Figura 3. Porcentajes correctos e incorrectos sobre el lenguaje numérico
Nota. Elaboración propia.

La segunda ronda se desarrolló en el lenguaje verbal, en la cual disminuyeron los porcentajes correctos en todos y cada uno de los ítems con respecto a la ronda anterior (Figura 4). Esto se atribuye a que los sujetos de estudio presentaron dificultad para evocar imágenes mentales de los números racionales en el lenguaje verbal y transformarlos al lenguaje matemático. En la Tabla 1 se menciona esta dificultad de manera inversa. De acuerdo con ello, observamos que este conflicto cognitivo no es muy común en estudiantes de bachillerato.

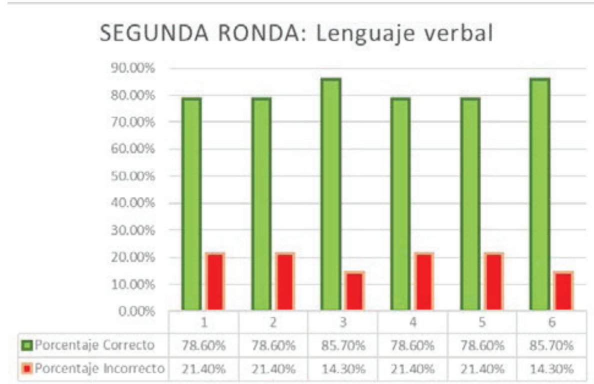


Figura 4. Porcentajes correctos e incorrectos sobre el lenguaje verbal
Nota. Elaboración propia.

En la tercera ronda se obtuvieron los mayores porcentajes de respuestas correctas de toda la primera etapa del juego (Figura 5). Los porcentajes correctos se atribuyen a la habilidad para transformar imágenes mentales. Es preciso señalar que en la literatura se reportó como dificultad común que los estudiantes no aceptan la congruencia geométrica en las partes para garantizar su igualdad, lo que no lleva a puntualizar que para nuestros sujetos de estudio esta dificultad no está presente de manera porcentualmente representativa.

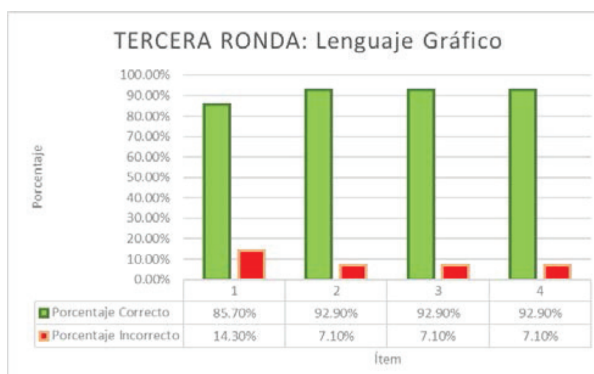


Figura 5. Porcentajes correctos e incorrectos sobre el lenguaje gráfico
Nota. Elaboración propia.

El lenguaje algebraico presentó la mayor dificultad en la resolución (Figura 6) y se puede atribuir a la carencia del dominio de propiedades entre las de los números racionales con respecto a los números naturales y así poder aplicarlas en los despejes de las ecuaciones de primer grado. Podemos observar que estas dificultades de los sujetos de estudio se encuentran mencionadas en la Tabla 1.

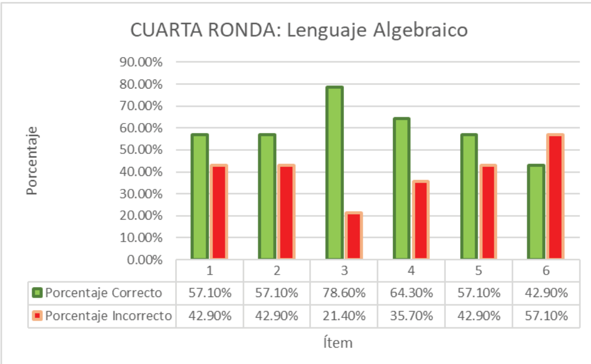


Figura 6 .Porcentajes correctos e incorrectos sobre el lenguaje algebraico. Nota. Elaboración propia.

La quinta ronda consistió en mezclar los cinco tipos de representación semiótica. En la Figura 7 se observa que en el ítem número tres, los sujetos de estudio no presentaron dificultad con la conversión del lenguaje verbal al lenguaje numérico (ítem cuatro) o viceversa. Eso se atribuye a que los números racionales plasmados en tales cartas utilizan magnitudes pequeñas. Sin embargo, en el ítem cuatro, el cual es la relación correcta con el ítem tres, el porcentaje fue el menor de toda la ronda, por lo cual queda la indagatoria sobre hacia qué conversión en registro de representación existe la dificultad en la transformación.

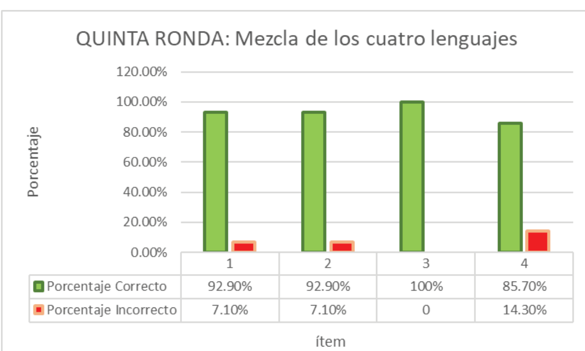


Figura 7. Porcentajes correctos e incorrectos sobre los cuatro RRS. Nota. Elaboración propia.

5.1.2 Segunda etapa del juego

Se presentan los resultados obtenidos en la etapa dos. A partir del planteamiento de 16 ítems mostrados en los cuatro lenguajes, es decir, cuatro ítems por cada una de las representaciones semióticas en los cuales se requirieron tratamientos y conversiones entre registros, se observa lo siguiente: los ítems uno y dos no se muestran porque son los ejemplos resueltos.

Los ítems con porcentajes menores al 70% (cinco, siete y ocho) pertenecen a preguntas dadas en el lenguaje algebraico, con lo que se observa el carente dominio de propiedades para diferenciar a los números racionales con respecto de los naturales (Tabla 1).

El sexto ítem también se encuentra expresado en el lenguaje algebraico y la solución mostrada se encuentra en el lenguaje gráfico. Como se observa, obtuvo un porcentaje alto, por lo que podemos concluir que la conversión al registro gráfico no les generó dificultades. El noveno ítem sufrió una conversión del lenguaje gráfico al lenguaje numérico y también obtuvo un porcentaje alto en respuestas correctas, lo que se atribuye a que los estudiantes no presentan dificultad en esta conversión entre registros. El ítem 12 y su solución se encuentra expresado en el lenguaje gráfico, obteniendo un 92%, lo cual se atribuye a que los estudiantes presentan habilidad de tratamiento de imágenes dentro del mismo registro de representación. El ítem 14 se encuentra dado en el lenguaje numérico con solución en el lenguaje verbal y se atribuye el porcentaje alto de respuestas correctas a que la fracción dada cuenta con magnitudes pequeñas (Figura 8).

Ítem	Porcentaje Correcto	Porcentaje Incorrecto
1	-	-
2	-	-
3	78.6%	21.4%
4	78.6%	21.4%
5	50%	50%
6	92.9%	7.1%
7	35.7%	64.3%
8	64.3%	35.7%
9	92.9%	7.1%
10	71.4%	28.6%
11	71.4%	28.6%
12	92.9%	7.1%
13	85.7%	14.3%
14	92.9%	7.1%
15	85.7%	14.3%
16	78.6%	21.4%

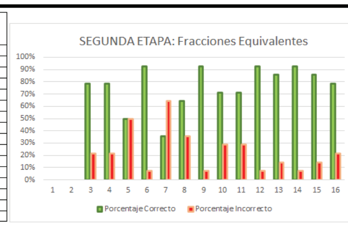


Figura 8 . Porcentajes obtenidos en la segunda etapa del juego Nota. Elaboración propia.

Los ítems anteriormente mostrados se clasificaron de acuerdo con el porcentaje de respuestas correctas. Además, se muestra en qué registro se encuentra cada intervalo, como se aprecia en la Tabla 2.

Tabla 2 . Clasificación del aprendizaje obtenido

Porcentaje de respuestas correctas	**Clasificación de acuerdo con el aprendizaje obtenido**	**Registro de representación del ítem**
0-50%	Carente	Lenguaje algebraico
51-70%	Bajo	Lenguaje algebraico
71-90%	Regular	Lenguaje verbal, Lenguaje gráfico, Lenguaje numérico
91-100%	Bueno	Lenguaje gráfico, Lenguaje numérico

Nota. Elaboración propia.

De las dos etapas aplicadas, con 39 ítems, solo tres de ellos obtuvieron un porcentaje igual o menor al 50% en respuestas correctas.

5.2 Actividad 3: Propiedades de los números racionales

Esta actividad se desarrolló en grupos. Se formaron tres equipos, de los cuales tanto el equipo 1 como el 2 se crearon con cinco estudiantes cada uno y el equipo 3 con cuatro estudiantes. Cada equipo desarrolló el juego, donde se evaluaron los criterios de acuerdo con una lista de cotejo.

5.2.1 Resultados del equipo 1

Este equipo estuvo integrado por cinco sujetos de estudio. Los criterios evaluados se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. Adquisición del concepto de número racional del equipo 1

Categoría	**Criterios de evaluación**	**Incorrecto (0)**	**Correcto (1)**
Comprensión correcta de los conceptos matemáticos	1. Definición correcta de fracción		✓
	2. Definición correcta de fracción impropia	✗	
	3. Identificación de números racionales		✓
	4. Identificación de relación de orden	✗	
Dominio de propiedades	1. Adición de fracciones	✗	
	2. Aplicación correcta de las propiedades de la multiplicación, así como de la ley de los signos y potenciación		✓
	3. Diferenciación de los números racionales con respecto a números naturales		✓
Comprensión por múltiples representaciones	1. Comprensión en la congruencia geométrica	✗	
Lenguaje matemático	1. Uso del paréntesis como algoritmo de la multiplicación		✓
	2. Traducción del lenguaje matemático al común	✗	
TOTAL:			**5**

Nota. Elaboración propia.

Este equipo presentó muchas dificultades para desarrollar la actividad. Aunque la participación de los informantes fue de manera aleatoria, cada uno de ellos tomaba mucho tiempo para contestar y, en varias ocasiones, ninguno quería participar, por lo que se asignó un orden para que ellos contestaran. El desarrollo de la actividad no fue fluido y todo el equipo tenía que participar para generar oraciones cortas y mal expresadas. A partir de la Tabla 1, se observó que los sujetos de estudio mostraron tener conceptos erróneos sobre las fracciones impropias, también presentaron dificultad para representar los números racionales en la recta numérica, así como errores en la traducción del lenguaje matemático al común. Tampoco lograron identificar en representaciones gráficas las partes de un todo. Finalmente, la adición de fracciones mostró un carente dominio de propiedades.

5.2.2 Resultados del equipo 2

Este equipo se conformó por cinco estudiantes. Los criterios evaluados se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4. Adquisición del concepto de número racional del equipo 2

Categoría	**Criterios de evaluación**	**Incorrecto (0)**	**Correcto (1)**
Comprensión correcta de los conceptos matemáticos	1. Definición correcta de fracción 2. Definición correcta de fracción impropia 3. Identificación de números racionales 4. Identificación de relación de orden		✓ ✓ ✓ ✓
Dominio de propiedades	1. Adición de fracciones 2. Aplicación correcta de las propiedades de la multiplicación, así como de la ley de los signos y potenciación 3. Diferenciación de los números racionales con respecto a números naturales		✓ ✓ ✓
Comprensión por múltiples representaciones	1. Comprensión en la congruencia geométrica		
Lenguaje matemático	1. Uso del paréntesis como algoritmo de la multiplicación 2. Traducción del lenguaje matemático al común		✓ ✓
TOTAL:			**10**

Nota. Elaboración propia.

Este equipo desarrolló la actividad de manera fluida, sin errores y con un orden aleatorio en participaciones. Todos y cada uno de los integrantes sabía qué responder y cuándo hacerlo, aunque la participación fue aleatoria. No presentaron dificultades para realizarla.

5.2.3 Resultados del equipo 3

Este equipo se conformó por cuatro sujetos de estudio. Los criterios evaluados se muestran a continuación (Tabla 5).

Tabla 5. Adquisición del concepto de número racional del equipo 3

Categoría	**Criterios de evaluación**	**Incorrecto (0)**	**Correcto (1)**
Comprensión correcta de los conceptos matemáticos	1. Definición correcta de fracción 2. Definición correcta de fracción impropia 3. Identificación de números racionales 4. Identificación de relación de orden		✓ ✓ ✓ ✓
Dominio de propiedades	1. Adición de fracciones 2. Aplicación correcta de las propiedades de la multiplicación, así como de la ley de los signos y potenciación 3. Diferenciación de los números racionales con respecto a números naturales		✓ ✓ ✓
Comprensión por múltiples representaciones	1. Comprensión en la congruencia geométrica		
Lenguaje matemático	1. Uso del paréntesis como algoritmo de la multiplicación 2. Traducción del lenguaje matemático al común		✓ ✓
TOTAL:			**10**

Nota. Elaboración propia.

El equipo 3 tardó más tiempo en desarrollar la actividad. Sin embargo, lo hizo de manera clara y coherente. Cada uno de sus integrantes entendió en qué consistía la actividad (Tabla 4).

5.3 Actividad 4: Situación en contexto

Esta actividad fue evaluada de manera grupal, es decir, los 14 sujetos de estudio participaron en ella, con el fin de crear una analogía de cómo plantea el currículo escolar las situaciones en contexto. Se generó una lista de cotejo (Tabla 6), la cual es similar a la de la actividad anterior, pero se descartaron algunas categorías que no son necesarias evaluar para el desarrollo de la actividad. Los resultados fueron los siguientes:

Tabla 6. Resultados de la evaluación grupal de la situación en contexto

Categoría	**Criterios de evaluación**	**Incorrecto (0)**	**Correcto (1)**
Comprensión correcta de los conceptos matemáticos	1. Identificación de números racionales 2. Adición de fracciones		✓ ✓
Dominio de propiedades	1. Aplicación correcta de las propiedades de la multiplicación, así como de la ley de los signos y potenciación 2. Diferenciación de los números racionales con respecto a números naturales		✓ ✓
Lenguaje matemático	1. Traducción del lenguaje matemático al común		✓
TOTAL:			**5**

Nota. Elaboración propia.

Al mostrar fluidez en el desarrollo de la actividad, el grupo obtuvo un puntaje de cinco unidades. Cabe señalar que la participación de cada estudiante se realizó de manera aleatoria.

A partir de la secuencia didáctica desarrollada (Actividades 2, 3 y 4), se aplicó el postest para realizar un análisis comparativo de los resultados con el pretest. Esto se muestra a continuación.

5.4 Actividad 1 vs. Actividad 5: Conocimientos previos vs. Conocimientos adquiridos

Se presenta el análisis de cada uno de los ítems.

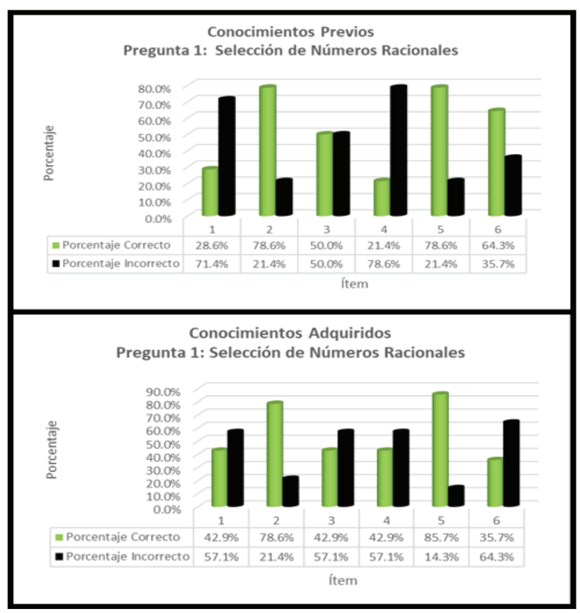


Figura 9. Comparación de resultados entre pretest y postest del primer ítem. Nota. Elaboración propia.

En la Figura 9 se observa que los porcentajes de respuestas correctas de tres ítems aumentaron y el de un ítem quedó igual. Sin embargo, el porcentaje de los ítems 3 y 6 disminuyeron por lo que se atribuye a una confusión en la lectura de la imagen, esto, debido a que en la actividad 2 se representaron solo algunas partes de la fracción en color y el resto en blanco. Sin embargo, en la actividad 3 todas las partes de la fracción estaban a color, es decir, se ocuparon dos tonos para representar la imagen.

Para el caso del sexto ítem, la disminución del porcentaje se atribuye a la diferente manera de expresar a las fracciones mixtas durante el desarrollo de la secuencia didáctica porque se representaron como $6\frac{1}{2}$ ó 6 ½, lo que pudo haber originado una confusión en la lectura numérica.

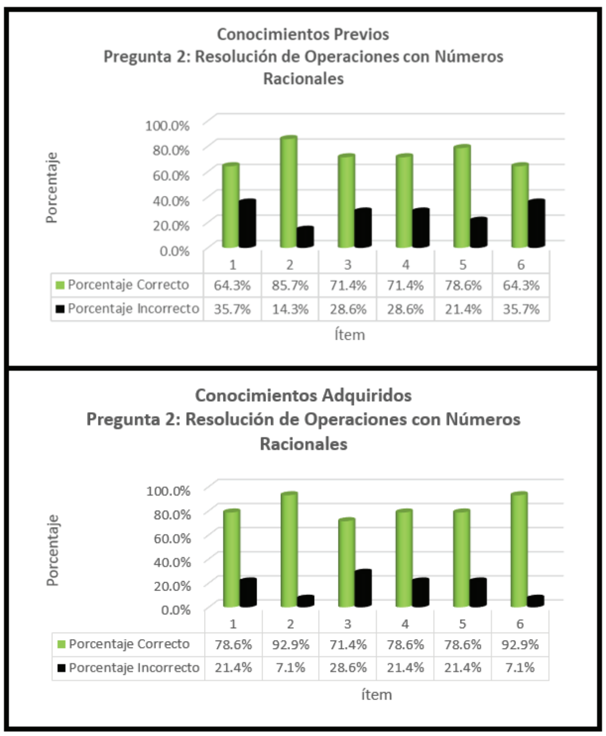


Figura 10. Comparación de resultados entre pretest y postest del segundo ítem. Nota. Elaboración propia.

La Figura 10 muestra los resultados de operar con distintos números racionales. En cuatro de seis ítems, el porcentaje de respuestas correctas aumentó y en los ítems 3 y 5 el porcentaje fue el mismo; en ambos casos (ítems 3 y 5) fueron los únicos en los cuales las fracciones *tenían diferente denominador*. Los informantes cuentan con carencia en el dominio de propiedades en la multiplicación y división. Además, se confirma la dificultad (Tabla 1) de aplicar mal las propiedades para la multiplicación de fracciones.

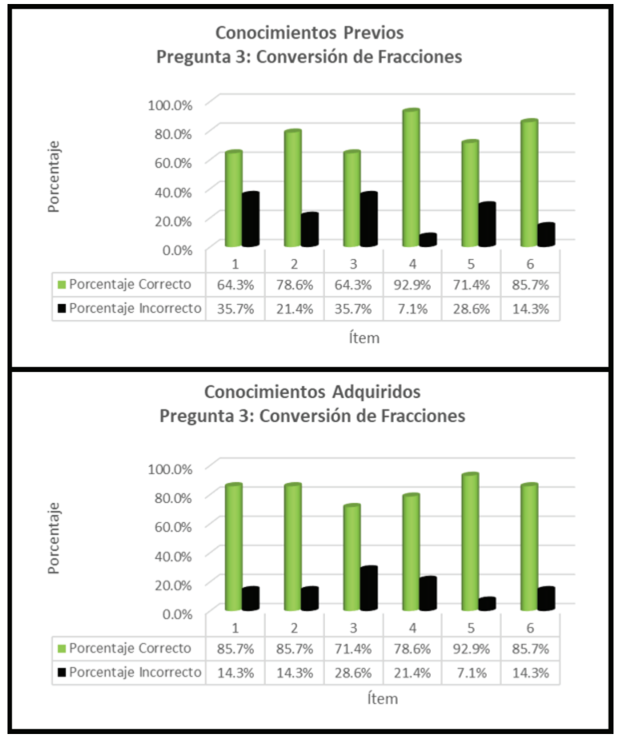


Figura 11. Comparación de resultados entre pretest y postest del tercer ítem. Nota. Elaboración propia.

La Figura 11 muestra un aumento en el porcentaje de respuestas correctas en cuatro de los seis ítems, en el sexto ítem el porcentaje es el mismo y en el cuarto ítem el resultado de respuestas correctas disminuyó en 14.3 puntos porcentuales. Esto se atribuye a que aún se presentan dificultades para trabajar con fracciones impropias.

Cabe señalar que todas las respuestas en los incisos presentaron un patrón procedimental por cada tres ítems, es decir, se diseñaron los reactivos de tal manera que, para cada pregunta, las posibles respuestas en distintos incisos tuvieran los mismos procedimientos de resolución, aunque fueran correctos o incorrectos.

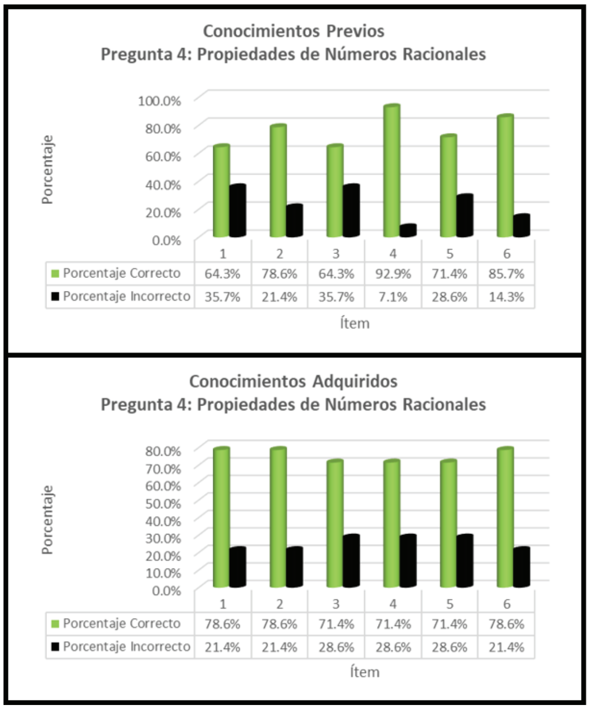


Figura 12. Comparación de resultados entre pretest y postest del cuarto ítem. Nota. Elaboración propia.

Los ítems 4 y 6 tuvieron un decaimiento porcentual, lo que nos lleva a inferir que los sujetos de estudio tuvieron confusión con la multiplicación entre recíprocos y con respecto al algoritmo del paréntesis como multiplicación, lo que es una dificultad que hallamos previamente en la literatura para el desarrollo de este proyecto.

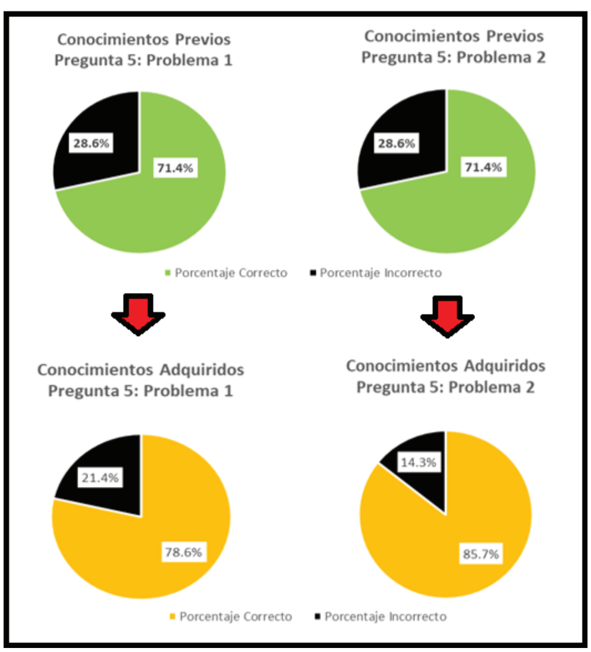


Figura 13. Comparación de resultados de los problemas 1 y 2 dados en el quinto ítem. Nota. Elaboración propia.

La Figura 13 representa la comparación de los resultados obtenidos a partir de dos problemas. Más de la mitad de los estudiantes logró analizar e interpretar numéricamente la situación planteada. Se observó que dentro del currículo escolar en el apartado de aprendizajes esperados es de gran importancia que el estudiante pueda resolver problemas de aplicación con el concepto de número racional.

6. Conclusiones

Si bien es de suma importancia trabajar con los cuatro registros de representación semiótica dentro del aula para lograr alcanzar la mayor adquisición de conocimiento con el concepto de número racional, es fundamental trabajar en el fortalecimiento del álgebra porque fue el registro que más dificultades presentó.
Cabe señalar que el registro que mayores porcentajes de respuestas correctas obtuvo fue el gráfico y en las secuencias didácticas que marca el currículo escolar no existen actividades que fomenten el uso del lenguaje gráfico para el concepto de número racional en primero de bachillerato. De acuerdo con la Tabla 1 de dificultades, se considera haber minimizado los errores en: suma de fracciones, problemas, congruencias geométricas y dificultad del lenguaje matemático al común.

Es preciso seguir fortaleciendo las propiedades de números racionales en multiplicación principalmente porque los estudiantes siguen presentando dificultad con el tema ya que también existe la vertiente de la mala interpretación del paréntesis como algoritmo de la multiplicación.

En futuras investigaciones se propone el diseño de actividades que sean anexadas a la secuencia didáctica en donde se haga hincapié en el uso del lenguaje gráfico.

Referencias

Artigue, M. (2014). Didactic Engineering in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 159-162). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_44

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamericano.

Cabañas, M. G. (2004). *Situaciones didácticas en la comprensión del concepto de número racional en alumnos de nivel medio superior.* Reportes de Investigaciones Terminadas, 181-187.

Cervantes, J. A., Ordoñez, J. S., García, M. D. S., y Hernández-Moreno, A. (2017). *Teoría de registros de representaciones semiótica.* Universidad Autónoma de Guerrero. https://www.researchgate.net/publication/315814323_TEORIA_DE_REGISTROS_DE_REPRESENTACIONES_SEMIOTICA/citations

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., y Contreras, Á. (2015). Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático. *ResearchGate: Departamneto de Didáctica de la Matemática, 1-21.*

Geary, D., Berch, D., Ochsendorf, R., & Mann, K. (2017). *Acquisition of complex arithme- tic skills and higher-order mathematics concepts.* https://acortar.link/kBgOhz

González-Forte, J. M., Fernández-Verdú, C., & Llinares, S. (2019). El fenómeno natural number bias: un estudio sobre los razonamientos de los estudiantes en la multiplicación de números racionales. *Quadrante, 28*(2), 32–52.

DGE, *Dirección General de Epidemiología.* (2020). [Archivo de video]. https://coronavirus.gob.mx/informacion-accesible/

Duval, R. (2017). *Semiosis y Pensamiento Humano, Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales* (2.a ed.). Programa Editorial Universidad del Valle.

McMullen, J., Van Hoof, J., Degrande, T., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2018). Profiles of rational number knowledge in Finnish and Flemish students – A multigroup latent class analysis. *Learning and Individual Differences, 66,* 70–77. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2018.02.005

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA, 8*(2), 157–182.

Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., y Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Aula Universitaria, 13,* 29-36. https://doi.org/10.14409/au.v1i13.4112

Pérez, M. (2020). *La transición del lenguaje numérico al algebraico en secundaria. Una Propuesta Didáctica* [Tesis de Maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. Repositorio Institucional- Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Smith, J. P. (1995). Competent Reasoning With Rational Numbers. *Cognition and Instruction,* 13(1), 3–50. https://doi.org/10.1207/s1532690xci1301_1

Van Dooren, W., Lehtinen, E., y Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction,* 37, 1–4. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.01.001

Anexo 1

ACTIVIDAD 1 vs 5:
Conocimientos previos vs Conocimientos adquiridos
Objetivo: Resolver operaciones con números racionales.
Instrucciones: Cada una de las preguntas debe ser resuelta con procedimientos o explicaciones completas, según sea el caso.

1. Marca con una (✓) el número que sea racional y con una (X) el que no lo sea, de la siguiente serie de números.

treinta doceavos	4^2		0.333 ...	(x)(1)	$6\frac{1}{7}$

2. Resuelve las siguientes operaciones y selecciona la respuesta correcta.

$a)\ \frac{2}{3}+\frac{7}{3}=$	3	$d)\ \frac{13}{4} \div -\frac{5}{4} =$	2
	14/9		-65/16
	2/7		-13/5
	9/6		1
$b)\ -\frac{1}{8}+\frac{4}{5}=$	27/40	$\text{e)}\ \frac{6}{2} \div \frac{2}{5} =$	17/5
	- 1/10		6/5
	- 5/32		15/2
	3/13		8/7
$c)(\frac{6}{9})\ (-\frac{2}{11}) =$	16/33	$\text{f)}(\frac{1}{7})\ (\frac{5}{7}) =$	6/7
	-4/33		5/49
	-11/3		1/5
	4/20		6/14

3. Realiza la conversión de las siguientes seis fracciones. Tres de fracciones mixtas a fracciones impropias y viceversa. Posteriormente, selecciona la respuesta correcta y subráyala.

1) $3\frac{1}{2}$	2) $1\frac{11}{7}$	3) $8\frac{9}{5}$	4) $\frac{5}{4}$	5) $\frac{19}{6}$	6) $\frac{8}{3}$
a) 4/2	a) 18/7	a) 49/5	a) $1\frac{5}{4}$	a) $1\frac{9}{6}$	a) $2\frac{2}{3}$
b) 7/2	b) 12/7	b) 13/5	b) $4\frac{1}{5}$	b) $6\frac{1}{9}$	b) $3\frac{1}{8}$
c) 5/2	c) 8/7	c) 17/5	c) $1\frac{1}{4}$	c) $3\frac{1}{6}$	c) $1\frac{8}{3}$

4. Responde verdadero o falso según corresponda en cada una de las siguientes expresiones.

Expresión	Verdadero o falso	Expresión	Verdadero o falso
a) $\frac{4}{7} + \frac{5}{9} = \frac{28+45}{63} = \frac{73}{63}$		d) $(\frac{11}{9})(\frac{9}{11}) = 9$	
b) $\frac{3}{5} + \frac{10}{4} = \frac{10}{4} + \frac{3}{5}$		En este inciso, responde considerando si la expresión es igual a las dos opciones señaladas con el punto. e) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{1}{6} =$ • $(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}) + \frac{1}{6}$ • $\frac{2}{3} + (\frac{4}{5} + \frac{1}{6})$	
c) $(\frac{9}{4})(\frac{2}{7}) = \frac{18}{28}$		f) $\frac{3}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) = 0$	

5. Resuelve los siguientes problemas.

a) Jorge trabaja en un taller de carpintería todas las tardes después del colegio para apoyar con el gasto familiar. Él talla cinco colibríes a la semana trabajando de lunes a viernes. En los dos primeros días ha tallado 5/2 y en el tercer día 3/6 del total. ¿Cuántos colibríes debe tallar Jorge en el tiempo restante para cubrir con la cuota semanal?

b) Para el cumpleaños de María, su mamá decidió hornear un pastel para cuarenta comensales, de los cuales solo comieron diez. ¿Qué fracción del pastel no fue repartida?

Anexo 2

ACTIVIDAD 2
Simplificación y Equivalencia de Fracciones

Instrucciones: La actividad se trata de un juego que se divide en dos etapas. La primera etapa tiene cinco rondas, las cuales consisten en relacionar dos fracciones entre sí dentro de un conjunto de cartas con distintas representaciones (lenguaje natural, numérico, gráfico y alfanumérico). Además, se requiere del uso de la figura que contiene multiplicaciones y divisiones de distintas fracciones con numeradores y denominadores iguales.
La actividad comienza cuando el primer jugador selecciona alguna carta de la primera ronda y, con ayuda de alguna fracción que se encuentre dentro de la figura, opera esa carta con la seleccionada inicialmente. La operación se multiplica o divide (según sea el caso) numerador por numerador y denominador por denominador. El resultado obtenido de esa operación debe estar contenido dentro del conjunto de cartas de esa primera ronda. El procedimiento se repite en cada una de las rondas restantes.
Observación:

- Las cartas que indican una división, NO se refieren al procedimiento de división de fracciones.
- <u>Cada jugador debe argumentar el procedimiento que utilizó para calcular la respuesta.</u>

$x\ \frac{2}{2}$	$x\ \frac{3}{3}$	$x\ \frac{4}{4}$	$x\ \frac{5}{5}$	$x\ \frac{6}{6}$	$x\ \frac{7}{7}$	$x\ \frac{8}{8}$	$x\ \frac{9}{9}$
$\div\ \frac{2}{2}$	$\div\ \frac{3}{3}$	$\div\ \frac{4}{4}$	$\div\ \frac{5}{5}$	$\div\ \frac{6}{6}$	$\div\ \frac{7}{7}$	$\div\ \frac{8}{8}$	$\div\ \frac{9}{9}$

Se muestra un ejemplo antes de comenzar el juego.

Ejemplo

"En esta ronda, las cartas son las siguientes. ¿Cuáles relacionarías y por qué?"

$\frac{45}{105}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{21}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{147}{49}$	$\frac{3}{7}$

La carta igual a $\frac{12}{16}$ se relaciona con la carta igual a $\frac{3}{4}$ porque a partir de la operación "$\div\ \frac{4}{4}$" mostrada en la tabla anterior se divide numerador entre numerador y denominador entre denominador, es decir, 12 entre 4 y 16 entre 4. Sin embargo, se pueden relacionar estas dos fracciones de manera contraria, es decir, la carta igual a $\frac{3}{4}$ se relaciona con la carta igual a $\frac{12}{16}$ porque a partir de la operación "$x\ \frac{4}{4}$" se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador.

Por otro lado, la carta igual a $\frac{21}{7}$ se relaciona con la carta igual a $\frac{147}{49}$ porque a partir de la operación " $x\frac{7}{7}$ ", se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador. Esa misma relación se puede obtener de manera contraria, porque la carta igual a $\frac{147}{49}$ se divide por la carta " $\div\frac{7}{7}$ " y da como resultado $\frac{21}{7}$.

También puede existir el caso en el que se necesita la aplicación de dos o más cartas propuestas de la tabla para generar una sola relación entre cartas de una misma ronda, por ejemplo, la carta igual a $\frac{45}{105}$ se relaciona con la carta igual a $\frac{3}{7}$ porque a partir de la operación " $\div\frac{5}{5}$" se obtiene la fracción igual a $\frac{9}{21}$ y, aun así, puede generar otra relación mediante la carta igual a " $\div\frac{3}{3}$ ". Finalmente, esa misma relación se puede obtener de manera contraria porque la carta igual a $\frac{3}{7}$ se puede multiplicar por la carta " $x\frac{3}{3}$ " y, posteriormente, multiplicar por la carta "$x\frac{5}{5}$ ", teniendo como resultado $\frac{45}{105}$.

$$\frac{12}{16} \div \frac{4}{4} = \frac{3}{4} \qquad \frac{3}{4}\, x\, \frac{4}{4} = \frac{12}{16} \qquad \frac{21}{7}\, x\, \frac{7}{7} = \frac{147}{49} \qquad \frac{147}{49} \div \frac{7}{7} = \frac{21}{7}$$

$$\frac{45}{105} \div \frac{5}{5} = \frac{9}{21} \div \frac{3}{3} = \frac{3}{7} \qquad \frac{3}{7}\, x\, \frac{3}{3} = \frac{9}{21}\, x\, \frac{5}{5} = \frac{45}{105}$$

¡Que comience el juego!: Primera etapa

Primera ronda

En esta ronda, las cartas son las siguientes. ¿Cuáles relacionarías?

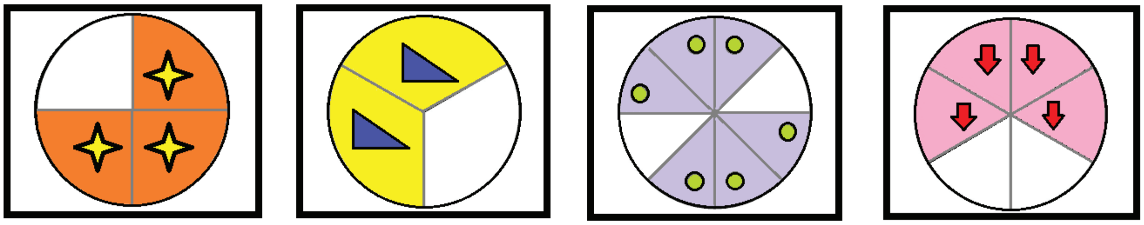
$$\boxed{\frac{12}{54}} \quad \boxed{\frac{8}{24}} \quad \boxed{\frac{6}{27}} \quad \boxed{\frac{9}{6}} \quad \boxed{\frac{2}{6}} \quad \boxed{\frac{3}{2}}$$

Segunda ronda

En esta ronda, las cartas son las siguientes. ¿Cuáles relacionarías?

un medio	un octavo	cuatro octavos	tres quintos	seis décimos	dos dieciseisavos

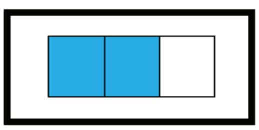
Tercera ronda
En esta ronda, las cartas son las siguientes. ¿Cuáles relacionarías?



Cuarta ronda
En esta ronda, las cartas son las siguientes. ¿Cuáles relacionarías?

$x=\frac{6}{2}$	$3x=\frac{1}{2}$	$4x=12$	$x=\frac{6}{4}$	$x=\frac{2}{12}$	$2x=3$

Quinta ronda
En esta ronda, las cartas son las siguientes. ¿Cuáles relacionarías?

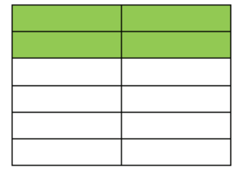
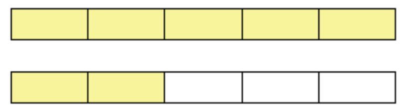
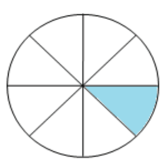
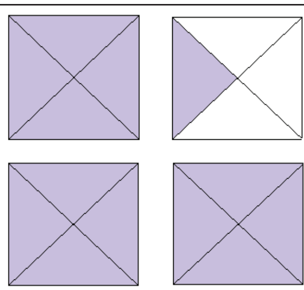


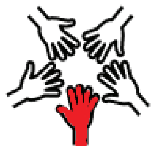
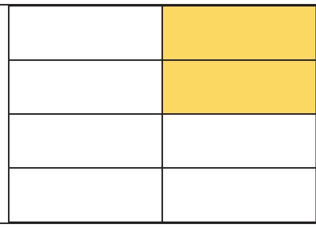
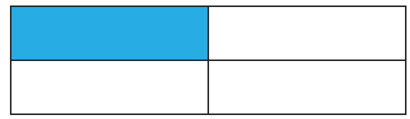
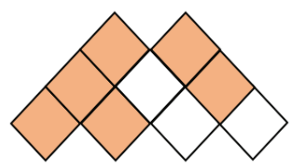
	$6x=4$	un séptimo	$\frac{3}{21}$

Segunda etapa

Indicaciones: En la columna llamada “ES EQUIVALENTE” escribe (SÍ) si consideras que las fracciones son equivalentes, o (NO) si consideras que no lo son. Observa los dos primeros ejemplos.

	¿Esta expresión…	ES EQUIVALENTE	…a esta?
1	Un medio	NO	Tres octavos
2		SÍ	$\frac{10}{25}$

	Dos quintos		
3	Un tercio		
4	Once novenos		$x = \frac{9}{11}$
5	$3a + 2 = a - 7$		$a = -\frac{18}{4}$
6	$y = \frac{18}{15}$		
7	$4w = 1$		$\frac{2}{16}$
8	$3x + 7 + x = x - 4$		Menos treinta y tres novenos
9			$\frac{1}{9}$
10			$24m = 24$

11			Seis treintavos
12			
13	$\frac{5}{7}$		$\frac{7}{5}$
14	$\frac{15}{2}$		treinta y dos cuartos
15	$\frac{24}{6}$		$2f + 5 = 4f - 7$
16	$\frac{2}{3}$		

Anexo 3

ACTIVIDAD 3
Propiedades de los números racionales

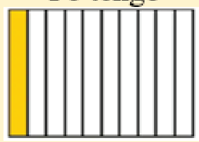
Objetivo: Aplicar las propiedades de números racionales para resolver operaciones, a partir de distintas representaciones.

Instrucciones: Se le proporciona a cada estudiante un conjunto de cartas previamente enviadas, que conforman al juego: "Yo tengo - ¿Quién tiene?". Las cartas no presentan orden alguno y todos los alumnos cuentan con la misma cantidad. Cada tarjeta está dividida en dos partes. La parte superior menciona la frase: "Yo tengo" y la parte inferior: "¿Quién tiene?", ambas partes están acompañadas de un número racional mostrado en cualquier tipo de representación (lenguaje natural, gráfico, alfanumérico o numérico). El juego puede iniciar con cualquier carta. El juego comienza cuando el primer jugador realiza la afirmación que se encuentra en la parte superior de la carta "Yo tengo", junto con el número racional propuesto. Posteriormente, el mismo jugador realiza la pregunta que se encuentra en la parte inferior de la carta "¿Quién tiene?", junto con el resultado de las operaciones o equivalencias propuestas. La continuidad del juego se genera cuando el segundo jugador responde a la pregunta del primer jugador con: "Yo tengo" y el procedimiento se repite con cada una de las cartas, generando una continuidad entre ellas. El juego termina hasta que aparece la carta: "¡Yo tengo 0!".

Observaciones:

- Todos los resultados deberán ser calculados hasta su fracción irreducible. En el caso de encontrarse una fracción reducible en la actividad, debe ser simplificada antes de operarse.
- En las cartas donde aparezcan imágenes, se debe tomar en cuenta el área coloreada.
- Cualquier jugador puede responder a cada pregunta, no hay un orden en turnos para los jugadores. En el caso de que un jugador no conozca la respuesta, entonces otro jugador deberá responderla. Sin embargo, cada carta la debe responder un jugador diferente.
- No todas las cartas se utilizan en el juego*.
- <u>Cada jugador debe argumentar el procedimiento que utilizó para calcular la respuesta.</u>

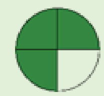
Yo tengo



¿Quién tiene esa cantidad más $(\frac{1}{3} + \frac{1}{2})$?

Yo tengo
$30x = 28$

¿Quién tiene esa cantidad por



?

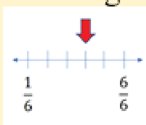
Yo tengo
siete décimos

¿Quién tiene esa cantidad por $(\frac{1}{3} * \frac{4}{2})$?

Yo tengo
$\frac{7}{15}$

¿Quién tiene esa cantidad más tres quinceavos ?

Yo tengo

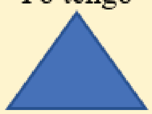


¿Quién tiene esa cantidad por $(\frac{1}{7} + 2\frac{1}{4})$?

Yo tengo
sesenta y siete cuarenta y dozavos

¿Quién tiene esa cantidad por $(\frac{42}{67})$?

Yo tengo



¿Quién tiene esa cantidad menos dos medios ?

¡Yo tengo 0!

*Las siguientes dos cartas solo aumentan complejidad al juego, es decir, NO se utilizan.

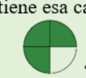
Yo tengo
$\frac{5}{4}$

¿Quién tiene esa cantidad más x = 3/6 ?

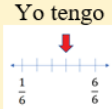
Yo tengo

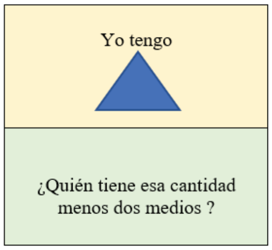
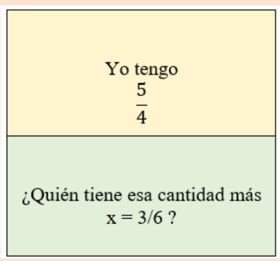
¿Quién tiene esa cantidad por 2/4 ?

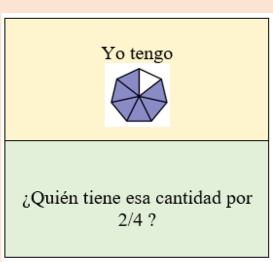
El juego previamente efectuado requirió la aplicación de las propiedades de números racionales para poder ser jugado. El uso de las propiedades se realizó de la siguiente manera:

Carta	Propiedad	Argumentación
Yo tengo  ¿Quién tiene esa cantidad más $(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})$?	Asociativa para la suma	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\begin{cases} =\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f} \\ =\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right) \end{cases}$ Esta propiedad agrupa dos fracciones, y el resultado de la suma entre ellas es sumado a la tercera. Hay dos formas de hacerlo: $\frac{1}{10}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\begin{cases} =\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2} \\ =\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) \end{cases}$
Yo tengo 30x = 28 ¿Quién tiene esa cantidad por  ?	Definición de producto en los números racionales	$\frac{a}{b}*\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ Esta propiedad multiplica numeradores entre sí y denominadores entre sí. $\frac{14}{15}*\frac{3}{4}=\frac{42}{60}$ *Nota:* En la actividad, el resultado fue simplificado a 7/10.
Yo tengo siete décimos ¿Quién tiene esa cantidad por $(\frac{1}{3}*\frac{4}{2})$?	Asociativa para la multiplicación	$\frac{a}{b}*\frac{c}{d}*\frac{e}{f}\begin{cases} =\left(\frac{a}{b}*\frac{c}{d}\right)*\frac{e}{f} \\ =\frac{a}{b}*(\frac{c}{d}*\frac{e}{f}) \end{cases}$ Esta propiedad agrupa dos fracciones, y el resultado de la multiplicación entre ellas se multiplica con la tercera. Hay dos formas de hacerlo: $\frac{7}{10}*\frac{1}{3}*\frac{4}{2}\begin{cases} =\left(\frac{7}{10}*\frac{1}{3}\right)*\frac{4}{2} \\ =\frac{7}{10}*(\frac{1}{3}*\frac{4}{2}) \end{cases}$ *Nota:* En la actividad, la fracción 4/2 fue simplificada a 2 antes de operarse.

Yo tengo $\frac{7}{15}$ ¿Quién tiene esa cantidad más tres quinceavos ?	Definición de suma para números racionales	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ Esta propiedad multiplica denominadores entre sí. Además, realiza productos cruzados para obtener los numeradores, es decir, multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción y multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción. $\frac{7}{15}+\frac{3}{15}=\frac{105+45}{225}=\frac{150}{225}=\frac{30}{45}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ Por otro lado, al contar con fracciones que tienen el mismo denominador, se suman los numeradores entre sí y se reescribe el mismo denominador. $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}\rightarrow\frac{7}{15}+\frac{3}{15}=\frac{7+3}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$ Con esto se observa que puedes obtener el mismo resultado por cualquiera de los dos procedimientos.

Carta	Propiedad	Argumentación
Yo tengo  ¿Quién tiene esa cantidad por $(\frac{1}{7}+2\frac{1}{4})$?	Distributiva	$\frac{a}{b}*\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{ac}{bd}+\frac{ae}{bf}$ Esta propiedad multiplica la primera fracción tanto por la segunda como por la tercera, y el resultado de ambas es sumado entre sí. $\frac{2}{3}*\left(\frac{1}{7}+\frac{9}{4}\right)=\frac{2*1}{3*7}+\frac{2*9}{3*4}$ *Nota:* En la actividad, en la recta numérica la fracción 4/6 fue simplificada a 2/3 antes de operarse.
Yo tengo sesenta y siete cuarenta y dozavos ¿Quién tiene esa cantidad por $(\frac{42}{67})$?	Inverso multiplicativo	$\frac{a}{b}*\frac{b}{a}=\frac{ab}{ba}=1$ Con esta propiedad, se multiplican numeradores y denominadores entre sí. La fracción resultante se simplifica y el resultado genera la unidad, es decir, el número uno. $\frac{67}{42}*\frac{42}{67}=\frac{67*42}{42*67}=1$

	Inverso aditivo	$\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=0$ Esta propiedad suma fracciones con igual numerador y denominador, pero con signos contrarios. El resultado producido es igual a cero. $\frac{2}{2}+\left(-\frac{2}{2}\right)=0$ *Nota:* En la actividad, el entero se convirtió a 2/2. Además, esta fracción, así como -2/2, pudo simplificarse a 1 antes de operarse.
 (No se utilizan en el juego)*	Definición de suma para números racionales	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ Esta propiedad multiplica denominadores entre sí. Posteriormente se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda y, a su vez, se multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda. Cada uno de los resultados es sumado entre sí. $\frac{5}{4}+\frac{3}{6}=\frac{(5*6)+(4*3)}{24}$ *Nota:* En la actividad, la fracción 3/6 fue simplificada a 1/2.

Carta	Propiedad	Argumentación
 (No se utilizan en el juego)*	Definición de producto en los números racionales	$\frac{a}{b}*\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ Esta propiedad multiplica numeradores entre sí y denominadores entre sí. $\frac{1}{7}*\frac{2}{4}=\frac{2}{28}$ *Nota:* En la actividad, la fracción 2/4, así como el resultado de 2/28, pudo simplificarse.

Propiedades de números racionales	Suma simbólicamente (b, d f ≠ 0)	Ejemplo	Multiplicación simbólicamente (b, d f ≠ 0)	Ejemplo
Conmutativa	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{c}{d}+\frac{a}{b}$	$\frac{5}{3}+\frac{2}{8} = \frac{2}{8}+\frac{5}{3}$	$\frac{a}{b}*\frac{c}{d}=\frac{c}{d}*\frac{a}{b}$	$\frac{1}{3}*\frac{7}{5}=\frac{7}{5}*\frac{1}{3}$
Elemento neutro	$\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}$	$\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$	$\frac{a}{b}*1=\frac{a}{b}$	$\frac{3}{4}*1=\frac{3}{4}$

Anexo 4

ACTIVIDAD 4
Situación en contexto

Objetivo: Considerar números racionales para analizar y cuestionar críticamente diversos fenómenos.

Instrucciones: A partir de la situación en contexto presentada, realiza lo que se pide.

SANA DISTANCIA

Dionicio, el papá de una estudiante de bachillerato, tiene diabetes e hipertensión. Además, es un reconocido matemático que analiza la probabilidad y estadística de diferentes eventos. Él leía con detenimiento la siguiente noticia: “El SARS-Cov-2 es un virus que apareció en China y después se extendió a todos los continentes del mundo provocando una pandemia”. Consternado por la covid-19 (enfermedad originada en el año 2019 y producida a causa de este virus) le explica a su hija la importancia de contar con una sana distancia. Además, le muestra algunas estadísticas obtenidas el 25 febrero del 2021, sobre las consecuencias que ha dejado esta enfermedad. De acuerdo con la Dirección General de Epidemiología (DGE, 2020) hay 2,060,908 casos confirmados y 182,815 defunciones, producto de distintas enfermedades como:

Hipertensión (45.32%), Diabetes (37.54%), Obesidad (22.22%) y Tabaquismo (7.63%).

Por tal motivo, quiere concientizar a Perla, su hija, sobre las consecuencias de esta enfermedad, realizando una tabla que muestra el incremento de las actividades que tendría que realizar diariamente si alguien en su hogar enfermara.

Actividad	*Actividades realizadas por Perla*	*Actividades si alguien en mi hogar enfermara*
1. Limpiar recámara	✓	✓
2. Alimentar mascotas	✓	✓
3. Sacar la basura	✓	✓
4. Cocinar para todos en el hogar	---	✓
5. Limpiar toda la casa	---	---
6. Lavar los trastes	---	✓
7. Comprar la despensa en el supermercado/mercado	---	---
Total	3	5

Nota: Dionicio, el padre de Perla, no registró todas las actividades realizadas diariamente en el hogar. Además, no solo ella las realizará.

1. En plenaria, contesta lo que se pide:
- ¿Tienes algún familiar que presente alguna de estas enfermedades?

2. Realiza lo que se pide:

- Calcula numéricamente las actividades realizadas diariamente en el hogar.
- Realiza dos tablas, en las cuales representes el número de respuestas, las variables acumuladas, los porcentajes de cada respuesta, etc. El docente facilitará dichas tablas.

3. En plenaria, responde:
- ¿Tú vida adquiriría más responsabilidades si alguien en el hogar enfermara por covid-19?

Se adjuntan las tablas.

Número de actividades realizadas diariamente en el hogar	*Número de respuestas*	*Número de respuestas que pertenecen al total*	*Acumulado del número de respuestas del total*	*Parte decimal del entero de datos*	*Acumulado de la parte decimal del entero de datos*	*Porcentaje del número de respuestas*	*Acumulado del porcentaje del número de respuestas*
De 1 a 5							
De 6 a 10							
De 11 a 15							
De 16 a 20							

Número de actividades realizadas diariamente en el hogar MÁS las actividades añadidas	*Número de respuestas*	*Número de respuestas que pertenecen al total*	*Acumulado del número de respuestas del total*	*Parte decimal del entero de datos*	*Acumulado de la parte decimal del entero de datos*	*Porcentaje del número de respuestas*	*Acumulado del porcentaje del número de respuestas*
De 1 a 5							
De 6 a 10							
De 11 a 15							
De 16 a 20							